S.1310.c.

ABHANDLUNGEN

DER

MATHEMATISCH-PHYSIKALISCHEN CLASSE

DER KÖNIGLICH BAYERISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

EILFTER BAND.

IN DER REIHE DER DENKSCHRIFTEN DER XL. BAND.

MÜNCHEN,
1874.

VERLAG DER K. AKADEMIE,
IN COMMISSION BEI G. FRANZ.

BRITISH MUSEUM
NATURAL HISTORY.

Inhalt des XI. Bandes.

I. Abtheilung.

Seite

Ueber die Grenzwerthe eines unendlichen Potenzausdruckes der Form $x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{x}}}}}$. Von *Ludwig Seidel* 1

Die sogenannten Nulliporen (Lithothamnium und Dactylopora) und ihre Betheiligung an der Zusammensetzung der Kalkgesteine. Erster Theil: die Nulliporen des Pflanzenreichs (Lithothamnium.) Von *C. W. Gümbel.* (Mit 2 Tafeln.) 11

Ueber das Problem der drei Körper. Von *Otto Hesse* 53

Ein Apparat zur mechanischen Lösung der nach Pothenot, Hansen u. A. benannten geodätischen Aufgaben. Von *Carl Max von Bauernfeind.* (Mit einer Steindrucktafel.) 81

Untersuchungen über die Salzseen im westlichen Tíbet und in Turkistán. I. Theil. Rúpchu und Pankóng; das Gebiet der Salzseen im westlichen Tíbet. Von *Hermann von Schlagintweit-Sakünlünski* 101

Ein Cyclus von Determinanten-Gleichungen. (Eine analytische Erweiterung des Pascal'schen Theoremes.) Von *Otto Hesse* 175

Die Mineraliensammlung des Bayerischen Staates. Von *Franz von Kobell* . 193

Die sogenannten Nulliporen (Lithothamnium und Dactylopora) und ihre Betheiligung an der Zusammensetzung der Kalkgesteine. Zweiter Theil: die Nulliporen des Thierreiches (Dactyloporideae) nebst Nachtrag zum ersten Theile. Von *C. W. Gümbel.* (Mit 4 Tafeln) 229

II. Abtheilung.

Geodätische Bestimmung der Erdkrümmung und Lothablenkung. Von *Carl Max von Bauernfeind.* (Mit 10 Holzschnitten) 1

Das Bayerische Präcisions-Nivellement. Zweite Mittheilung. Von *Carl Max von Bauernfeind* 41

Seite

Von einem Kettenbruche Euler's und einem Theorem von Wallis. Von *G. Bauer* 97

Anatomische Beschreibung eines mikrocephalen 8jährigen Mädchens Helene Becker aus Offenbach. Von *Th. L. W. v. Bischoff.* (Mit 5 Tafeln in Lichtdruck.) 117

III. Abtheilung.

Die Reciprocität zwischen Kreisen, welche dieselbe gemeinschaftliche Secante haben und den confocalen Kegelschnitten. Von *Otto Hesse* 1

Beobachtungen und Untersuchungen über die Eigenschaften und die practische Verwerthung der Naudet'schen Aneroïdbarometer. Von *Carl Max von Bauernfeind.* (Mit 1 Steindrucktafel.) 25

Ueber ein Verfahren die Gleichungen, auf welche die Methode der kleinsten Quadrate führt, sowie lineäre Gleichungen überhaupt, durch successive Annäherung aufzulösen. Von *Ludwig Seidel* 81

Ueber das Pascal'sche Theorem. Von *G. Bauer* 109

Das Bayerische Präcisions-Nivellement. (Dritte Mittheilung.) Von *Carl Max von Bauernfeind* 141

ABHANDLUNGEN

DER

MATHEMATISCH-PHYSIKALISCHEN CLASSE

DER KÖNIGLICH BAYERISCHEN

S. 1310. c.

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

EILFTEN BANDES

ERSTE ABTHEILUNG.

IN DER REIHE DER DENKSCHRIFTEN DER XL. BAND.

MÜNCHEN,

1871.

VERLAG DER K. AKADEMIE,

IN COMMISSION BEI G. FRANZ.

S. 1310. d

ABHANDLUNGEN

DER

MATHEMATISCH-PHYSIKALISCHEN CLASSE

DER KÖNIGLICH BAYERISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

EILFTEN BANDES

ERSTE ABTHEILUNG.

BRITISH
NATURAL HISTORY

ABHANDLUNGEN

DER

MATHEMATISCH-PHYSIKALISCHEN CLASSE

DER KÖNIGLICH BAYERISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

EILFTEN BANDES

ERSTE ABTHEILUNG.

IN DER REIHE DER DENKSCHRIFTEN DER XL. BAND.

MÜNCHEN,

1871.

VERLAG DER K. AKADEMIE,

IN COMMISSION BEI G. FRANZ.

BRITISH
NATURAL HISTORY

Inhalt.

Seite

Ueber die Grenzwerthe eines unendlichen Potenzausdruckes der Form $x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}$ von *L. Seidel* 1

Die sogenannten Nulliporen (Lithothamnium und Dactylopora). und ihre Betheiligung an der Zusammensetzung der Kalkgesteine. Erster Theil: die Nulliporen des Pflanzenreichs (Lithothamnium). Von *C. W. Gümbel* mit 2 Tafeln . . . 11

Ueber das Problem der drei Körper. Von *Otto Hesse* 53

Ein Apparat zur mechanischen Lösung der nach Pothenot, Hansen u. A. benannten geodätischen Aufgaben von *Carl Max Bauernfeind.* Mit einer Steindrucktafel 81

Untersuchungen über die Salzseen im westlichen Tíbet und in Turkistán. I. Theil. Rúpchu und Pankóng; das Gebiet der Salzseen im westlichen Tíbet. Von *Hermann von Schlagintweit-Sakünlünski* 101

Ein Cyclus von Determinanten-Gleichungen. (Eine analytische Erweiterung des Pascal'schen Theoremes.) Von *Otto Hesse* 175

Die Mineraliensammlung des Bayerischen Staates. Von *Franz von Kobell* . . 193

Die sogenannten Nulliporen (Lithothamnium und Dactylopora). und ihre Betheiligung an der Zusammensetzung der Kalkgesteine. Zweiter Theil: die Nulliporen des Thierreiches (Dactyloporideae) nebst Nachtrag zum ersten Theile. Von *C. W. Gümbel.* Mit 4 Tafeln 229

Ueber die Grenzwerthe

eines

unendlichen Potenzausdruckes

der Form $x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}$

Von

L. Seidel.

Ueber die

Grenzwerthe eines unendlichen Potenz-Ausdruckes.

Von

L. Seidel.

Eisenstein hat in einem Aufsatze des 28. Bandes von Crelle's Journal die Aufgabe behandelt, eine Function y von x, welche definirt ist durch die Gleichung

$$\text{I.} \qquad x^y = y \quad ,$$

zu entwickeln nach den Potenzen von log x .*) Er setzt zugleich, ohne eine nähere Untersuchung deshalb anzustellen, voraus, dass der unendliche Potenz-Ausdruck

$$x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}$$

(in welchem unter x eine positive Grösse verstanden wird) nach der also bestimmten Grenze y convergire so lange, und nur so lange, als $x \leq 1$ ist; und da die Schranken für die Convergenz seiner Reihe andere sind, so statuirt er die Gleichheit der letzteren mit dem unendlichen Ausdruck innerhalb des engeren Werthgebietes von x, welches den zweierlei Umgrenzungen zugleich angehört. Das wirkliche Verhalten des unendlichen Potenzausdruckes in Bezug auf Convergenz ist indess

*) In der von ihm gewählten Bezeichnung ist die Bedeutung der Buchstaben x und y umgetauscht gegen die hier angenommene.

anders, als Eisenstein voraussetzt; und da die Untersuchung auf einige eigenthümliche und, wie mir scheint, nicht uninteressante Momente führt, so werde ich hier dieselbe etwas näher darlegen.

1.

Als stehende Bezeichnung sei gesetzt

II. $$x^x = x_1 \; ; \quad x^{x_1} = x_2 \; ; \quad x^{x_2} = x_3$$
$$\ldots \quad x^{x_r} = x_{r+1} \; ; \quad \ldots$$

Betrachtet man nun zunächst den Fall $x > 1$, als den einfachsten, so ist klar, dass man hat

$$x < x_1 < x_2 < \ldots ,$$

dass also die aufeinander folgenden x_r entweder zuletzt über alle Grenzen wachsen, oder sich einer festen Grenze y, die selbst grösser als 1 ist, und der Gleichung I. genügt, von unten her beständig annähern müssen. Diese Gleichung, nach welcher

$$\log x = \frac{\log y}{y}$$

wird, gibt für x den Maximalwerth $\sqrt[e]{e}$, zu $y = e$ gehörig; zu jedem x zwischen 1 und e, den andern zwischen e und ∞. Für Werthe $x > \sqrt[e]{e}$ (welchen keine reellen y entsprechen) muss demnach der unendliche Potenzausdruck divergiren; dagegen lässt sich leicht zeigen, dass er für

$$1 < x < \sqrt[e]{e}$$

wirklich nicht über alle Grenzen wächst, und also noch nach einem zugehörigen y convergirt. Denn wenn $x \leqq e^{\frac{1}{e}} < e$, so ist zunächst

$$x^x < (e^{\frac{1}{e}})^e \text{ , d. i. } x_1 < e$$

hiermit dann wieder ebenso

$$x^{x_1} < (e^{\frac{1}{e}})^e \text{ , d. i. } x_2 < e$$

und so für alle folgenden x, so dass der Werth e von denselben nie erreicht, noch weniger überschritten werden kann. — Demnach ist nicht 1 sondern erst $\sqrt[e]{e}$ der grösste Werth von x, für welchen der

unendliche Potenzausdruck convergirt; und für Werthe x zwischen 1 und diesem Maximalwerth ist unter den beiden reellen y, die der Gleichung I genügen, dasjenige der Grenzwerth, welches $< e$ ist.

2.

Wenn man jetzt voraussetzt

$$0 < x < 1$$

so wird der Gang der Grössen x_1, x_2, . . . ein anderer. Man hat hier zunächst

$$x^1 < x^x < x^0, \text{ d. i. } x < x_1 < 1;$$

hiermit dann ebenso

$$x^1 < x^{x_1} < x^x, \text{ d. i. } x < x_2 < x_1$$

ferner

$$x^{x_1} < x^{x_2} < x^x, \text{ d. i. } x_2 < x_3 < x_1$$

u. s. w., so dass jedes neue x der Grösse nach zwischen die beiden ihm zunächst vorausgehenden fällt, und sich im Ganzen folgendes Verhalten ergibt:

III. $$0 < x < x_2 < x_4 < \ldots. < x_{2n-2} < x_{2n} < \ldots < x_{2n+1} < x_{2n-1} < \ldots < x_3 < x_1 < 1$$

Diese Art des Fortschreitens verträgt sich offenbar mit der gleichzeitigen Annäherung der x_{2n} von unten her und der x_{2n+1} von oben her an dieselbe zwischenliegende Grenze y, die der Gleichung I genügt; aber auch mit der Convergenz der x_{2r} gegen eine kleinere Grenze u und der gleichzeitigen der x_{2r+1} gegen eine grössere v, soferne u und v echte Brüche sind, die den simultanen Gleichungen entsprechen:

IV. $$x^u = v \quad ; \quad x^v = u$$

oder auch der aus ihnen abgeleiteten Gleichung (in welcher der Buchstabe v mit u vertauscht werden darf)

V. $$x^v \log x - \log v = 0$$

Dabei ist evident, dass die Gleichung I auch für die gegenwärtig angenommene Begrenzung von x immer ein brauchbares y, und zwar hier nur Eines liefert: denn lässt man in ihr y die Werthe o bis 1 durchlaufen, so geht zugleich x beständig wachsend von o bis 1. Andrerseits ist auch klar, dass das in solcher Weise mit x verbundene y,

wenn man es in Gleichung V statt v setzt, auch diese Gleichung erfüllt, weil ja die beiden in IV, aus welchen V hervorgeht, selbst die Gl. I als speciellen Fall in sich schliessen. Es liegt also hier vor eine transcendente Gleichung (V), von welcher man weiss, dass sie alle Wurzeln einer einfacheren ähnlichen Gleichung (I) enthält, und in Betreff deren nun die Frage zu stellen ist, ob sie ausser diesen Wurzeln $v = y$ (zu echten Brüchen x) auch noch andere (für unsere Anwendung reelle und zwischen o und 1 gelegene) Wurzeln v hat. Diese letzteren müssen, wenn sie überhaupt existiren, paarweise vorhanden sein, weil zu jedem gefundenen v, welches kein y ist, nach der zweiten Gleichung in IV, ein von ihm verschiedenes u sich ergibt, welches mit ihm zugleich ein echter Bruch ist, und der nehmlichen Gleichung V entspricht.

3.

Obgleich man hier nicht so wie in der Algebra die Gleichung I benützen kann, um diejenigen Wurzeln zu isoliren, welche in V neben den gemeinschaftlichen noch stecken können, so lässt sich doch im vorliegenden Falle etwas sehr Aehnliches mittelst einer Hilfsvariabelen erreichen, auf deren Einführung man durch die Kenntniss der besonderen Lösung durch I geleiter wird.

Setzt man nemlich, anschliessend an die Form der Gleichungen IV

VI. $$v = x^u = x^v e^{\vartheta} = u e^{\vartheta}$$

so ist $\vartheta = o$ wenn $u = v = y$; zugleich gelingt es, wenn ϑ nicht verschwindet, die drei Grössen x, u, v explicite durch ϑ darzustellen.

Substituirt man nehmlich zunächst in V für x^v seinen Werth $ve^{-\vartheta}$ und für log x den hieraus folgenden Werth $\frac{\log v - \vartheta}{v}$, so bleibt von v nur der Logarithmus in der Gleichung, die, wie es sein muss, sich identisch erfüllt für $\vartheta = o$. Hat ϑ irgend einen anderen Werth, so erhält man direct

VII. $$\log v = -\frac{\vartheta}{e^{\vartheta} - 1}$$

Aus VI ist aber auch

$$v : u = e^{\vartheta}$$

und hiermit ergibt sich denn für das dem eben gefundenen v conjugirte u die Gleichung:

VIII. $$\log u = -\frac{\vartheta}{1 - e^{-\vartheta}} = \frac{\vartheta}{e^{-\vartheta} - 1}$$

Die letztere Form dieses Ausdrucks lässt erkennen (was auch direct aus Gl. VI zu lesen ist), dass u und v ihre Rollen tauschen, wenn ϑ sein Zeichen wechselt. Will man, wie gleich Anfangs angenommen wurde, immer mit v den grösseren der beiden zusammengehörigen Werthe benennen, so hat man ϑ immer positiv zu denken.

Natürlich ergibt sich nun aus VI auch x durch ϑ: am elegantesten ausgedrückt mittelst hyperbolischer Functionen wie folgt:

IX. $$\log x = -\frac{1}{2}\vartheta \operatorname{cosec hyp}\frac{1}{2}\vartheta \cdot e^{\frac{1}{2}\vartheta \cdot \operatorname{cotg hyp}\frac{1}{2}\vartheta}$$

Man überzeugt sich leicht, dass jede der drei Grössen v, u, x immer in Einerlei Sinn sich verändert, während ϑ alle positiven Werthe, von ∞ bis zu Null herab, durchläuft, — und zwar nimmt v zugleich mit ϑ fortwährend ab, indess u und x zunehmen. An den Differential-Coefficienten von log v und log u wird dies sofort erkannt, indem man den Ausdruck e^{ϑ} durch die Reihe ersetzt; was x betrifft, so findet sich

$$\frac{d \log \log \frac{1}{x}}{d\vartheta} = \frac{1}{\vartheta} - \frac{\vartheta}{(2 \operatorname{Sin hyb.} \frac{1}{2}\vartheta)^2}$$

$$= \frac{(e^{\frac{\vartheta}{2}} - e^{-\frac{\vartheta}{2}})^2 - \vartheta^2}{\vartheta (e^{\frac{\vartheta}{2}} - e^{-\frac{\vartheta}{2}})^2}$$

nothwendig positiv für positive ϑ. Die extremen Werthe, zwischen welchen sich dabei die drei Grössen bewegen, sind folgende:

für $\vartheta = \infty$ ... $v = 1$, $u = 0$, $x = 0$

für $\vartheta = 0$ .. $v = \frac{1}{e}$, $u = \frac{1}{e}$, $x = \frac{1}{e^e}$

Jedes x zwischen o und $\frac{1}{e^e}$ wird also Einmal, und nur Einmal

auftreten mit einem ihm zugehörigen Paare von Werthen v, u, die nicht coincidiren; dagegen kommen die $x > \frac{1}{e^e}$ für kein von Null verschiedenes ϑ zum Vorschein. Für diese letzteren hat also Gleichung V keine andere reelle Wurzel als das y aus I *) und der unendliche Potenzausdruck muss gegen dieses als seine Grenze convergiren; während für die kleineren x noch zu untersuchen bleibt, ob die Annäherung schliesslich an den Werth y oder an die beiden zu demselben x gehörigen Grössen u, v stattfindet. Was den Grenzfall $x = \frac{1}{e^e}$ selbst angeht, so fallen für ihn die drei Grössen u, v, y in dem Werthe $\frac{1}{e}$ zusammen, und zwar in der Art, dass, wenn man diese drei Functionen als Ordinaten zu Abscissen x aufgetragen denkt, an der bezeichneten Stelle die beiden hier endigenden Curvenäste der u und v, von der Ordinate berührt, in einander verlaufen, während der Ast der y unter endlichem Winkel sie schneidet.

4.

Wenn die von einander verschiedenen u, v zu einem $x < 1$ existiren, so schliessen sie den Werth y nothwendig zwischen sich ein. Denn in der Gleichung $x^u = v$ kann man den Exponenten vom Werthe y aus nicht nach der Einen oder der andern Seite hin verändern, ohne dass der Werth der Potenz, ebenfalls vom Werthe y aus, sich im entgegengesetzten Sinne verändert.

Andrerseits bleiben die Grössen x, x_1, x_2, ... nothwendig immer ausserhalb solcher Grössen u, v, die unseren Gleichungen IV entsprechen. Denn weil $v < 1$, so hat man zunächst

*) Die unendlich vielen Paare complexer und auch im gewöhnlichen speciellen Sinne des Wortes conjugirter Wurzeln u, v, welche man mittelst rein imaginärer ϑ zu allen positiven x noch erhält, sind für unsere Untersuchung ohne Bedeutung. — Dass übrigens für die Werthe von $x > \frac{1}{e^e}$ der Ausdruck in V keine andere reelle Wurzel v haben kann, folgt auch aus der Betrachtung seines partiellen Differentialcoefficienten, nach v genommen, welcher nicht Null werden kann, wenn x jene Grenze überschreitet.

$$x < x^v, \quad \text{d. h.} \quad x < u;$$

hiermit ferner $x^x > x^u$, d. h. $x_1 > v$

ebenso $x^{x_1} < x^v$, d. h. $x_2 < u$

$x^{x_2} > x^u$, d. h. $x_3 > v$

u. s. w.

Aus diesem Verhalten ist klar, dass weder die x von geradem noch die von ungeradem Index dem zwischen u und v gelegenen y sich ohne Ende nähern können: es müssen also die ersteren den Werth u selbst und die anderen den Werth v zur Grenze haben. Ihr Verhalten tritt dadurch in continuirlichen Zusammenhang mit demjenigen, welches im extremen Falle $x = o$ stattfindet, wo nehmlich alle x von geradem Index dem Werth o (Grenzwerth von u für $\vartheta = \infty$) und alle von ungeradem Index dem Werth 1 (conjugirter Grenzwerth von v) von Anfang an gleich sind.

Das Gesammtergebniss der Discussion unseres unendlichen Potenzausdruckes für positive x ist also folgendes:

Lässt man x von o an allmählich wachsen bis zu dem Werthe $\frac{1}{e^e}$, so ist die Grenze von x_{2n}, für unendlich wachsende n, eine Funktion u von x, welche nach und nach von o bis $\frac{1}{e}$ wächst, und die Grenze von x_{2n+1} ist unter gleichen Umständen eine andere Funktion v, welche nach und nach abnimmt von 1 bis $\frac{1}{e}$. Man kann direct beliebig viele zusammengehörige x, u, v rechnen, indem man in den Gleichungen IX, VIII, VII für ϑ willkührliche positive Werthe setzt. Erreicht x den Werth $\frac{1}{e^e}$, so fallen u und v beide im Werthe $\frac{1}{e}$ zusammen. Für grössere x, bis zum Maximalwerthe $\sqrt[e]{e}$, convergiren die x_{2n} und die x_{2n+1} gegen ein und dieselbe Grenze y, die allmählich von $\frac{1}{e}$ bis e zu-

nimmt, und überhaupt der Gleichung I genügt. Erst da, wo diese Gleichung ein reelles y versagt, nehmlich jenseits $x = \sqrt[e]{e}$, hört auch der Potenzausdruck zu convergiren auf.

Von den beiden Functionen

$$\text{Lim. } x_{2n} \text{ und Lim. } x_{2n+1}$$

kann man die erste allgemein bezeichnen als die kleinste reelle Wurzel der Gleichung V: die andere ist grösste Wurzel dieser Gleichung für $x < 1$, aber kleinste Wurzel für $x > 1$. Diese beiden Functionen fallen, wie man sieht, in dem grössten Theil ihres reellen Verlaufes, zwischen $x = \sqrt[e]{e}$, und $x = \frac{1}{e^e}$, unter sich und mit der Wurzel y der Gleichung I (und zwar der kleineren, wo diese Gleichung zwei Lösungen darbietet) zusammen; von der bezeichneten Stelle bis zu $x = o$ hat aber jede von den dreien ihre besondere Fortsetzung, die ohne Unterbrechung der Continuität sich an den allen gemeinsamen Theil anschliesst.

Die Reihe, welche Eisenstein mit Hilfe unserer Gleichung I abgeleitet hat, convergirt seiner Untersuchung nach innerhalb der Strecke $x = \frac{1}{\sqrt[e]{e}}$ bis $x = \sqrt[e]{e}$, die, wie man sieht, nach unten nicht so weit, nach oben nur ebenso weit reicht, als diejenige, in welcher der unendliche Potenzausdruck der nehmlichen Gleichung genug thut. Für den Umfang des reellen Gebietes, in welchem die beiden unendlichen Ausdrücke dieselbe Function darstellen, setzt also lediglich die Bedingung der Convergenz der Reihe den Markstein.

Die sogenannten Nulliporen

(Lithothamnium und *Dactylopora).*

und ihre

Betheiligung an der Zusammensetzung der Kalkgesteine.

Erster Theil:

Die Nulliporen des Pflanzenreichs *(Lithothamnium).*

Von

C. W. Gümbel.

Mit 2 Tafeln.

Die sogenannten Nulliporen

(*Lithothamnium* und *Dactylopora*)

und ihre Betheiligung an der Zusammensetzung der Kalkgesteine.

Von

C. W. Gümbel.

Erster Theil.

Die *Nulliporen* des Pflanzenreichs *(Lithothamnium)*.

Einleitung. Das Vorkommen der sogenannten *Nulliporen* in den verschiedensten Kalkgesteinen und deren massenhafte Betheiligung an der Zusammensetzung mancher Kalkschichten sind von so grossem geognostischem Interesse, gleichwohl aber bisher so wenig erkannt und gewürdigt worden, dass es als eine nicht unwichtige Aufgabe erscheint, diese Verhältnisse in ein klares Licht zu stellen. Ebenso wenig ist auch über die wahre Natur der unter der Bezeichnung *„Nullipora“* von verschiedenen Paläontologen zusammengefassten, sehr verschiedenartigen Naturkörper und über die Stellung, welche sie im organischen Reiche einnehmen, durch gründliche Untersuchungen genügende Sicherheit erlangt. Auch in dieser Richtung bietet sich der Forschung ein weites, reiches Feld dar.

Für Jeden, der einmal Gelegenheit fand, sich durch eigene Anschauung von dem erstaunlich massenhaften Auftreten der sog. Nulliporen in dem Leithakalke des Wiener-Beckens oder in dem sog. Nul-

liporenkalke der österreichischen Tertiärgebilde überhaupt Kenntniss zu verschaffen, bedarf es keines eingehenderen Beweises, wie wünschenswerth eine Untersuchung über die Natur dieser so eigenthümlichen Einschlüsse sei, aus welchen der Leithakalk oft in seiner ganzen beträchtlichen Mächtigkeit weit aus seiner Hauptmasse nach besteht. Aehnlichen organischen Einschlüssen begegnen wir in den höchsten Theilen unseres Kalkalpengebirgs, wo sie in manchen dolomitischen Lagen dicht zusammengehäuft sehr beträchtlich mächtige Felsmassen fast ausschliesslich ausmachen. Die sog. Wettersteinkalke und die Dolomitgebilde, welche sich diesen Lagen zunächst anschliessen, beherbergen von einem Ende der Alpen bis zum andern auf den beiden Kalknebenzonen diese Uebereste als gesteinbildende Elemente in erstaunlicher Menge.

Solchen Wahrnehmungen, welche ich jüngst bei einigen Ausflügen in der Umgegend von Wien machte, und durch welche ich auf das Lebhafteste an das häufige Vorkommen ähnlicher Formen in dem alpinen Nummulitenkalke und in sehr verschiedenen anderen Kalksteinbildungen erinnert wurde, sowie den Anregungen, welche die Besichtigung der reichen Schätze in der Sammlung der geologischen Reichsanstalt namentlich auch an den erwähnten alpinen Versteinerungen wach rief, verdankt diese Arbeit ihren Ursprung. Dank der freundlichen Unterstützung, welche mir durch die Mittheilungen sehr werthvollen Materials aus den Sammlungen der kais. geol. Reichsanstalt in Wien, des paläontologischen Museums in München, der ungarischen Reichsanstalt in Pest, sowie aus jener des Hrn. Prof. Dr. Pichler in Innsbruck zu Theil wurde und mit Hilfe eines beträchtlichen, von mir selbst gesammelten Vorrathes, ist es mir gelungen, einestheils den Nachweis einer so grossartigen Verbreitung von **Kalkalgen** in verschiedenen Formationen zu liefern, dass diesen, als gesteinbildenden Elementen aus dem organischen Reiche, unstreitig eine sehr hervorragende Stellung zuerkannt werden muss, anderentheils die bisher zweifelhafte Stellung der sog. *Nulliporen* verschiedener Alpenkalkgesteine unter den Formen riesiger Foraminiferen *(Dactylopora)* zu ermitteln. Ich zweifle nicht, dass, sobald die Forschung mit grösserem Interesse diesen bisher wegen ihrer unbestimmten Stellung und wegen ihrer wenig ansprechenden äusseren Form kaum beachteten, und in so manchen Sammlungen als „Unbestimmbares“ in die hintersten Winkel zurück-

geschobenen organischen Ueberresten ihre besondere Aufmerksamkeit zugewendet haben wird, diese Formgruppen den ihnen gebührenden Rang unter den Felsbildnern sich erobern werden.

Allgemeiner Theil. Seit Linné fasste man unter der Bezeichnung *„Millepora"* kolben-, walzen- oder krustenförmige, oft büschelig verästelte Organismen der niedersten Art (Steinpolypen, *Madreporen)* zusammen, welche, charakterisirt durch die Kleinheit der in einer schwammartigen Grundmasse eingesenkten Poren oder Polypenzellen, ihre Stellung unter den Formen der vielumfassenden Polypen erhielten. Gar manches Derartigen, dessen organische Natur man zwar erkannt zu haben glaubte, über dessen innere Struktur aber nähere Aufschlüsse schwierig zu erlangen waren, entledigte man sich, indem es einstweilen unter den *Milleporen* untergebracht wurde. So fanden sich hier eine Anzahl höchst heterogener Naturkörper zusammen, welche eine gründliche Sichtung um so dringender nöthig hatten, als nicht bloss Polypen und Bryozoen, sondern auch Pflanzen, ja sogar selbst unorganische Concretionen unter dem Schutze einer unbestimmten Bezeichnung vereinigt wurden. Bemerkt denn doch schon Esper 1791 bei *Millepora polymorpha* var. *globosa* (Pflanzenthiere. I. Th. T. XIII. S. 212), dass es strittig sei, ob solche Körper zu den Korallen gehören, da man keine Poren wahrnehmen könne; sie gleichen vielmehr den „Topfen", worunter er wohl die Kalktuffbildungen verstand.

Bestimmter unterschied zuerst Lamarck 1801 eine Gruppe steinartiger Kalkpolypen unter dem Namen *„Nullipora"* (Syst. d. Anim. d. verteb. p. 374), und bezeichnet als solche Formen mit massigem Stamm und bündel- oder zweigartigen Aesten ohne sichtbare Poren: *Nullipora byssoides, N. calcarca.* In der zweiten Auflage der Naturgeschichte der wirbellosen Thiere (hist. nat. d. a. s. vert., besorgt von Deshayes und Milne Edwards) erscheinen die *Nulliporen* wieder nur als eine Unterabtheilung der *Milleporen* (tom. II p. 311; 1836). Hier werden neben den Arten der Jetztzeit bereits *Millepora palmata* Goldf. und *M. racemosa* Goldf. von Mastricht als Versteinerungen verzeichnet und zum Zeichen einer nächsten Verwandtschaft die *Cerioporen* und *Pustuloporen* als völlig erloschene Geschlechter ihnen angefügt. Auch Goldfuss, v. Münster, Michelin, Römer, Reuss, d'Orbigny, Bronn u. A. bezeichnen eine Reihe

von Versteinerungen als *Nulliporen*, ohne dass man jedoch über die Natur dieser Körper, noch viel weniger, als bei den lebenden Formen, genügenden Aufschluss sich verschafft hatte, so dass Link und Blainville im Allgemeinen noch die *Nulliporen* für blosse Kalkconcretionen erklären konnten. Selbst Ehrenberg (Ü. d. Bild. d. Corall. im roth. Meer, 1834) ist nicht sicher über die Natur der *Nulliporen;* er setzt sie zu seiner *Pocillopora* (S. 129) und führt als *P. polymorpha* die *Nullipora polymorpha* Lin. spec. auf. Dann fügt er hinzu: „Plantas esse ea, quod Rappius, non censeo". „An Nulliporis genericus character in eo est, quod animalcula singula non tubulas scalariformes semsim excernunt, ut Milleporae et Pocilloporae, sed capuliformia manent, Flustra instar?"

Philippi war es vorbehalten 1837 (Wiegmann's Arch. f. Naturg. III. Jahrg. 1837. S. 387) an lebenden sog. *Nulliporen* mittelst genauer mikroscopischer Untersuchungen unzweifelhaft festzustellen, dass 9 Arten der sog. *Nulliporen* der Jetztzeit zu den Pflanzen zu zählen seien und zwar dicht neben die Kalkalgengattung *Corallina* gestellt werden müssen. Dieser Nachweis Philippi's wurde von dem grossen Algenkenner Kützing (Ü. d. Polypieres calcifères des Lamouraux. 1841, und Phycologia gener. 1843) vollständig bestätigt, von Decaisne (Ann. d. sc. nat. 2. ser. t. XVIII p. 127) gleichfalls anerkannt und neuerlich von Rosanoff (Mem. d. l. soc. imp. d. sc. nat. d. Cherbourg. t. XII. 1866. p. 5) in einer ausführlichen Monographie der Gruppe der *Melobesieen* erschöpfend klargestellt.

Für die versteinerten sog. *Nulliporen*, deren Untersuchung durch das eingedrungene Gesteinsmaterial äusserst schwierig ist, war die Zugehörigkeit zum organischen Reiche noch längere Zeit zweifelhaft geblieben, obwohl bereits eine ziemlich ansehnliche Zahl von *Nulliporen* unter den Versteinerungen aufgeführt wurden. In keiner Gesteinslage scheinen solche *Nulliporen*-artige Versteinerungen allgemeiner verbreitet und besser erhalten vorzukommen, als in dem sog. Leithakalke des Wiener-Beckens. Diese waren es daher auch vorzüglich, an welchen sich die wissenschaftlichen Untersuchungen der neuesten Zeit in dieser Richtung weiter entwickelten. Reuss beschrieb die eigenthümlichen Einschlüsse des Leithakalks zuerst unter der Bezeichnung *Nullipora ramosissima* als eine Milleporine des Thierreichs (Naturw. Abh. v. Haidinger

Bd. II. S. 29: T. III, F. 10. 11), während Desnoyer's (Ann. d. sc. nat. 1829. t. XVI. p. 423) schon früher solche Formen für pisolithische Gebilde angesprochen hatte und Haidinger selbst diese Körper des Leithakalks für ästige Sinterformen und Concretionen erklärte (ds. Bd. IV. S. 442) in Uebereinstimmung mit Pictet (T. el. d. pal. t. IV. 1846 p. 281), welcher sich derselben Ansicht zuzuneigen scheint.

Endlich gelang es Unger (Denksch. d. Ac. d. Wiss. in Wien, math. nat. Cl. Bd. XIV. S. 18 u. f.) 1858 durch mikroscopische Analyse die Uebereinstimmung der Organisation der *Leithanullipora* mit den in der Jetztzeit noch vorkommenden *Nulliporen* festzusetzen und denselben ihre Stellung unter den Kalkalgen bleibend anzuweisen. Mit dieser klassischen Arbeit Unger's war für die richtige Deutung ähnlicher versteinerter Formen Bahn gebrochen. Boué säumte nicht (Bull. d. l. soc. geol. d. France 2. Ser. t. XIV; 1857 p. 407) seine Zustimmung zu der Unger'schen Anschauung auszusprechen. Auch Schimper (Tract. d. Pal. veget. T. I. p. 180) bezieht sich zustimmend auf die Unger'sche Arbeit, und führt die Leithakalkspecies, welcher Unger den Reuss'schen Namen „*Nullipora ramosissima*" belassen hatte, als *Lithothamnium ramosissimum* (Rss) Ung. an. Zugleich aber behält dieser Botaniker die Bezeichnung *Nullipora* nach dem neulichen Vorgange Heer's für die sonst als *Fucoides* bezeichneten Algen des Jurakalks (Urwelt d. Schw. S. 140; T. IX) bei. Diess war ungefähr in Kürze der Standpunkt unserer Kenntnisse über die Natur der *Nulliporen* von der Art, wie sie im Leithakalke aufgehäuft sind, als ich meine Untersuchungen über derartige Naturkörper in Angriff nahm. Eine vorläufige Bemerkung über die ersten Ergebnisse meiner Beobachtungen gab ich in den Verhandlungen der k. geol. Reichsanstalt in Wien (1870. VII. S. 201). Durch diese ersten Untersuchungen, welche ich auf eine Reihe tertiärer *Nulliporen* ausdehnte, hatte ich die Ueberzeugung gewonnen, dass nicht bloss viele der als *Nullipora* beschriebenen Versteinerungen aus älteren Formationen, sondern auch manche solcher Formen, welche unter den Gattungen *Ceriopora, Pustulopora, Millepora, Heteropora, Cellepora, Diastopora,* ja sogar unter *Tethia, Achilleum, Chaetetes* u. A. untergebracht worden waren, aus dem Reiche der Thiere in jenes der Pflanzen versetzt werden müssten. Die grosse und wichtige Rolle, welche diese Arten von Kalkalgen in Bezug

auf ihre Betheiligung an der Entstehung gewisser Kalkfelsmassen gewinnen, leuchtet von selbst ein; die Untersuchung und sichere Bestimmung derselben in kalkigen Ablagerungen geben uns daher werthvolle Aufschlüsse über die Natur der Kalkfelsmassen, wie über die Verhältnisse, unter welchen sie entstanden sind.

Es giebt aber noch eine andere Gruppe von organischen Körpern, welche in gewissen Kalkmassen der Alpen in erstaunlicher Menge angehäuft sich finden und von Prof. Schafhäutl (N. J. f. M. G u. P. 1853. S. 299; T. VI, F. 1) zuerst unter der Bezeichnung *Nullipora* aus dem Zugspitzkalke der bayerischen Alpen beschrieben und in die Wissenschaft eingeführt wurden. Indessen fanden diese immerhin problematischen Naturkörper nicht die Beachtung, die sie verdienten, bis auf's Neue die Aufmerksamkeit auf die so grossartige Verbreitung dieser Versteinerungen und auf ihre geognostische Wichtigkeit als Leitpetrefakt durch den ganzen Zug der Kalkalpen hingelenkt wurde.

Zunächst erwähnte v. Schauroth (Sitz. d. Ac. d. Wiss. in Wien, m. n. Cl. Bd. XVII. S. 527; T. III; F. 4. 1855) eine unzweifelhaft derselben Formreihe, wie die *Zugspitznullipora*, angehörige Versteinerung aus dem südalpinen Muschelkalk unter der Bezeichnung des Anthozoen-Geschlechtes *Chaetetes* (?), um diese Form später (a. a. O. Bd. XXXIV. 1859. S. 285) speziell als *Chaetetes* (?) *triasinus* ausführlicher zu beschreiben. Ich selbst habe dann, gestützt auf die augenscheinliche Formähnlichkeit der v. Schauroth'schen *Chaetetes* (?) mit der Zugspitzversteinerung und auf das unzweideutige Vorkommen von grossen Poren an diesen sog. *Nulliporen* der Alpen, dieselbe (Geogr. Besch. d. bayer. Alpengeb. 1861 S. 241 und 255) unter der Bezeichnung *Chaetetes annulata* Schafh. spec. aufgeführt, freilich ohne die innere Struktur dieser organischen Körper näher geprüft zu haben. Dieser Missgriff dürfte bei dem damals zur Schilderung der geogn. Verhältnisse der bayerischen Alpen mir vorliegenden, überwältigend weitschichtigen Stoffe um so verzeihlicher erscheinen, als es mir in der That in jener Zeit an zureichend gutem Untersuchungsmateriale gebrach. Doch hatte ich bereits erkannt, dass die von Stoppani (Paleont. lomb. Petref. d'Esino p. 79 und 81, T. XVI; F. 1—12) sogar unter die Zweischaler versetzten, als *Gastrochoena obtusa* und *herculea* aufgeführten cylindrischen Körper nichts an-

deres, als unsere Zugspitzversteinerung oder eine ihrer nächsten Verwandten sei. Sehr wichtig war die weitere Entdeckung Eck's (D. geol. Z. Bd. XIV. 1862. S. 240 und 309; dann Ü. d. Form. d. b. S. u. Muschelkalks in Oberschlesien 1865. S. 86), dass auch ausserhalb der Alpen entschieden gleichgeartete Versteinerungen auftreten. Eck identificirte in der ersten Abhandlung (a. a. O. S. 240 u. 309) die Einschlüsse des Himmelwitzer-Dolomits, welcher dem unteren Muschelkalke angehört, geradezu mit der Zugspitzspecies und nannte sie demgemäss *Nullipora annulata* Schafh. Erst in dem zweiten ausführlicheren Aufsatze schlug derselbe vor, da die Form weder zu *Nullipora*, noch zu *Chaetetes*, am wenigsten zu *Gastrochaena* gehöre, so lange man über die zoologische Natur der Versteinerung in Zweifel sei, sich der neutralen Bezeichnung *Cylindrum* und für die spezielle Form: *Cylindrum annulatum* zu bedienen.

Inzwischen hatte auch Schafhäutl auf's Neue sich mit dem Gegenstande befasst, indem er in seiner Lethaea geogn. von Südbayern (1863. S. 324) für diese Formgruppe von Versteinerungen den Gattungsnamen *Diplopora* in Anwendung brachte und sie den Bryozoen zutheilte[1]). Er unterschied hier bereits mehrere Arten und erwähnt in einem späteren Aufsatze über den weissen Jura im Wettersteingebirge (N. J. 1865. S. 790) vorübergehend wieder der weitverbreiteten *Diplopora* als einer Bryozoe.

Auf Grund der Untersuchung an mir später zugekommenem Materiale habe ich 1866 zuerst der Vermuthung Ausdruck gegeben (N. J.

---

1) Der Verfasser der Leth. geogn. v. S. hat mir bei dieser Gelegenheit stark zugesetzt, weil ich die früher von ihm zu *Nullipora* gerechnete Versteinerung zu *Chaetetes* versetzt hätte. Es war ihm offenbar entgangen, dass v. Schauroth bereits vor mir über diesen Gegenstand geschrieben hatte. Es grenzt aber nahezu an's Komische, wenn der Entdecker der Zugspitzversteinerung sich über das Widersinnige und Leichtfertige meiner Zutheilung gar sehr ereifert und dasselbe durch Gegenüberstellung der Gattungscharaktere von *Chaetetes* und *Nullipora* recht grell beleuchten zu müssen glaubt und doch in demselben Athemzuge, fast auf derselben Seite sich gezwungen sieht, für seine frühere *Nullipora* nunmehr ein ganz neues Geschlecht aufzustellen, „weil der Name *Nullipora* schon früher für eine **ganz andere** Gattung von einer **anderen** Thierklasse gebraucht wurde" (N. Jahrb. 1867. S. 261). Ist denn die — allerdings nicht richtige — Zutheilung zu *Chaetetes* etwas Anderes, als eine Zutheilung zu einer ganz anderen Gattung von einer anderen Thierklasse und trifft nicht so die ganze Wucht des Vorwurfs auch den Verfasser selbst in gleicher Weise.

1866. S. 565), dass die Schafhäutl'sche *Nullipora* oder *Diplopora* in die Nachbarschaft von *Dactylopora* zu stellen sei. Zu derselben Annahme gelangte später auch Reuss, ohne meine Mittheilung zu kennen (Sitz. d. geol. Reichsanst. 1866. S. 201 und 1867. S. 3), unter Bezugnahme auf die unübertreffliche Darstellung der Organisation von *Dactylopora,* welche Carpenter (Introd. to th. Study of the Foraminifera 1862 S. 127, pl. X) gegeben hat. Als Gegenbemerkung zu der Reuss'schen Auffassung hat Schafhäutl sich noch einmal (N. J. 1867 S. 261) eingehend über die Natur dieser Versteinerungen ausgesprochen und namentlich gegen die Ansicht sich gewendet, dass der innere Cylindertheil hohl sei; in dieser Beziehung beharrt er bei seiner früheren Behauptung, dass derselbe mit schwammiger Masse ausgefüllt angenommen werden müsse; auch glaubt er, die Unterscheidung mehrerer Arten aufrecht erhalten zu können. Das Neueste endlich über diese vielbestrittene Versteinerung giebt Römer in seinem vortrefflichen Werke über Schlesien, in welchem er bezüglich der von Eck als *Cylindrum* bezeichneten Versteinerung aus dem schlesischen Muschelkalk an der Identificirung mit der alpinen Art, sowie an der Eck'schen Bezeichnungsweise festhält *(Cylindrum annulatum* Schafh. spec.) und demnach von der Uebereinstimmung mit der Gattung *Dactylopora* noch nicht überzeugt zu sein scheint. Er charakterisirt dieselbe als „cylindrische, an einem Ende offene, am andern Ende mit stumpfer Spitze geschlossene Röhre, welche in niedrige horizontale Ringe getheilt, durch paarweis gestellte, auf der Aussenfläche des Cylinders mündende Kanäle durchbohrt wird."

Aus diesen verschiedenen Untersuchungen und Schilderungen geht soviel mit Gewissheit hervor, dass unter der älteren Bezeichnungsweise *Nullipora* sehr mannichfaltig und abweichend organisirte Naturkörper verstanden worden sind, und dass diese in ihren Hauptformen, wie sie im Leithakalke des Wiener-Beckens und im Wettersteinkalke der Alpen auftauchen, theils als Angehörige des Pflanzen-, theils des Thierreiches sich zu erkennen geben.

Auf Grund dieser Theilung werde ich im Folgenden die Ergebnisse meiner Untersuchungen über die sog. *Nulliporen* in zwei Abtheilungen bringen, von welchen die erste den Formen aus dem Pflanzenreiche, die zweite den thierischen Ueberresten gewidmet sein soll. —

Erste Abtheilung.

Die sog. *Nulliporen* aus dem Pflanzenreiche *(Lithothamnium)*.

Allgemeine Orientirung. Wenn es an sich klar ist, dass Stämme oder Stöcke von Korallen- oder Bryozoen-artigen Thieren, wenn auch den niedrigsten Formen der Polypen angehörend, nicht porenlos sein können, und dass daher schon von vornherein eine Ausscheidung porenloser Kalkstämmchen aus dem Thierreiche sich als Nothwendigkeit herausstellt, so erhielt sich doch bei versteinerten Formen längere Zeit eine gewisse Unsicherheit, weil es bei den von Gesteinsmasse durchtränkten Stücken oft sehr schwierig, wenn nicht ganz unthunlich erscheint, das Vorhandensein oder Fehlen von Porenöffnungen nachzuweisen. Solche Mündungen können bei Versteinerungen leicht durch das Versteinerungsmaterial ausgefüllt und unkenntlich gemacht sein. Es ist daher leicht erklärlich, dass selbst bis in die neueste Zeit *Nulliporen* von entschieden pflanzlicher Natur unter den Thierversteinerungen fortgeführt wurden, um so mehr, als nicht selten kleine Höckerchen oder Wärzchen an der Oberfläche der mehr oder weniger Bryozoen-ähnlichen Kalkstämmchen als die Spuren von Porenmündungen oder deren wulstige Umrandung gedeutet werden können. Dieses Vorkommen von Höcker-artigen Erhöhungen auf der Oberfläche der Kalkalgen erschwert daher in hohem Grade das Erkennen und die Unterscheidung der versteinerten Formen von gewissen äusserlich ähnlichen Bryozoen nach bloss äusserem Ansehen ohne Untersuchung der inneren Struktur in Dünnschliffen unter Zuhilfenahme des Mikroscops. Es ist daher für eine genaue Feststellung der Natur derartiger organischer Körper unumgänglich erforderlich, wie bei dem Studium der inneren Struktur der lebenden, auch bei den versteinerten Arten Durchschnitte in Form von Dünnschliffen herzustellen und dieselbe einer mikroscopischen Prüfung zu unterwerfen.

Um nun für die Untersuchung der versteinerten Formen eine sichere Vergleichsgrundlage zu gewinnen, scheint es zweckmässig, an gewisse Eigenthümlichkeiten, welche sich in dem Charakter und den inneren Strukturverhältnissen der lebenden Arten wahrnehmen lassen,

vorerst zu erinnern, um daran sodann die Beobachtungen über die Natur der in Kalkgestein eingeschlossenen sog. versteinerten Ueberreste anzuschliessen. Im Allgemeinen ist auf die vortreffliche Darstellung Unger's (a. a. O. S. 20—22) und die ausführliche Arbeit Rosanoff's (a. a. O. p. 8—52 und p. 96 u. folg.) hinzuweisen, welche eine vollständige Orientirung gestatten.

Organisation. Die Gruppe der Kalk-absondernden Algen (Kalkalgen), welche für den vorliegenden Zweck uns hier zunächst interessiren, bilden unter den *Florideen* die Familie der *Melobesiaceen*, unter welchen die Gattung *Lithothamnium* die mit den zahlreichen versteinerten Formen nächste Verwandtschaft besitzt. Der Thallus dieser Algen besteht aus sehr zahlreichen, dünnen Gliederzellen, welche durch Verlängerung an der Spitze und Quertheilung der Scheitelzelle in die Länge wachsen, während durch Zellentheilung oder Gabelung die Pflanze an Breite zunimmt. Durch diese Art des Wachsthums bilden sich, wenn der Längenwachsthum weit vorwaltet, länglich runde, mehr oder weniger walzenförmige, oben zulaufend abgerundete Stämmchen mit mannichfacher Verästelung, oder wenn die Zellengabelung häufig stattfindet und eine Breitenausdehnung vorwiegt, rundliche, lappenförmige oder krustenartige Formen. In Folge des periodenweis fortschreitenden Wachsthums nach Oben und Aussen zeigen sich im Längendurchschnitt schichtenweis übereinander stehende, oft durch wechselnde Farbenunterschiede deutlich sich abgrenzende, bogenförmige, mehr oder weniger regelmässig concentrische Streifchen, deren Bogenscheitel nach Oben etwa in der Mitte eines Aestchens liegt, während die Bogenenden beiderseits nach Abwärts sich senken. Diese Struktur zeigt sich gleichmässig durch den ganzen Ast- und Stammtheil, ohne dass ein innerer heterogener Kerntheil oder ein früher hohler Raum sich zu erkennen giebt. Es sind daher diese bogenförmigen Linien, die man auf angeschliffenen Längsflächen oft schon mit unbewaffnetem Auge, jedenfalls mit Hilfe einer Loupe erkennen kann (T. I F. 1[a] und F. 2[a] und 2[c]), und die gleichförmige Struktur im Innern der Aeste sehr charakteristische Kennzeichen, welche, abgesehen von dem Nachweis des Mangels von Porenmündungen, in den meisten Fällen genügen, eine Verwechselung dieser Arten der Kalkalgen mit gewissen äusserlich nicht unterscheidbaren Bryozoen sicherzuverhüten.

Die Gliederzellen besitzen, der Länge nach betrachtet, eine tonnenförmige Gestalt und sind meist durch sehr mächtige Lagen von Verdickungsmassen verhältnissmässig weit von einander getrennt (T. I F. a u. c). Diese dicke, schichtenweise geordnete Zwischenmasse scheint durch eine Metamorphose der Zellhaut zu einer schleimigen Substanz (sog. Verschleimung) in öfterer Wiederholung gebildet worden zu sein. Sie wird nach der Entkalkung der Pflanzen durch Säuren sehr durchsichtig (T. I Fig. b u. d), weich, ohne in Wasser sich aufzulösen und den Zusammenhalt zu verlieren, gestattet jedoch durch leisen Druck die inneren, stark lichtbrechenden, tonnenförmigen, sehr resistenten Zellhäute der Gliederzellen zu isoliren (T. I Fig. e), wobei ihre Substanz sich zerbröckelt oder zertheilt und die nunmehr freiliegenden Gliederzellen durch Querröhrchen, welche als Ausstülpungen der Zellenhaut zu betrachten sind, unter sich verbunden erscheinen (S. T. I F. d. u. e).

Zu dem Zellstoff der Gliederzellen und der schleimigen Zwischensubstanz tritt nun noch, das steinartige und starre Wesen der Pflanze bewirkend, eine grosse Menge von kohlensaurer Kalkerde (Kalk) hinzu. Dieser Kalk wird von der lebenden Alge während ihres Wachsthums in den ihren Körper bildenden organischen Massen als wesentlicher Theil dieses Körpers abgesetzt und zwar weder in Kryställchen, noch in krystallinischen Körnchen, sondern im amorphen Zustande zwischen den kleinsten Theilchen der schleimigen Zellenverdickung wahrscheinlich in gleichem Verhältnisse, in welchem die Umbildung der Zellhaut vor sich geht, vielleicht in einer Art Verbindung mit der veränderten Zellsubstanz ausgeschieden, ohne eine Kruste auf der inneren Oberfläche der Zellmembran zu bilden. Man erkennt nämlich in Dünnschliffen der noch nicht entkalkten Pflanze mittelst grossen Vergrösserungen nirgendwo ausgeschiedene Kalktheilchen, welche sich als Kryställchen oder krystallinische Theilchen deuten liessen; vielmehr stellt sich der Zwischenraum zwischen den einzelnen Gliederzellen als gleichmässig opak dem Auge dar. Auch vermochte ich bei solchen Schliffen keinen Ring innerhalb der innerrn Zellenöffnung wahrnehmen, der als eine Kalkinkrustation angesehen werden könnte und demgemäss bei der Einwirkung einer Säure hätte verschwinden müssen. Nimmt man in solchen Dünnschliffen

den Kalk durch Säuren weg, dann erscheint hauptsächlich der vorher nur durchscheinende Zellenzwischenraum nunmehr fast wasserhell.

Um mich, wenn thunlich, von der Form zu überzeugen, in welche der Kalk in dem Pflanzenkörper ausgeschieden sei, habe ich einen guten horizontal gelegten Dünnschliff sorgfältig so lange auf einem Glasplättchen geglüht, bis alle organische Substanz, welche im ersten Stadium der Erhitzung sich in Kohle verwandelt, und die ganze Masse schwärzlich gefärbt hätte, völlig verbrannt und der Rückstand ganz rein weiss erschien. Nach längerem Verweilen in einem an Kohlensäure reichen Raum war die durch das Erhitzen haustisch gewordene Kalkerde wieder in kohlensaure Kalkerde übergeführt worden und zeigte nun unter dem Mikroscop fast ganz genau das Bild der Substanz wie vor dem Glühen, nur dass die Zellöffnungen jetzt ganz frei erschienen und der Kalk in dem Zwischenraume, diesen gleichmässig o h n e Lücken oder Poren ausfüllend, ganz undurchsichtig geworden war. Man darf hierbei freilich nicht übersehen, dass durch diesen Process, durch welchen zuerst der Kalk kaustisch gebrannt und dann wieder in den kohlensauren Zustand zurück versetzt wurde, in dem Kalke vielleicht Formveränderungen hervorgerufen wurden, welche das ursprüngliche Bild verwischen und trüben können. In jedem Falle jedoch scheint dieser Versuch so viel zu beweisen, dass der Kalk in der Zwischenzellenmasse gleichmässig vertheilt abgelagert sei [1]). Aber auch nach anderer Richtung ist das auf solche Weise erhaltene Kalkskelett sehr lehrreich. Denken wir uns nämlich bei solchen geglühten Präparaten die entstandenen Zellenhöhlungen mit einer Substanz, wie sie den Kalkstein darzustellen pflegt, wieder erfüllt, so erhalten wir ein Bild, welches die grösste Aehnlichkeit mit den versteinerten Formen besitzt, wenn wir annehmen, dass bei letzteren an die Stelle der organischen Substanz wenigstens grösstentheils Kalk eingetreten ist.

So lange der Kalk nicht aus der Pflanze entfernt ist, hält es schwer, sich über die Natur und die innere Organisation des Algenkörpers eine klare Vorstellung zu verschaffen, weil die Kalkmoleküle die Reaktions-

---

1) Vergl. Rosanoff (a. a. O. p. 9 u. 10), wo z. Th. eine abweichende Ansicht ausgesprochen wird.

erscheinungen verhüllen. Nimmt man dagegen in Dünnschliffen, welche der Länge und Quere der Kalkalgenstämmchen nach genommen und bis zur erforderlichen Durchsichtigkeit hergestellt sind, erst nachträglich durch ganz verdünnte Salzsäure oder Essigsäure den Kälk weg (T. I Fig. d), so erhält man die pflanzliche Substanz noch vollständig zusammenhängend und in ganz durchsichtigen Massen, welche zu weiteren chemischen Versuchen sich vorzüglich geeignet erweisen.

Chemische Beschaffenheit. Die auf solche Weise entkalkten Präparate von Arten, wie sie jetzt noch am Ufer des Meeres wachsen und wie sie von Kützing unter der Bezeichnung *Spongites nodosa* und *stalactitica* aufgeführt werden, oder wie ich sie unter dem Namen *Melobesia lichenoides* aus den Herbarien erhielt, zeigten übereinstimmend bei der Einwirkung von Jodlösung und Schwefelsäure eine deutliche blaue, öfters auch in's Violette spielende Färbung der Zwischenzellenmasse, während die innersten Zellenwände eine ins Blaue, Violette und Braune spielende, sehr intensive Farbe annahmen. Dieses Rothbraun rührt sehr wahrscheinlich von einer Vermischung oder Ueberdeckung der blauen und violetten Farbe des Zellstoffs mit dem Gelbbraun, welches das der Zellwand anliegende Protoplasma in Folge der Einwirkung der genannten Reagentien annimmt. Durch Einwirkung stärkerer Säuren erhält man auf die eben bezeichnete Weise statt blaue mehr violette Färbungen. Auch scheint ein Unterschied im Verhalten gegen die Reagentien durch die verschiedenen Alterszustände der untersuchten Algentheile bedingt zu sein.

Bei den Formen aus Tertiärschichten, die dem äusseren Ansehen nach kaum wesentlich von lebenden Exemplaren verschieden aussehen, blieben nach Entfernung des Kalks mittelst schwachen Säuren nur sehr wenig körnig häutige Flocken ungelöst im Rückstande, bei welchen ich jedoch vergebens die organische Struktur der Algenkörper wieder zu finden gehofft hatte. Bei diesem Versuche wurden sowohl Exemplare aus dem Leithakalk, als wie solche aus den Pliocänschichten des Mont Mario, die besonders gut erhalten waren, verwendet. Es ist durch denselben festgestellt, dass durch den Versteinerungsprocess die pflanzlichen Bestandtheile zerstört und durch Kalk ersetzt werden, ohne zu verkohlen, weil in den Dünnschliffen die organische Struktur vollständig klar er-

halten sich durch die verschiedene Beschaffenheit oder Färbung des Kalks leicht noch erkennen lässt, nicht aber die Pflanzenmasse selbst. Wir sehen an den Dünnschliffpräparaten nicht mehr die ursprünglichen Pflanzenzellen als solche, sondern nur ihre frühere Form, die sich in der Anordnung der an ihre Stelle getretenen Kalktheilchen erhalten hat. Es schien nicht ohne Interesse zu erfahren, wie viel Kalk die lebenden Kalkalgen aus der Gruppe der *Melobesiaceen* enthalten. Ich wählte zu einer Analyse besonders reine und ausgesuchte Theile von *Lithothamnium nodosum* Kütz spec. (*Cellepora spongites* L.?) und fand die bei 100° C. getrockneter Substanz zusammengesetzt im Mittel mehrerer Analysen aus:

Kalkerde	47,14
Bittererde	2,66
Thonerde, Eisen- und Manganoxyd .	2,55
Phosphorsäure	0,06
Kohlensäure	40,06
In Säuren Unlösliches	4,96
Wasser und Verlust	2,57
	100,00

Die Kalkerde ist grösstentheils als kohlensaure vorhanden und nur ein kleinster Theil wird an Phosphorsäure gebunden sein. Sehr bemerkenswerth ist der relativ hohe Gehalt an Bittererde, die man auch an Kohlensäure gebunden annehmen darf. Wir erkennen also auch in dem Bittererdegehalt den lebenden Kalkalgen, wie bei dem Tiefenschlamm, eine neue Quelle, welche bei der Entstehung dolomitischer Gesteine mitwirken kann. Schon Damour (Ann. d. chim. et de phys. 3. ser. t. XXXII) macht auf den hohen Gehalt gewisser Arten von *Milleporen* (worunter eben *Nulliporen* mit einbegriffen sind) an kohlensaurer Bittererde von 8 bis 17 Procent und auf diese wichtige Rolle aufmerksam, welche dadurch die Kalkalgen in Bezug auf die Ausscheidung von bittererdehaltigem Kalke spielen. Es darf hier auch an die Beobachtung Ludwig's und Theobald's (Pogg. Ann. 87 S. 91) erinnert werden, nach welcher die unter der Vermittlung von Algen (*Vaucherien, Protococcen Leptotrix* u. s. w.) in den Soolleitungen von Nauheim sich absetzenden Kalkkrusten reichlich Bittererde enthalten. Auf durchschnittlich 84,8 CaO CO^2 kommt in diesen 7,8 kohlensaure Bittererde,

also ein nahezu gleiches Verhältniss, wie bei den oben genannten Meeresalgen. Dabei wird die Ansicht ausgesprochen, dass durch die Algen die kohlensaure Bittererde wohl aus dem Chlormagnesium des Soolwassers hergestellt werde.

Der in schwachen Säuren ungelöst bleibende Rückstand unserer Kalkalge wurde bei 100° C. getrocknet und gewogen. Dieser Rückstand hinterlässt nach dem Glühen etwas mehr als die Hälfte des ursprünglichen Gewichts an röthlicher Asche, welche Eisen, Mangan, Thon und sonstige zufällige Verunreinigungen enthält. Der Glühverlust, der sich auf etwa 2% der Algensubstanz beschränkt, würde demnach — ungefähr — der Menge der wirklich organischen Bestandtheile des Algenkörpers entsprechen. Die Menge an Kalk gegenüber diesem Minimum von eigentlicher Pflanzensubstanz (Zellstoff, verschleimte Zwischenzellsubstanz, Protoplasma etc.) in diesen Kalkalgen ist geradezu eine erstaunliche. Aehnlich mag das Verhältniss wohl auch bei manchen Bryozoen und Korallen sein. Man begreift daher die grosse Bedeutung, welche diese Pflanzen- und Thierarten als Kalksammler für die Entstehung der Kalkfelsmassen gewinnen. Manche mächtige Kalklagen sind wesentlich bloss durch Anhäufung solcher Reste entstanden, indem es nur eines geringen Zuschusses an Kalkmasse bedurfte, um dieses Haufwerk in ein derbes Kalkgestein zu verwandeln.

Es ist mehr als wahrscheinlich, dass diese Arten von Kalk-abscheidenden Meeralgen die Fähigkeit besitzen, die kohlensaure Kalkerde aus der im Meerwasser zu 0,14—0,18% aufgelösten schwefelsauren Kalkerde zu erzeugen, wie sie auch die kohlensaure Bittererde aus dem schwefelsauren Salz oder aus Chlormagnesium herzustellen im Stande sind. Wir lernen damit eine Reihe sehr häufig vorkommender Meerespflanzen kennen, durch welche ein Umsatz von schwefelsauren Kalksalzen in kohlensaure, und deren Abscheidung aus dem Meereswasser, wie es wohl auch durch die *Coccolithen* stattfindet, bewirkt wird. Das ist für die Erklärung der Entstehung der Kalkfelsmassen von grösster Wichtigkeit.

Die versteinerten Exemplare, namentlich anscheinend sehr reine, wenig veränderte Stücke vom Mt. Mario weisen mit Ausnahme geringer Menge Verunreinigungen, welche die Pflanze bei ihrem fortschreitenden Wachsen mechanisch einzuschliessen scheint, eine fast bloss aus Kalk

bestehende Zusammensetzung auf, so dass das Wenige an organischen Bestandtheilen durch den Versteinerungsprocess noch vollends durch Kalk ersetzt scheint.

Vorkommen und Verbreitung. Bei der nicht unwichtigen Betheiligung, welche diese Kalkalgen an der Zusammensetzung gewisser Kalkgebilde nehmen, ist es wichtig, einen Blick auf die natürlichen Verhältnisse zu werfen, unter welchen die unsern versteinerten Formen am ähnlichsten sich erweisenden Kalkalgen der Jetztzeit im Meere wachsen und sich verbreitet zeigen, um daraus die Analogien erkennen zu können, welche bei der Entstehung solcher Kalkalgen enthaltenden Kalkgebilde gleichfalls wirksam waren.

Leider finden sich über das Wachsthum-Verhältniss dieser Kalkalgen nur spärliche Angaben. So viel wir wissen, beschränkt sich ihr Vorkommen auf seichte Ufer gemässigter und nördlicher Meere, wo sie in Gesellschaft von *Fucus vesiculosus, Sargassum* etc. stellenweise so üppig wuchern, dass der Boden der Meeresränder bei Ebbe durch die ungeheure Menge der Exemplare wie überschüttet erscheint. Die dünnen, krustenartigen *Melobesien* bedecken hier nicht nur die losen Steine und Felsen, sowie abgestorbene Muschelschalen, sondern überziehen auch die verschiedensten Arten von lederartigen Algen, selbst von höheren, im Meere wachsenden Gefässpflanzen, während die knollenförmigen *Lithothamnien* in oft zierlichen Büscheln dem Meeresgrund aufgewachsen sind. Wenn daher so leicht zerbrechliche, feinzerschlitzte Pflanzenbüschel, wie sich solche nicht selten in grossen zusammenhängenden Stücken in Leithakalk vorfinden, völlig wohlerhalten und unabgerollt oder unzerstückelt in Ablagerungen aus der lockeren Gesteinsmasse herausnehmen lassen, so darf man wohl mit ziemlicher Sicherheit auf eine Art der Gesteinsbildung schliessen, welche in einer seichten, ruhigen Meeresbucht erfolgt ist. In ähnlichem Sinne nennt Unger die Steinalgen geradezu die Riffbilder der gemässigten Zonen (a. a. O. S. 35).

Die Untersuchungen, welche Unger an den Kalkalgen des Leithakalks angestellt hat, ergaben: „dass schon die äussere Gestalt eine grosse Uebereinstimmung mit gewissen *Lithothamnien*-Arten (L. byssoides Phil.) besitzt. Noch mehr stellte sich diese bei Vergleichung des Längen-

schnittes der Aeste und ebenso bei Vergleichung der Oberfläche heraus. Man sieht auf diesem dem Ast parallelen Schnitte eine wundervolle, regelmässige Anordnung der Gliederröhren, deren einzelne Glieder sich hier zu wirklich gesonderten und auch reihenförmig an einander hängenden Fäden gebildet haben. Es stellt sich somit zweifellos heraus, dass die *Nullipora ramossissima* Reuss weder ein thierischer Organismus noch eine Stalaktitbildung, sondern eine Pflanze ist, deren nächste Verwandte die früher als *Millepora* und *Nullipora* beschriebenen *Lithothamnium*- und *Lithophyllum*-Arten sind" (a. a. O. S. 23). „Man mag was immer für einen Kalk der Leithaformation untersuchen, so wird er unter mannichfaltigen Abänderungen der Dichte, Festigkeit und Struktur doch immer dadurch ausgezeichnet sein, dass ihn entweder die *Nullipora* ganz zusammensetzt (Nulliporenkalk), oder doch einen mehr oder weniger bedeutenden Antheil daran nimmt. Ich (Unger) habe noch keinen derartigen Kalk zu sehen Gelegenheit gehabt, der weniger als zwei Drittel Nulliporen meist in Trümmern enthält. Der feste Kalk des Wildoner Berges mag als ein Beispiel dienen. Es geht daraus hervor, dass an der Bildung des Leithakalks die Vegetation der *Nulliporen* jedenfalls einen wesentlicheu Antheil genommen hat" (a. a. O. S. 24).

Diese Bemerkungen Unger's über die Kalkalgen des Leithakalks können nach meinen weitergehenden Beobachtungen auf eine Reihe von Kalkbildungen ausgedehnt werden, welche, wie der sog. Granitmarmor von Neubeuern, oder wie viele der alttertiären Kalke Norditaliens, des Pisolithkalkes von Paris gleichfalls als ein Haufwerk von Kalkalgen anzusehen sind. Aehnliche Kalkalgen entdeckte ich in mehreren der jüngeren Tertiärablagerungen von kalkiger Natur, sowohl in dem mitteloligocänen Schichten des Thalberggrabens in den Voralpen bei Traunstein, als in den Pliocängebilden des Mt. Mario. Sie reichen hier, indem sie in den diluvialen Muschelbänken unzweifelhaft fortsetzen, den Gebilden der Jetztzeit die Hand, welche von den Wellen losgelöst und an den Strand gespült sich mit Muschelschalen und sonstigem Meeresauswurfe stellenweis zu festem Gestein vereinigen.

Aber nicht bloss in der Richtung nach der jüngeren und neueren Zeit der Erdentwicklung hin lassen sich die unzweideutigen Spuren der Kalkalgen verfolgen, ihre Ueberreste zeigen sich auch über die Tertiär-

zeit hinaus in den älteren Perioden noch in ansehnlicher Menge. Namentlich ist es die Procän- oder Kreideformation, welche in ihren Kalkbildungen vielfach Reste von Kalkalgen in sich schliesst, und der schon genannte Pisolithkalk von Paris aus den obersten Lagen dieser Formation besteht sogar in manchen Lagen zu $^{8}/_{10}$ aus überrindeten Kalkalgenbruchstücken. Weniger häufig sind ähnliche organische Körper in den älteren Formationen wahrzunehmen; doch reichen sie sicher bis in die durch ihre reichen Schwammeinschlüsse ausgezeichnete Faciesbildung der älteren Juraablagerung (Stufe des *Ammonites bimammatus*). Obwohl es theoretisch kaum zweifelhaft ist, dass auch bei den noch älteren, und selbst bei den ältesten Kalkbildungen ähnliche Kalk-ausscheidende pflanzliche Organismen betheiligt gewesen sein mögen, so häufen sich doch die Schwierigkeiten des sicheren Nachweises ihres Vorkommens in den meist stark veränderten älteren Gesteinen so sehr, dass diess wohl als Grund einer bisher noch mangelnden Kenntniss solcher Ueberreste in den älteren Kalkablagerungen angesehen werden muss. In vielen Fällen ist es nämlich sehr schwierig, selbst in wohlgelungenen Dünnschliffen von Längsschnitten mit voller Sicherheit die organische Struktur, welche durch das Krystallinischwerden des Kalkes verwischt wurde, nachzuweisen oder auch von versteinerten Einschlüssen mancher Bryozoen in ihrem Durchschnitte zu unterscheiden. Im Allgemeinen zeichnet sich zwar die Zellenbildung der versteinerten *Celleporen, Milleporen* etc., bei welchen, wie wir wissen, so vielfache Verwechselungen mit unseren Kalkalgen vorgekommen sind, in den Längsschnitten betrachtet, durch sehr bedeutend grössere Dimensionen der Zellen-artigen Räume, die sich im Längsschnitte meist als Rechtecke darstellen, ferner dadurch aus, dass die Zellen nie genau in einer vertikalen Reihe über einander stehen, sondern stets in schiefen Reihen versetzt sich an einander schliesen.

Bei den Bryozoen mit rundlichen Stämmchen biegen sich überdiess die peripherischen Zellen sehr stark bogenförmig nach Aussen, während die centralen Zellen mehr gerade aufwärts steigen, so dass sie dadurch in Dünnschliffen leichte Unterscheidungsmerkmale liefern. Bei rasenförmiger Ausbreitung sind indess Formen denkbar, bei welchen die Biegungen der Zellen sich nicht stärker bemerkbar machen, als es

auch bei den Zellen der Kalkalgen vorkommt. Die relative Grösse der Zellendurchschnitte ist immerhin nur ein wenig sicheres Kennzeichen und so ist in der That der Fall denkbar, dass bei dicht im Gestein eingeschlossenen Versteinerungen, welche nur im Längs- und Querschnitte sichtbar zu machen sind, es unentschieden bleiben muss, ob sie dem einen oder anderen Reiche zuzutheilen sind, obwohl, soweit meine Erfahrungen reichen, mir ein solches Verhältniss noch nicht vorgekommen ist.

Dagegen unterliegt es keiner Schwierigkeit, bei allen jenen Versteinerungen, welche mässig gut erhalten sind, ins Klare zu kommen. Hier tritt sehr häufig noch die charakteristische Beschaffenheit der Bryozoenzellwandungen für das Auge erkennbar hervor, und bei Exemplaren, die sich frei aus dem umschliessenden Gestein herauslösen lassen und eine nicht abgeriebene oder inkrustirte Oberfläche aufzuweisen haben, bieten die Zellenöffnungen, wie schon bemerkt, Hilfsmittel sicherer Unterscheidung von Algen, die solche Mündungen nicht besitzen. Jedoch muss man sich, wie schon bemerkt wurde, hierbei vor Verwechslungen der auch bei Algen nicht ungewöhnlichen Höckerchen oder Punktirungen mit Zellöffnungen hüten.

Bei diesen unverkennbaren Schwierigkeiten der Bestimmung versteinerter Einschlüsse ist ein besonderes Gewicht auf eine Erscheinung zu legen, welche den Kalkalgen ausschliesslich eigenthümlich ist. Es sind diess die halbmondförmigen, bei versteinerten Exemplaren meist mit hellem Kalkspath ausgefüllten und dadurch leicht bemerkbaren Räume an der Stelle der früheren Cystocarpien (T. I, F. 2^e x). Sie liegen meist ziemlich zahlreich neben einander nicht weit entfernt von der Oberfläche in dem Algenkörper versenkt und sind so häufig vorhanden, dass ein nur mässig grosser Längsschnitt in der Regel einen oder den andern solcher Cystocarpien trifft und durchschneidet. Ihr Erscheinen darf als ganz zuverlässiges Zeichen der pflanzlichen Natur angesehen werden.

Nicht weniger Schwierigkeiten stellen sich uns in der Unterscheidung einzelner Arten der Kalkalpen aus der Formgruppe der *Lithothamnien*, mit welchen wir uns hier beschäftigen, entgegen. Gelingt es auch, wie bei dem Leithakalk, prächtige grosse Büschel der Algen in sehr gut erhaltenem

Zustande einzusammeln, so giebt es doch bei weitem eine grössere Anzahl nur dürftig erhaltener Stücke, welche unserer Beurtheilung allein zugänglich sind. Auch bieten sich in Grösse des Stamms und der Zweige, in Verästelung, in Oberflächenbeschaffenheit und sonst äusseren Merkmalen so grosse Verschiedenheiten innerhalb einer Art, dass sehr oft diese zur Feststellung des Spezies wenig dienen können. Einige wenige Arten sind zwar durch ihre eigenthümliche Oberflächenbeschaffenheit, andere durch sehr bezeichnende Ausbreitung des Thallus charakterisirt, aber bei weitem die wichtigsten und zahlreichsten Arten lassen sich kaum auf andere Weise, als nach Form und relativer Grösse der Zellen, wie sich solche erst in den Dünnschliffen wahrnehmen lassen, unterscheiden.

Solche Dünnschliffe für mikroscopische Untersuchungen, bei welchen sich eine 300—320malige Vergrösserung besonders empfiehlt, lassen sich leicht herstellen; sie sind für eine genaue Bestimmung der Arten unumgänglich nöthig. Wer daher ihre Herstellung und die Anwendung des Mikroscops scheut, wird auf die nähere Bestimmung dieser Art von organischen Einschlüssen Verzicht leisten müssen!

So gering demnach die zur Artenunterscheidung verwendbaren Merkmale sein mögen; so erweisen sie sich doch, wie mich zahlreich angestellte Versuche belehrt haben, als zureichend constant und sicher genug, um sie als Führer bei der Artenbestimmung der versteinerten Kalkalgen benützen zu können.

Wir wollen nun die bisher mir bekannt gewordenen einzelnen Orten näher zu beschreiben versuchen.

Genus: **Lithothamnium** Philippi 1837.

Millepora, Cellepora Linné.
Millepora Ellis et Sol; Pallas, Esper (1791), Lameraux (1821).
Nullipora Lamarck 1801 et auct. var. seq.
Millepora, Nullipora, Ceriopora, Cricopora, Pustulopora, Cellepora, Heteropora (Spec. fossil.) auctorum.
Melobesia Lamer.
Pocillopora Ehrenberg 1834.
Lithothamnium Phil. 1837.
Spongites Kützing 1841 und 1843.
Melobesia Decaisne 1842.
Lithothamnium Areschoug in Agar. spec. Alg.
Melobesia Harvey.
Lithothamnium Rosanoff. 1866.
Lithothamnium Schimper 1870.

Steinalgen aus der Gruppe der Florideen und aus der Familie der *Spongiteen* Kütz. (*Corallineen* auct.) mit dickem, nach Oben und Aussen rundlich gelapptem, oder zitzenförmig aufragendem, selten mit freien Enden vorstehend krustenartigem, vielfach verzweigtem, nicht abgegliedertem Kalkthallus und mit in dessen Masse eingesenkten Cystocarpien, bestehen aus gleichförmigen, durch eine breite, mit Kalk reichlich imprägnirte Verdickungszwischenschicht von einander getrennten, mikroscopisch kleinen Zellen von Form übereinander stehender Tonnen (T. I, F. d u. e). Diese Zellen wachsen in concentrisch über einander liegenden Schalen zonenartig nach Oben und Aussen, wodurch auf den Querschnitten der Stammtheile oder Aeste polsterartige Zeichnungen sichtbar werden. Die Oberfläche ist glatt, rauh oder mit Pusteln bedeckt, jedoch ohne Poren oder Zellenmündungen.

An versteinerten Exemplaren, bei welchen die organische Substanz verschwunden ist und die Höhlräume durch Kalksubstanz erfüllt sind, ist die tonnenförmige Gestalt der inneren Zellhaut nicht mehr zu erkennen und es zeigen sich im Querschnitte (im horizontalen Sinne) bei Dünnschliffen dicht an einander gereihte mehr oder weniger regelmässige 6—8eckige Zellendurchschnitte mit concentrisch geordneten, meist nach Innen rundlich werdenden, durch verschiedene schwache Farbenabstufungen hervortretenden Wänden oder Ringen, im Längsschnitte (im vertikalen Sinne) bei Dünnschliffen ununterbrochen an einander gereihte, ziemlich gleichartig gestaltete Zellendurchschnitte von rektangulärer, oder annähernd quadratischer Form, wobei der ursprüngliche Raum der Zwischenzellenmasse als dunkler gefärbter Rahmen einen lichteren centralen Kerntheil umschliesst; jedoch tritt auch der Fall ein, dass der den mittlern Hohlraum erfüllende Kalk eine gegen die Farbe der Zwischenlage dunklern Ton besitzt. Die von Mitte zu Mitte einer diese Zellen einschliessenden Wand gemessene Dimension in der Richtung des Längenwachsthums der ganzen Pflanze nennen wir die Länge der Einzelzelle, und die in den darauf senkrecht stehenden Richtung nach der Breite des Pflanzenkörpers die Breite der Einzelzelle. Auf diese Dimensionen der Einzelzellen muss ein Hauptgewicht bezüglich der Artenbestimmung von versteinerten Exemplaren gelegt werden, deren Umrisse man häufig nur in Fragmenten nothdürftig kennt, bei

denen man daher fast einzig und allein auf die Beurtheilung der Form und Grösse der Zellendurchschnitte angewiesen ist. Bei Angabe der Grössenverhältnisse wird im Folgenden der Mic. d. h. Micrometer, der tausendste Theil eines Millimeter's, so dass 1000 Mic. = 1 Mm. (Millimeter) ausmachen, in Anwendung gebracht.

Bis jetzt habe ich 12 Arten von *Lithothamnium* unter den Versteinerungen verschiedener Formationen aufgefunden und zwar 1 Art im Jurakalke, 3 Arten in der Mastrichter Kreide, eine Art im Pisolithkalke von Paris, zwei Arten in dem *Nummuliten*-führenden Tertiärgebirge, eine Art in den südalpinen Oligocänschichten, eine Art im Leithakalk, 3 Arten in den jüngeren Tertiärschichten von Astrupp, Castell Aquato und vom Mt. Mario. Es ist nicht zu zweifeln, dass es noch eine Menge von Arten in älteren und jüngeren Formationen giebt. Darauf deuten die so häufigen Hinweisungen auf das Vorkommen von „*Nulliporen*" (Milleporen etc.), denen wir bei geognostischen Schilderungen begegnen. Ich erinnere nur beispielsweise an die Beschreibung französischer Tertiärgebilde von Desnoyer (Ann. d. sc. nat. 1829 t. XVI. p. 209), an die verschiedenen Schilderungen Boué's (Bull. d. l. soc. geol. de. France. v. l.; esquis. gèol. d. l. turq. d'Europe etc.), an zahlreiche Abhandlungen in dem Jahrb. der geol. Reichsanstalt in Wien, an Karl Meyer's Angaben (tabl. d. terr. tertiaires 1868) u. s. w. Leider ist es mir nicht geglückt, von allen Fundorten Material zur Untersuchung zu erhalten, namentlich nicht aus den französischen Ablagerungen aus dem Crag, aus dem italienischen Nulliporenkalke Carl Meyer's. Ich würde auch jetzt noch jede weitere Zusendung im Interesse der Wissenschaft mit Dank zu verwerthen bestrebt sein.

Nachdem in dem Vorausgehenden die Hauptlinien gezogen sind, welche bei näherer Untersuchung der sog. *Nulliporen* in Betracht kommen, sollen nun in der nachfolgenden Darlegung die einzelnen bisher erkannten Arten näher geschildert werden.

1) **Lithothamnium ramosissimum** Reuss spec.

Nullipora ramosissima Reuss (Naturw. Abh. v. Haidinger Bd. II. 1848. S. 29 T. III; F. 10, 11).

Nullipora ramosissima Unger (Denksch. d. k. k. Ac. d. W. in Wien. B. XIV. 1858 S. 23, T. V. F. 18—22).

Nullipora ramosissima (Ung.) in Quenstedts Detref. II. Aufl. 1867. S. 777.
Lithothamnium ramosissimum (Reuss u. Ung.) in Schimper's T. elem. d. Pal. neget. T. I. p. 180.
Melobesia oder *Lithothamnium* Arten Gümbel (Sitz. d. k. k. geol. Reich 1870 S. 201).

Der in grossen Büscheln oder Rasen verwachsene Stock besteht aus sehr zahlreichen verzweigten oder aus einander hervorsprossenden Aesten von unregelmässig kurzen keulen-, knollen- oder warzenförmiger Umrissen mit abgerundeten Enden und glatter Oberfläche. Der Durchmesser der äusseren Aeste beträgt durchschnittlich ungefähr 2 mm.; während die inneren Stammtheile eine Dicke von 5 mm. erreichen. Oft sind die Aeste abgebrochen und einzeln zerstreut in dem Gestein eingeschlossen, so dass die zusammengehörigen Theile nicht mehr in ihrem natürlichen Verbande erhalten sind. Doch finden sich auch häufig ziemlich vollständig erhaltene, noch zusammenhängende Rasen von 60—80 mm. Durchmesser und 50—70 mm. Höhe (T. I F. 1[a]). Auf Bruchflächen erkennt man, dass die den Stock ausmachende Kalkmasse äusserst dicht ist und nur schwierig lassen sich die sehr feinen concentrischen Streifchen, seltener noch im Abbruch die schalenförmig über einander liegenden Zonen der Zellenreihen unterscheiden. Mit Hilfe einer Loupe kann man auch stellenweis die durch hellere oder dunkelere Ränder hervorstechenden, halbmondförmigen oder rundlichen, früheren Cystocarpien erkennen (T. I F. 1[d]).

In Dünnschliffen zeigt sich die Zellenstruktur in Längsschnitten (T. I F. 1[b]) in Form eines rektangulären Gitterwerks, indem das Innere der Zellen, von versteinerndem Kalke ausgefüllt, meist etwas lichter und durchscheinender, als die ursprünglich schon mit Kalk durchzogenen Zellenwandungen und zwischen den Zellen vorfindliche Verdickungsmasse sich darstellt. Die etwas dunkler gefärbten Querbalken des Gitterwerks verbinden sich zu etwas geschweiften, concentrisch über einander stehenden Zeichnungen, welche man schon mit einer guten Loupe bemerken kann (T. I F. 1[d]). Diese Bogenlinien entstehen in Folge des Wachsthums der Algen nach Oben und Aussen. Die Längsbänder treten dagegen weniger bemerkbar hervor. Im Querschnitte stellt sich die Ausfüllungsmasse im Innern der Zelle als rundliche Flecken dar, um welche concentrische, meist eckige Linien sich herumziehen als

Spuren der frühern fortschreitenden Zellenwandverdickung (T I F 1c). Die Grösse der Zellendurchschnitte, welche wir, weil sie nicht genau der wirklichen Grösse der Zellen während der Vegetation der Algen entspricht, die scheinbare nennen wollen, ist eine vergleichsweise zu der anderer Arten mittlere.

Scheinbare Grösse der Zellen in der Länge 20 Mic.; in der Breite 14—16 Mic.

Vorkommen: Diese Art ist weit verbreitet im sog. Leitha- oder Nulliporenkalk der österreichisch-ungarischen Tertiärablagerungen und scheint durch die ganze untere Donaugegend anzuhalten. Zunächst bei Wien sind es die grossen Bausteinbrüche von Wöllersdorf, deren Kalksteinlagen hauptsächlich daraus bestehen, so dass Wien eigentlich in Häusern aus Meeralgen wohnt, weil dieser Kalkstein fast ausschiesslich als Baumaterial in Wien verwendet wird. Die einzelnen Fundstellen in diesem Gebiete anzugeben ist völlig überflüssig; ausserdem ertheilt das vortreffliche Jahrbuch der geol. Reichsanstalt in Wien die genaueste Auskunft. Ostwärts dehnt sich der Nulliporenkalk über Bosnien bis in die Türkei aus (Süss, Sitz. d. k. Ak. d. W. in Wien Bd. LII. 1868. S. 43), fehlt dann aber über weite Strecken gegen das caspische Meer und den Aralsee, während gleichalterige Ablagerungen in Kleinasien, Hudh, bis in das armenische Hochland und fort durch die Euphratländer bis zum persichen Meerbusen sich südwärts wenden. *Nulliporen* sind mir jedoch aus diesen östlichen Verbreitungsgebieten keine zu Handen gekommen. Ob die Fundstellen in der Superga, bei Novi und Modena hierher gehören, konnte ich nicht ermitteln, da ich von K. Meyer Originalproben seines Nulliporenkalks vergebens erbeten habe.

Geognostische Lage: Diese Art scheint sich ausschliesslich auf die neogenen Schichten des mittelländischen Tertiärgebiets und zwar auf diejenigen Theile zu beschränken, welche als Ränder der ehemaligen Wasserüberdeckung einer geringen Tiefe des Meeres entsprechen. Nur an seichten Meeresrändern konnten die Kalkalpen in solch' üppiger Entwicklung gedeihen und sich erhalten, wie sie sich im Leithkalke wieder finden. Verschwemmt konnten sie begreiflicher Weise von diesen Rändern weiter geführt werden. Diese Bildungen mit wohlerhaltenen Büscheln

von *Nulliporen* entsprechen dem sog. Leithakalk und Conglomerat, welche nicht selten das ältere Randgebirge der Alpen oder Voralpen unmittelbar überdecken. Fuchs hat jüngst (Verh. d. geol. R. 1870; S. 250) festgestellt, dass der typische Badener Meerestegel über dem Leithakalk gelagert sei und es wird dadurch die Annahme bestättigt, zu welcher schon früher die vergleichende Zusammenstellung der organischen Einschlüsse gelangt war. *Lithothamnium ramosissinum* ist daher nicht bloss als Zeichen einer Beckenrandsbildung anzusehen, sondern giebt auch eine Leitversteinerung der Schichtenstufe vom Alten der oberen Meeresmolasse an N. Alpenvorlande (Staad, Kaltenbach, Traunstein) der sog. St. Gallener Abtheilung der helvetischen Stufe K. Meyer's ab. Mit diesem geognostischen Horizonte würde auch das Vorkommen in den subapeninnischen Tertiärablagerungen stimmen.

Abbildung: Tafel I. Figur 1^a, 1^b, 1^c und 1^d.

2) **Lithothamnium nummuliticum** Gümb. spec.

Nullipora nummulitica Gümb. Geogn. Besch. d. b. Alp. S. 654. 1861.

Der zu kleinen Büscheln oder Rasen verwachsene Stock besteht — sofern derselbe nicht zerbrochen und in einzelne Fragmente zerstückelt ist — aus zahlreichen, kurzen rundlichen, stumpfwarzenförmigen Aesten, welche dicht gedrängt in kleinen traubigknolligen Gruppen zusammengehäuft erscheinen (T. I; F. 2^a); ihr Ende ist kugelig abgerundet, die Oberfläche glatt; die durchschnittliche Grösse der Aeste beträgt im Durchmesser 3 mm.; in der Länge 4,5 — 5 mm. Auf der Bruchfläche ist die Kalkmasse anscheinend sehr dicht; die dunkleren Stellen der Cystocarpien sind nicht spärlich sichtbar (T. I, F. 2^c u. 2^e x). In Dünnschliffen zeigt sich ein enges Gitterwerk von Zellen, deren scheinbare Grösse 15—16 Mic. in der Länge und 8 Mic. in der Breite beträgt (T. I, F. 2^e u. 2^c).

Vorkommen: Ungemein häufig am Nordrande der Kalkalpen in den sog. Kressenberger Nummulitenschichten, hier z. Th. von Eisenoxydhydrat infiltrirt, dann auch im Mergel (Stockletten), ganz insbesonders häufig im sog. Granitmarmor, dessen Masse grösstentheils aus zerstückelten Aesten dieser Alge zusammengesetzt ist. In dieser

Schichte trifft man die Alge innerhalb der ganzen Verbreitung dieser Nummulitenbildung von der Schweiz durch Bayern und Oesterreich; auch am Südrande der Alpen in dem Vincentinischen ist sie in gleichalterigen Gebilden massenhaft eingeschlossen.

Geognostische Lage: Die diese Art einschliessenden Gesteine entsprechen dem Horizont, des *Cerithium giganteum* in der Pariser Stufe.

Das massenhafte Auftreten dieser Alge in dem sog. Granitmarmor weist diesem eine ähnliche Entstehungsart, am Meeresrande, wie dem Leithakalke zu. Doch findet man verhältnissmässig seltener guterhaltene Rasen, als in den jüngeren Tertiärgebilden Wien's. Es ist zu vermuthen, dass sich diese Kalkalge dem allgemeinen Verbreitungsgebiete der Tertiärnummuliten von den Pyrenäen bis nach Ostasien enge anschliesst.

Abbildung: Tafel I. Figur 2^a, 2^b, 2^c, 2^d und 2^e.

Die fast nur halb so grossen Zellendurchschnitte gestatten eine leichte Unterscheidung dieser Art von der vorausgehenden, der sie äusserlich ziemlich nahe steht.

3) **Lithothamnium effusum** n. spec.

Der meist kleine Stock besteht aus zahlreichen, walzenförmigen Zweigen, welche aus einem knolligen, gemeinschaftlichen Stocke mit längeren Enden vorragen, oder in Folge von Abrollung mehr oder weniger verkürzt sind. Die Enden der wohlerhaltenen Zweige sind etwas zulaufend abgerundet, die der abgerollten Exemplare stumpfknollig (T. I, F. 3^a u. 3^b); die Zweige besitzen bei etwa 2 mm. Dicke bis zum gemeinsamen Stamme eine mittlere Länge von 3—4 mm. Die Oberfläche der Zweige ist glatt. Im Dünnschliffe zeigen sich die gitterförmigen Zellendurchschnitte (T. I, F. 3^c) klein und eng gestellt, bei 6—7 Mic. Länge in einer Breite von 4,5—5 Mic.

Die auffallend geringen Dimensionen der Zellen sind für diese Art ganz besonders charakteristisch.

Vorkommen: In den bryozoenreichen Mergeln vom Dorfe Sardagna unfern Trient, wo ich dieselbe gesammelt habe.

Geognostische Lage: Soweit die begleitenden Thierreste zu beurtheilen gestatten, gehört der Bryozoenmergel von Sardagna zu der

Bartonstufe der Eocänschichten. Doch bedarf diese Annahme noch einer sicheren Bestättigung. In wie weit die in mehreren bryozoenreichen Schichten der norditalienischen älteren Tertiärgebilden sich vorfindenden *Nulliporen* mit dieser Art übereinstimmen, bleibt noch zu ermitteln.

Abbildung: Tafel I, Figur 3^a, 3^b und 3^c.

Die starke Verästelung des Stammes und die dünne, schlanke Form der fast spitz zulaufenden Aeste bei sehr geringen Zellendimensionen dienen zur Unterscheidung dieser Art von allen übrigen.

4) **Lithothamnium pliocaenum** n. spec.

Stock in grossen rundlichen Polstern verwachsen mit kurzen dicken walzenförmigen oder knollenförmigen, unregelmässig verzweigten oder auf einander aufgesetzten Enden, welche, oben abgerundet, eine glatte Oberfläche besitzen (T. I F. 4^a). Diese Aeste sind durchschnittlich 4 mm. dick und 5—6 mm. lang, während der ältere Theil des Stocks zu einem massivem Stamm verwachsen zu sein schien. An abgeriebenen Exemplaren machen sich concentrisch bogige Zeichnungen bemerkbar. Im Dünnschliffe erscheinen die gitterförmigen Zellendurchschnitte fast quadratisch geformt (T. I F. 4^b) etwa 10 Mic. lang und 8—9 Mic. breit.

Vorkommen: In der blaugrauen Muschelbreccie des Mt. Mario. (Von Hrn. Prof. Zittel erhalten.)

Geognostische Lage: Die Schichtenreihe des Mt. Mario, welche die Kalkalgen beherbergt, steht in Alter den Schichten am Castell Arquato gleich und gehört sohin zu der oberen Tertiärstufe von Asti.

Abbildung: Tafel I Figur 4^a und 4^e.

Die namhafte Grösse der ganzen Alge, die Kürze und Dicke der Aeste, das Quadratische der sehr kleinen Zellendurchschnitte unterscheiden diese Art leicht von allen übrigen, namentlich von dem *L. ramosissimum.*

5) **Lithothamnium tuberosum** n. spec.

Der Stock, aus grossen unregelmässig zusammengewachsenen, Knollenartigen grossen Zweigen bestehend, bildet bis faustgrosse Polster (Taf. I F. 5^a), welche nach Innen zu einen massigen Stamm zusammenschliessen.

Die einzelnen, unregelmässig knollenförmigen Aeste sind gleichsam aus mehreren kurzen Asttheilen zusammengewachsen, so dass diese weit vorspringenden Asthaufen durch einzelne vorstehende kopfförmige Erhöhungen gelappt erscheinen. Die Länge solcher Asthaufen erreicht 12—15 mm., ihre Dicke 8—10 mm. Die Oberfläche ist glatt. Die Dünnschliffe lassen länglich quadratische Zellendurchschnitte von 15—16 Mic. Länge und 10 Mic. Breite erkennen (T. I., F. 5^b u. 5^c).

Vorkommen: Aus den sandigen Schichten von Astrup bei Osnabrück. (Von Gr. v. Münster gesammelt, jetzt in der paläont. Sammlung in München aufbewahrt.)

Geognostische Lage: Die sandigen Schichten von Astrup gehören den obern Lagen der aquitanischen Stufe an.

Abbildung: Tafel I Figur 5^a, 5^b und 5^c.

Diese Art gehört unter den bisher bekannten zu einer der grössten, die sich schon äusserlich durch ihre plumpe knollige Form leicht kenntlich macht. Trotz dieser Grösse erreichen die Zellen doch nur die Grösse der um Vieles kleineren Leithakalkart. Sie ist durch diese Verhältnisse auffällig charakterisirt.

6) **Lithothamnium torulosum** n. spec.

Der abgerundet knollige Stock hat auf seiner Oberfläche nur kurze, abgerundete, verhältnissmässig jedoch grosse Erhöhungen, welche die Astverzweigungen darstellen und nach unten zu einem massigen Stamm zusammenfliessen (T. II F. 6^a). Diese knopfartigen Vorsprünge besitzen einen durchschnittlichen Durchmesser von 5 mm. und zeigen in Folge von Abreibung die concentrischen Streifen der verschiedenen Wachsthumszonen; im Uebrigen ist die Oberfläche glatt. Im Dünnschliffe erscheinen die fast quadrischen Zellendurchschnitte in einer Länge von 8 Mic. und in einer Breite von 6 Mic. (T. II F. 6^b).

Vorkommen: In den hangenden blauen Mergeln des Thalberggrabens an der oberen Grenze gegen die Cyrenenmergel unfern Traunstein; wahrscheinlich gehören hierher die sog. *Nulliporen* vom Mt. Cavatore bei Acqui.

Geognostische Lage: Die blauen Mergel vom Thalberggraben

gehören den obersten Lagen der marinen Schichten der tongrischen Stufe an, wie der Kalk von Acqui.

Abbildung: Tafel II Figur 6^a u. 6^b.

Die kurze gedrungene massige Gestalt der nur wenig vorragenden dicken kugeligen Aeste und die sehr geringe Grösse der Zellen dienen dieser Art als rasch orientirendes Erkennungszeichen.

7) **Lithothamnium mamillosum** n. spec.

Cellepora bipunctatata Gdf. (P. I, 27. T. IX F. 7.)
Membranipora bipunctata Blainv. Dict. LX 411.
Discopora bipunctata Edw. in Lk. hist. t. II. 253.
Marginaria bipunctata Roem. Kreid. 13.

Der Stock ist krustenförmig ausgebreitet oder aufgewachsen und besteht aus einem schaligen zusammenhängenden dicken unteren Stamm, auf welchem unregelmässig verzweigte oder zu Häufchen aneinander verwachsene, kurze, dicke knollenförmige Aeste sich erheben (T. II F. 7^a). Bei durchschnittlich 5 mm. Länge besitzen sie einen Durchmesser von 4,5 mm. Die Oberfläche ist rauh, wahrscheinlich in Folge der Verwitterung. Der Zellenquerschnitt der Dünnschliffe ist verhältnissmässig sehr klein, dabei fast quadratisch 5,5 Mic. lang und 5 Mic. breit (T. II F. 7^b).

Dieser Bestimmung liegt das in der früheren Gr. v. Münster'schen Sammlung aufbewahrte Original zu Goldfuss'schen *Cellepora bipunctata* (S. 27 Taf. 9 Fig. 7 die Pet. D.) zu Grunde, welches jetzt in die bayer. Staatssammlung übergegangen ist. Ich verdanke dessen Mittheilung der Güte des Hrn. Collegen Zittel. Diese Art gewinnt dadurch an Interesse, weil sie zeigt, dass in der That manche früher für eine Bryozoe gehaltene Versteinerung unseren Kalkalgen zufalle, worauf oft schon die Abbildung hinweist. Doch ist es nur selten möglich, durch Untersuchung der Originalexemplare vollkommene Sicherheit, wie in diesem Falle, zu gewinnen. Da die Goldfuss'sche Bezeichnung vielfach in Anwendung gebracht ist, wohl auch für Manches, welches nicht hieher gehört, zog ich es vor, um die Synonime nicht zu verwirren, statt des ohnehin ganz unpassenden Beiworts eine neue Bezeichnung zu wählen.

Vorkommen: In dem tuffartigen Kreidekalk des Petersbergs bei Mastricht.

Geognostische Lage: Oberste Abtheilung der cretacischen Formation (sog. Danien).

Abbildung: Tafel II Figur 7^a u. 7^b.

Diese Art ist leicht kenntlich an ihrer krustenartigen Unterlage, auf welcher sich kurze, ziemlich isolirte, kuglich abgerundete Aeste erheben. Der beträchtlichen Grösse dieser Theile gegenüber sind die Zellen sehr klein, und überdiess durch das fast Quadratische ihres Umrisses von der Form anderer Arten abweichend gebaut.

8) **Lithothamnium parisiense** n. spec.

Der Stock ist nur in einzelnen abgebrochenen und meist überrindeten Zweigtheilen bekannt, welche in grosser Häufigkeit, in manchen Lagen zu $^8/_{10}$, den sog. Pisolithkalk von Paris zusammensetzen. Die Asttheilchen sind knollig walzenförmig, unregelmässig getheilt und enden mit kugeliger Wölbung (T. II F. 8^a). Die Oberfläche ist glatt. Die meisten Aestchen besitzen einen Durchmesser von 3—4 mm. Im Dünnschliff erscheint der Zellendurchschnitt kurz rechteckig, 9 Mic. lang und 6 Mic. breit (T. II F. 8^b).

Vorkommen: im Pisolithkalk der Umgebung von Paris.

Geognostische Lage: Oberste Lage der cretacischen Formation (Danien). Diese Art erlangt besondere Wichtigkeit durch ihre wahrhaft massenhafte Betheiligung an der Zusammensetzung in dem genannten Trümmerkalk, in welchem die zerbrochenen Asttheile meist mit Kalk überzogen und verkittet sind zum Beweise, dass diese Kalksteinbildung an einem seichten Meeresrande unter Vermittlung heftiger Brandung oder des Wellenschlags entstanden ist.

Abbildung: Tafel II Figur 8^a u. 8^b.

Die verhältnissmässig langen, walzenförmigen Aeste mit kugelig abgerundeten Enden lassen diese Art von allen vorausgehenden unterscheiden. Dagegen ist die Aehnlichkeit mit den nachfolgenden: *L. procaenum* und *L. jurassicum* eine sehr grosse. Die geringeren Dimensionen der Zellen geben jedoch ein Mittel an die Hand, unsere Art auch von letzteren sicher zu trennen.

9) **Lithothamnium jurassicum** n. spec.

Der Stock ist bis jetzt nur in kleineren Asttheilen bekannt; diese bestehen aus länglich walzen-knollenförmigen, z. Th. unregelmässig gegabelten, z. Th. durch kopfförmige Ansätze sprossenden Stücken (T. II F. 9[a]), deren kugelig abgerundete Enden wie die ganze Oberfläche glatt erscheint; die letzten kopfförmigen Asttheile besitzen einen Durchmesser von 2—3 mm. Die im Dünnschliffe sichtbar gemachten, rektangulären Zellendurchschnitte messen (T. II F. 9[b]) auf 13 Mic. Länge 10 Mic. in der Breite.

Vorkommen: In den trümmerig bröcklichen Schwammkalken des Schwabenbergs bei Neukirchen in der fränkischen Alb. Obwohl in den verschiedenen Ablagerungen der Jurakalke, welche der Hauptsache nach aus zerbrochenen und beigeschwemmten organischen Ueberresten bestehen — Schwammlagen — vielfach ähnliche unbestimmte knollige Körperchen beobachtet wurden, so konnte bis jetzt in dem in unseren Sammlungen vorfindlichen Material doch nur erst von einer Fundstelle das Vorhandensein von *Lithothamnium* festgestellt werden. Ich zweifle jedoch nicht an deren massenhaften Betheiligung bei der Zusammensetzung aller sog. Schwammlagen.

Geognostische Lage: Die Schwammlagen, in welchen das *Lithothamnium jurassicum* neben zahlreichen Bruchstücken von z. Th. überrindeten Schwämmen und Crinoideenstielen sich findet, gehört der Stufe des *Ammonites bimammatus* an.

Abbildung: Tafel II Figur 9[a] und 9[b].

Die runden, kurzen, knollenartigen Ansätze an den wenig verzweigten Aesten und die verhältnissmässig grossen Zellen dienen zur Unterscheidung dieser ältesten der bekannten Arten.

10) **Lithothamnium procaenum** n. sp.

Ceriopora dichotoma Goldf. partim.

Der Stock besteht aus knollig-walzenförmigen, ziemlich langen, schlanken, unregelmässig gegabelten Aesten, welche von unten aus einem dickeren Stamm sich erheben in ähnlicher Weise, wie es bei dem *Lithothamnium polymorphum* der gegenwärtigen Flora der Fall ist (T. II,

F. 10[a]). Manche Aeste sind ziemlich regelmässig verzweigt und daher kommt es, dass einzelne Exemplare unserer Kalkalge unter der Bezeichnung *Ceriopora dichatoma* Goldf. in den Sammlungen liegen, obwohl schon bei Anwendung schwacher Loupen die Porengruben der wahren *Ceriopora* deutlich erkannt werden können, während die Oberfläche unserer Kalkalge dagegen ganz glatt ist. Der Durchmesser der oberen Asttheile misst gegen 3—4 mm. Die Zellendurchschnitte, welche in dem Dünnschliffe sichtbar werden (T. II, F. 10[b]), sind mehr als anderthalbmal so gross, als die des verwandten *L. parisiense* und zwar 12 Mic. lang und 8 Mic. breit.

Vorkommen: Mit *Lithothamnium mamillosum* in dem Kreidetuff des Petersbergs bei Mastricht.

Geognostische Lage: In den obersten Schichten der cretacischen Formation (Danien).

Abbildung: Tafel II Figur 10[a] u. 10[b].

Diese der *Lithothamnium parisiense* zunächst stehende Art von Mastricht zeigt sich mannichfaltig verzweigt, die Zweigenden sind zulaufend abgerundet, während jene der ersterwähnten Art kopfförmig, oft verdickt abgerundet sind. Ausser diesen äusserlichen Unterscheidungsmerkmalen kann auch die Grösse der Zellen, welche bei *L. procoenum* das Anderthalbfache der Zellen von *L. parisienne* erreicht, zu ihrer Unterscheidung dienen.

11) **Lithothamnium perulatum** n. sq.

Ceriopora obvoluta v. Mü. in schae.

Der Stock ist niedrig krustenförmig *(Lithophyllum)* theilweise zu dickeren Rinden zusammengewachsen und mit absatzweise vorragenden Enden gebildet, die Krustenoberfläche ist durch schwach gewölbte, etwa 1½ mm. breite Streifchen oder rundliche Erhöhungen, welche vielfach quer aneinander absetzen wie getäfelt; im Uebrigen ist die Oberfläche der einzelnen Erhöhungen etwas rauh (T. II, F. 11[a]). Im Längsschnitte der Dünnschliffe zeigt sich ein fast quadratisches Zellennetz, dessen Zellen im Durchschnitte gegen 10 Micr. lang und etwa 8 Micr. breit sind (T. II, F. 11[b]).

Vorkommen: Kreidetuff vom Mastricht.

Geognostische Stellung: Oberste cretacische Schichten. Das vorliegende einzige Exemplar stammt aus der früher Gr. v. Münster'schen, jetzt bayerischen Staatssammlung, aus welcher ich es durch die Güte des Hrn. Cons. Zittel zur Untersuchung erhalten habe.

Abbildung: Tafel II Fig. 11^a u. 11^c.

Diese Art ist leicht an ihrer krustenförmigen, flachen Ausbreitung zu erkennen und von anderen Arten zu unterscheiden.

12) **Lithothamnium asperulum** n. sp.

Der sehr bedeutend grosse und dicke, andere Ueberreste überwuchernde Algenkörper von oft 60 mm. Länge und 40 mm. Dicke trägt auf seiner Oberfläche theils kegelförmig zulaufende zapfenförmige, theils knollig halbkugelige Erhöhungen, in welchen die Alge fortwächst. Diese Stammtheile erreichen vom massigen Stock an gerechnet die Länge von 15 mm. und eine Dicke von 12 mm. (T. II, F. 12^a). Die Oberfläche ist rauh warzig, indem kleinere kugelige Knöpfchen, denen auch einzelne grössere beigesellt sind, dicht an einander gedrängt die Oberfläche bedecken (s. Abb. T. II Fig. 12^b). Im Querbruche bemerkt man schon mit unbewaffnetem Auge zahlreiche concentrische Streifchen der Anwachszonen. Im Dünnschliffe (T. II, F. 12^c und 12^d) zeigt der Längenschnitt grosse, lange und schmale Zellendurchschnitte von 75 Mic. Länge und 25 Mic. Breite.

Vorkommen: In den Schichten von Castell Arquato bei Parma (frühere Gr. v. Münster'sche, jetzt bayer. Staatssammlung).

Geognostische Lage: Oberste Schichten der Pliocänbildungen (Astien C. Mayer's).

Abbildung: Taf. II Fig. 12^a, 12^b, 12^c und 12^d.

Diese Art ist durch ihre äussere Form, durch die Beschaffenheit der Oberfläche und die eminente Grösse der Zellen ebenso ausgezeichnet, wie vor einer Verwechselung mit andern Arten geschützt.

Ausser diesen von mir bis jetzt untersuchten und bestimmten Arten gehört sicher noch Vieles, welches unter den verschiedenen Namen theils

in den Sammlungen liegt, theils beschrieben, wurde zu unseren Kalkalgen. Als verdächtig und daher einer näheren Untersuchung werth bezeichne ich insbesondere folgende Arten, zu deren Untersuchung mir zur Zeit das Material und namentlich Originalexemplare fehlen. Für Zusendung der einen oder anderen dieser Arten wäre ich stets dankbar.

Nullipora granulosa Mich. Ic. p. 218, pl. 46, f. 19.
Nullipora lycoperdioides Mich. Ic. p. 148, pl. 53, f. 20.
Nullipora palmata Gdf. Pet. I. S. 20 Taf. 8 F. 2, welche Art bereits in der 2. Auflage von Lamardk's Naturgeschichte der wirbellosen Thiere 1836 (T. II, p. 311) als versteinerte Art aufgeführt wird.
Nullipora tuberosa Mich. Ic. p. 79 t. 15, f. 24 (*Reptomulticava tuberosa* d'Orb wurde untersucht, ist aber eine ächte Bryozoe.
Nullipora ramosissima d'Orb. Prod. p. 209.
Nullipora provincialis d'Orb.
Nullipora Marticensis d'Orb.
Nullipora uvaria Mich. Ic. p. 75 T. 9.
Millepora capitata Roem. Ool. II. T. 17, F. 10.
Millepora lobata Roem. Ool. II. T. 17, fig. 17.
Ceriopora avellana Mich. Ic. S. 208, t. 52, fig. 13.
Ceriopora clavata Gdf. Pet. I. S. 36, T. 10, f. 15.
Ceriopora globosa Mich. Zooph. 1845, p. 246, T. 57, f. 5.
Ceriopora mamillosa Roem. Kreid. S. 25, T. V, f. 25.
Ceriopora micropora Gdf. Pet. I. S. 33, T. 10, f. 4.
Cricopora straminea Phil. Y. I. p. 155, pl. 9, f. 1 (nicht Quenstedt Jura p. 368, welche wohl zweifelslos eine Bryozoe darstellt).
Heteropora spongioides Mich. das. f. 3.
Cellepora pumicosa Lm. (Mich. Ic. pl. 14 f. 12).
Tethia simplex. Mich. J. pl. 15, f. 12.
Tethia lyncurium Mich. das. f. 13.
Diastopora diluviana M. Edw. (Mich. J. pl. 56 f. 13).
Achilleum glomeratum Rss. Kreide. T. 10, G. 9.
Chaetetes cretosus Rss. Kreid. T. 43 F. 4.

Im Interesse der Wissenschaft ist die gründliche, mikroscopische Untersuchung aller dieser Formen höchst wünschenswerth.

Andere nach ihrer Aeusserlichkeit gleichfalls verdächtige Arten, welche ich näher zu untersuchen Gelegenheit fand, haben sich dagegen als wirklich zu den *Bryozoen* gehörig erwiesen. Diese sind:

Millepora racemosa Goldf. Pet. I. T. 8 F. 2, von welcher Art ich das Originalexemplar aus der früheren v. Münster'schen, jetzt bayer. Staatssammlung zu Handen hatte. Dieses besitzt, obwohl in der 2. Aufl. von Lamarck's Nat. d. wirbellos. Thiere t. II, p. 311) die Species als

zu der Gruppe der *Nulliporen*, d. h. *Milleporen* gehörend ausdrücklich bezeichnet wurde, doch ganz vollständig die innere und äussere Struktur einer Bryozoe, ebenso wie *Millepora compressa* Goldf., *M. madreporacea* Goldf., *Ceriopora clavata* Goldf., *C. cryptopora* Goldf., *C. crispa* Goldf., *C. micropora* Goldf.

Cellepora echinata Hag. (Roem.) besitzt in Exemplaren aus den Suiten der Hrn. Dr. Krantz gleichfalls Bryozoencharakter.

Heteropora tenera Hag. aus dem Kreidetuff von Mastricht (Dr. Krantz'sche Sammlung) ist eine ächte Bryozoe.

Ceriopora dichotoma Goldf. ebendaher ist, wie schon erwähnt, theilweise wenigstens gleichfalls bei den Bryozoen zu belassen.

Reptomulticava tuberosa d'Orb. aus dem Neocom. von Farringdon in Berkshire (Krantz'sche Sendung) besitzt wahren Bryozoecharakter.

Es erübrigt zum Schluss unserer Darstellung noch jener *Nulliporen* zu gedenken, welche noch neuerdings von Heer (Urwelt S. 140, T. IX) unter dieser Bezeichnung beschrieben und abgebildet worden sind.

Sehr gut erhaltene, vollkommen runde, nicht plattgedrückte Exemplare aus dem Jurakalke von Orterburg und den untern grauen Kalken vom Bildstocktunnel bei Leipheim, welche wie eingebohrt im Kalk und Mergel stacken und ganz genau das Bild ihres ursprünglichen Zustandes erkennen liessen, dienten mir zur näheren Untersuchung dieser Algenkörper. Vollständig gelungene Quer- und Längschnitte in Dünnschliffen hergestellt liessen im Innern auch nicht die Spur einer Struktur oder einer Zellenbildung, wie sie bei einer Kalkalge vorausgesetzt werden muss, wahrnehmen, vielmehr liess sich deutlich erkennen, dass der ganze innere Hohlraum der Alge mit Kalksubstanz mechanisch ausgefüllt ist. Diese *Nulliporen* des Jurakalkes gehören daher nicht in die Formreihe der *Melobesieen* oder zu den Kalkalgen, sie scheinen sich vielmehr dem *Halysium* anzuschliessen.

Eine ähnliche, einfach rundlich-fadenförmige, vielfach verzweigte Alge aus dem Macrocephalus-Oolith Frankens besitzt ebenfalls die zuletzt erwähnte Beschaffenheit.

Anhang.

Lithiotis problematica.

In den grauen, mergeligen und schwärzlichen, marmorartigen Kalken der Südalpen kommen oft handgrosse im Allgemeinen Ohr- oder Muschelförmig gestaltete organische Körper vor, welche in den meisten Fällen aus weissem, faserigem Kalkspath bestehen und deren Querschnitte daher im schwarzen Kalke als grosse, weisse, linsenförmige Streifen und Flecke grell hervorstechen. Den Besuchern norditalienischer Kirchen wird dieser weissfleckige, dunkle Marmor, der vielfach zu inneren Verzierungen an Altären, Wänden, Säulen, Gräbern Verwendung fand, wohl in die Augen gefallen sein.

Das massenhafte Vorkommen dieser unzweifelhaft organischen Uebereste in dem grauen Liaskalk mit *Megalodus pumilus*, *Terebratula Renierii*, *Terebratula Rotzoana* und *Terebratula pentagona* in den Südalpen, namentlich in Val. Arsa bei Roveredo gab mir bei einem längeren Aufenthalt an letzterem Orte längs der neuen Strasse nach Schio und in dem tiefen Einschnitte des Leno Gelegenheit, diesen Gebilden meine besondere Aufmerksamkeit zuzuwenden. Auch fand ich in der reichen Sammlung des Hrn. Baron de Zigno in Padua dieselben Versteinerungen in grosser Menge und in sehr verschiedenen Erhaltungszuständen vertreten und konnte durch die Freundlichkeit des Besitzers auch an diesen meine Studien vervollständigen. Hierher gehören auch die Körper, welche Süss (Jahrb. d. geol. Reichs. Bd. XVII 1867. S. 580) als *Perna*-Schalen erwähnt und von welcher er anführt, dass deren Durchschnitte in dem schwarzen Marmor der Kirchen von Norditalien besonders ins Auge stechen.

Da man über die Natur dieser als Gestein-bildendes Element in der That wichtigen Versteinerung, die man bei nur flüchtiger Betrachtung

leicht mit Schalen von *Perna* oder *Inoceramus* verwechseln kann, noch nicht vollkommen ins Klare gekommen ist, so halte ich es nicht für unpassend, hier meine Beobachtungen über diese organischen Einschlüsse anhangsweise anzureihen, um so mehr, als ich dieselbe gleichfalls als zu den Kalk-absondernden Algen gehörend ansehen möchte im Gegensatz zu der Ansicht *de Zigno's* (Verh. d. geol. Reichs. 1871 S. 54), welche sich dazu hinneigt, *Cycadeen*-Reste darunter zu vermuthen. Nach brieflichen Mittheilungen dieses gründlichen Kenners der Flora von Rotzo, welche derselbe unter dem 5. Jan. 1871 auf meine Anfrage bezüglich dieses Gegenstandes an mich zu richten die Gefälligkeit hatte, erwähnte derselbe auch noch andere Meinungen, wornach die Versteinerung nach Brongniart zu den *Bromeliaceen* oder nach Schimper zu den *Pandaneen* gehören würde. Er erinnert ferner daran, dass bereits Spada (Cat. lap. Veron. 1739 p. 28 u. 1740 ed. mant. p. 11 T. III.) diese Einschlüsse beschrieben hat und spricht die Vermuthung aus, dass auch Schlotheim (Nacht. z. d. Petref. K. p. 49—51, II. T. VII. F. 1—2; T. V. F. 3) aus dem Liaskalk von Altdorf[1]) und Bruckmann (in Geol. of Cheltenham) ähnliche Pflanzeneinschlüsse schildern. Diese soweit aus einander gehenden Deutungen lassen sich nur aus dem schlechten Erhaltungszustande der Versteinerung erklären. Die Ausfüllung des organischen Körpers durch späthigen Kalk oder derbe Mergelmasse stellt nämlich der mikroscopischen Untersuchung in Dünnschliffen so grosse Schwierigkeiten in den Weg, dass sich die innere Struktur nicht mit voller Sicherheit feststellen lässt. Gleichwohl glaube ich einige Analogien im Bau entdeckt zu haben, durch welche ich mich zur Annahme berechtigt halte, dass wir es mit einer Kalk-absondernden Alge aus der Gruppe der *Udotea* Lam. (*Flabellaria*) zu thun haben.

Im Aeusseren besitzen die Körper, von deren Ueberresten hier die Rede ist, eine gewisse Aehnlichkeit des ebenfalls den Algen angehörigen *Taonurus*, welche man jedoch nur in ganz flachen Abdrücken kennt, während unsere *Lithiotis* einen dicken, kalkigen, in einzelnen Fällen verkohlten Körper aufzuweisen hat.

---

1) Es ist zu bemerken, dass bloss Abb. T. VII. F. 1 auf das Vorkommen von Altdorf, die F. 2 u. T. V F. 3 dagegen auf Vorkommnisse aus dem „Salzburgischen" (wahrscheinlicher Südalpen) sich beziehen.

Wenn das Innere von grobkrystallinischer Kalksubstanz ausgefüllt ist, lassen sich keine deutlichen Spuren organischer Struktur in Dünnschliffen mikroscopisch nachweisen. Man kann dann nur aus der Anordnung und verschiedenen Färbung der Kalkmasse auf eine solche schliessen, ohne im Stande zu sein, sie näher und bestimmter zu beschreiben. In einzelnen seltenen Fällen ist das Versteinerungsmaterial dichter und fein krystallinisch, so dass zwar im Innern immer noch eine faserige Anordnung der Kalkmasse vorherrscht, neben derselben aber wenigstens die Spuren innerer Struktur erhalten sind. In den Längschnitten parallel zu der breiten Blattfläche wechseln in diesem Falle Zonen dichterer krystallinischer Gesteinssubstanz mit weicheren, kreideartigen Lagen. Die letzteren sind der Länge und Quere nach gestreift und besitzen, schalenartig über einander gelegt, einen halbmondförmigen Querschnitt, dessen Enden nach Innen und Aussen sich verschmälern und auslaufen. In den Längschnitten, welche der Quere nach gelegt sind, macht sich nur eine Querfaserung bemerkbar, die von zahlreichen, die übereinander liegenden Schalen oder Lagen anzeigenden Längslinien durchkreuzt werden. Auf dem Querschnitte endlich bemerkt man nach Aussen mehrfache, dünne, parallel verlaufende Lagen von faserigem Kalkspath, nach Innen die bei den Längsschnitten erwähnten bogig schalig übereinander liegenden Zonen, welche bündelartig den Hauptkörper zusammensetzen, und auf ihren Flächen, wenn sie durch Bruch zufällig entblösst sind, radial und concentrisch gestreift erscheinen. Gegen die Mitte des ganzen Pflanzenkörpers bemerkt man eine oder mehrere rundliche, stielartige, aus sehr dichter, amorph-scheinender Masse bestehende, die Pflanze der Länge nach durchziehende Absonderungen, welche dem Caulom oder Stengel zu entsprechen scheinen (T. II, Fig. 14[a]). Der Umriss der ganzen Pflanze ist ein länglich öhrähnlicher; die eine Fläche ist etwas gewölbt (T. II, F. 13), die andere schwach vertieft (T. II, F. 14[a]); der Körper ist ungegliedert, zuweilen mit einigen Falten oder Wellen geschweift, nach Oben sich erweiternd und verdünnend, nach Unten verjüngt uud stielartig zulaufend mit mehrfachen, concentrischen, gegen den Rand hin auslaufenden Streifen und Runzeln.

Häufig bemerkt man in den Querschnitten zwei oder mehrere nahe bei einander, mehr oder weniger parallel liegende Körper, welche durch

eine nur schwache Lage von Gesteinsmasse getrennt, das Bild erzeugen, als bestände die Pflanze aus zwei analogen Lappen, oder als wäre sie in der Mitte zusammengefaltet. Eine solche Faltelung konnte ich jedoch weder direkt beobachten, noch durch künstliche Ausarbeitung des umgebenden Gesteins blosslegen. Im Falle der Duplikatur müsste angenommen werden, dass der Pflanzenkörper auseinander gebrochen in zwei oder mehrere Theile sich getrennt habe. Wahrscheinlicher ist, dass die gesellig bei einander wachsenden Algen sich häufig nach ihrer Breitseite auf- und aneinander legten und dadurch häufig als Doppeltflecke auf dem Querbruche des Gesteins hervortreten.

Fassen wir den Charakter dieser Pflanze in der Hauptsache zusammen, so erhalten wir folgende kurze Diagnose:

Algenkörper ungegliedert, fächerförmig ausgebreitet, dick, Kalk-absondernd, steinig, mit mehrfachen krummen Linien, welche concentrisch einander parallel und transversal verlaufen, auf der Oberfläche durchzogen und im Innern von einem (oder mehreren) cylindrischen derben Caulom durchzogen.

Neben den verkalkten Formen kommen auch ganz oder theilweise verkohlte Exemplare vor. An solchen gelingt es besser, eine Zellenstruktur, wie sie die Zeichnung auf T. II, F. 14^b im Längsschnitt, und F. 14^c im Querschnitt darstellt, zu Gesicht zu bekommen. Doch scheint durch den Process der Verkohlung der Pflanzenkörper stark zusammengepresst, indem die Kalkmasse bei ganz verkohlten Exemplaren ausgelaugt und fortgeführt wurde.

Vorkommen: Weitverbreitet in den Südalpen, soweit die dunklen, plattenförmigen Kalke reichen.

Geognostische Lage: Die unsere *Lithiotis* umschliessenden Kalke gehören zu den durch ihre Pflanzeneinschlüssen berühmten Rotzo-Schichten, welche *Megolodus pumilus* und *Terebratula Renierii* enthalten und auch nach meinen Beobachtungen als besondere Facies des alpinen Lias anzusprechen sind.

Erklärung der Abbildungen.

Tafel I.

Figur a. *Lithothamnium (Melobesia) lichenoides* Decs. Horizontalschnitt in einem nicht entkalkten Dünnschliff in 320maligen Vergrösserung, wie bei b, c, d und e.

„ b. Dasselbe in einem durch Säure entkalkten Dünnschliffe.

„ c. Dasselbe im Längsschnitte; der Dünnschliff nicht entkalkt.

„ d. Dasselbe, der Dünnschliff entkalkt.

„ e. Dasselbe entkalkt und die Tonnenzellen durch leisen Druck aus der Verdickungsmasse gelöst.

Fig. 1ª. *Lithothamnium ramosissimum* Reuss. spec. in natürlicher Grösse.

„ 1ᵇ. Dasselbe im Längsschnitte 320 m. V.

„ 1ᶜ. Dasselbe im Horizontalschnitte 320 m. V.

„ 1ᵈ. Dasselbe ein Aestchen in Durchschnitt mit Cystocarpien in natürl. Grösse.

„ 2ª. *Lithothamnium nummuliticum* Gümb. in natürlicher Grösse.

„ 2ᵇ. Dasselbe im Längsschnitte. 320 m V.

„ 2ᶜ. Dasselbe im Horizontalschnitte 320 m. V.

„ 2ᵈ. Dasselbe, ein Aestchen im Durchschnitt in natürlicher Grösse.

„ 2ᵉ. Dasselbe, ein Aestchen im Durchschnitte mit den Anwachslinien und Cystocarpien (x) 5mal V.

„ 3ª und 3ᵇ. *Lithothamnium effusum* Gümb. in natürl. Grösse (Varietäten).

„ 3ᶜ. Dasselbe im Längsschnitte 320 m. V.

„ 4ª. *Lithothamnium pliocoenum* Gümb. in natürl. Grösse.

„ 4ᵇ. Dasselbe in Längssch. 320 m. V.

„ 5ª. *Lithothamnium tuberosum* Gümb in natürlicher Grösse.

„ 5ᵇ. Dass. im Längschnitte 320 m. V.

„ 5ᶜ. Dass. im Horizontalschnitte 320 m. V.

Tafel II.

„ 6ª. *Lithothamnium torulosum* Gümb. in natürl. Grösse.

„ 6ᵇ. Dass. im Längsschnitte 320 m. V.

„ 7ª. *Lithothamnium mamillosum* Gümb. in natürl. Grösse.

„ 7ᵇ. Dass. im Längsschnitte 320 m. V.

„ 8ª. *Lithothamnium parisiense* Gümb. in natürlicher Grösse.

„ 8ᵇ. Dass. im Längsschnitte 320 m. V.

„ 9ª. *Lithothamnium jurassicum* Gümb. in natürlicher Grösse.

„ 9ᵇ. Dasselbe im Längsschnitte 320 m. V.

„ 10ª. *Lithothamnium procoenum* Gümb. in natürlicher Grösse.

„ 10ᵇ. Dass. im Längsschnitte 320 m. V.

„ 11ª. *Lithothamnium perulatum* Gümb. in natürlicher Grösse.

„ 11ᵇ. Dass. im Längsschnitte 320 m. V.

„ 12ª. *Lithothamnium asperulum* Gümb. in natürlicher Grösse.

„ 12ᵇ. Dass., ein Theil der Oberfläche 320 m. V.

„ 12ᶜ. Dass. im Längsschnitte 320 m. V.

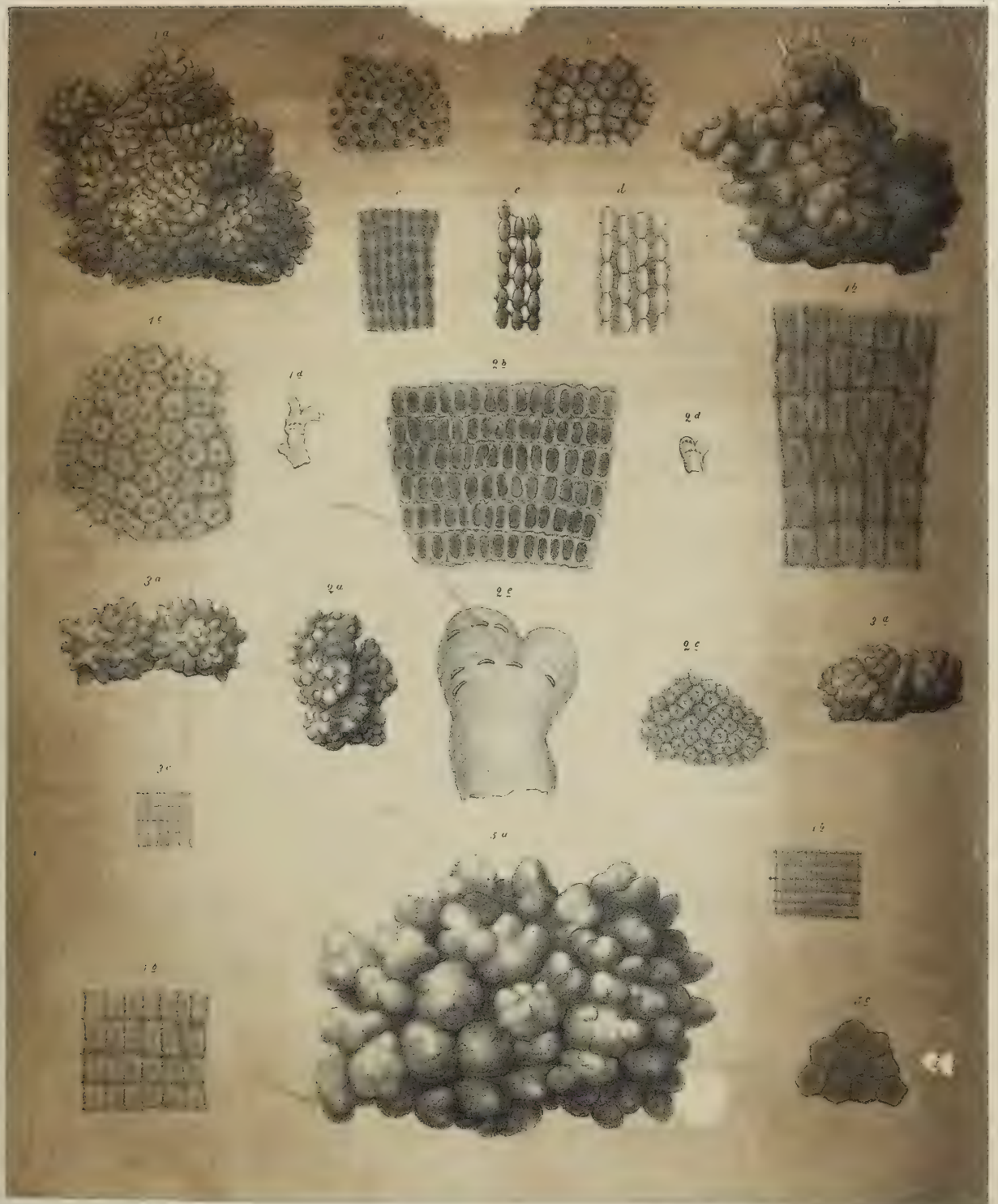
„ 12ᵈ. Dass. im Horizontalschnitte 320 m. V.

„ 13. *Lithiotis problematica* Gümb. Seitenansicht in natürl. Grösse.

„ 14ª. *Lithiotis problematica* G., ein theilweise aufgebrochenes Exemplar in natürl. Grösse.

„ 14ᵇ. Dass. im Dünnschliffe der Länge nach in 320 m. V.

„ 14ᶜ. Dass. im Dünnschliffe des Horizontalschnittes 320 m. V.


1a
a
b
c
d
1c
1d
1b
2b
2d
3a
2a
2c
3c
3b
5a
5b
5c

BRITISH MUSEUM
NATURAL HISTORY

6a
6b
6c
7b
7a
8b
8a
14c
11
10
10
12a
11
12d
12b
14a
13
14c
14b

BRITISH
NATURAL HISTORY

Ueber das

Problem der drei Körper.

Von

Otto Hesse.

Ueber das

Problem der drei Körper.

Von

Otto Hesse.

I.

Unter dem Probleme der drei Körper hat man Folgendes zu verstehen. Drei Körper ohne Ausdehnung, zusammengedrückt auf Punkte, aber mit gegebenen Massen erfüllt, seien aus gegebenen Anfangslagen in irgend welchen gegebenen Richtungen mit gegebenen Geschwindigkeiten in den leeren Raum hingeworfen. Auf diese Körper wirke nichts ein, als das Newton'sche Gesetz, welches sagt, dass die Körper sich gegenseitig anziehen proportional ihren Massen und umgekehrt proportional den Quadraten ihrer Entfernungen. Es soll der Ort eines jeden Körpers für jede beliebige Zeit gefunden werden.

So ausgedrückt erscheint das Problem sehr complicirt. Denn es hängt, abgesehen von den Massen der Körper, ab von 18 Daten, von den 9 Coordinaten der drei Körper in den Anfangslagen und von den Richtungen und den Grössen ihrer anfänglichen Geschwindigkeiten, welche ebenfalls durch 9 Grössen ausgedrückt werden können. In D'Alembert'schen Gleichungen ausgedrückt, welche die hervorgehobenen 18 Daten unberücksichtiget lassen, wird das Problem aber einfach.

Es hängt nämlich, wenn man die Newton'sche Kraft, mit welcher zwei Massen-Einheiten in der Einheit der Entfernung sich anziehen, als Kraft-Einheit nimmt, einzig und allein ab von den gegebenen Massen der drei Körper, also von 3 Daten. Und dieses ist im Vereine mit der Symmetrie des Problems wohl auch der Grund der grossen Anziehungs-Kraft, welche das Problem auf jeden Mathematiker ausübt.

Die D'Alembert'schen Gleichungen sind Differential-Gleichungen, von welchen man sich die Vorstellung zu machen hat, dass sie aus den 9 Gleichungen, welche das Problem vollständig lösen, dadurch hervorgegangen sind, dass man sie nach der Zeit t differentiirt und die 18 Daten eliminirt. Geht man daher von den 9 D'Alembert'schen Differential-Gleichungen aus, so sieht man, ohne die Gleichungen selbst aufzustellen, sogleich ein, dass man zur Lösung des Problems der drei Körper 18 Integrationen zu machen hat, welche die D'Alembert'schen Vernachlässigungen wieder einbringen müssen.

Von den 18 Integralen, welche das Problem der drei Körper verlangt, kennt die analytische Mechanik nur 10. Sechs davon sind hergenommen aus dem Principe der Erhaltung des Schwerpunktes. Drei Integrale gibt das Princip der Erhaltung der Flächen-Räume und ein Integral die Erhaltung der lebendigen Kraft. Es fehlen darum bis zur Zeit noch acht Integrale. Denn das Princip des letzten Multiplicators von Jacobi, welches allerdings ein Integral aufstellen lehrt, macht Voraussetzungen, die man noch nicht erfüllen kann.

Auf ein neues Integral kann man dadurch kommen, dass man aus den 9 D'Alembert'schen Differential-Gleichungen, selbst mit Zuziehung der bekannten 10 Integrale, eine Differential-Gleichung herstellt, welche für sich integrirbar ist; und in der That lassen sich vielfältige Zusammenstellungen der Art machen. Das daraus sich ergebende Integral wird aber nur dann ein neues sein, wenn es sich aus den bekannten 10 Integralen nicht zusammensetzen lässt.

Die Untersuchung, ob das gefundene Integral ein neues sei, kann unter Umständen wieder auf erhebliche Schwierigkeiten stossen, so dass man wünschen muss, solchen Untersuchungen ganz enthoben zu sein. In diesem Wunsche — wohl auch in der vergeblichen Hoffnung einem

von den noch fehlenden acht Integralen auf die Spur zu kommen — habe ich die folgende Arbeit unternommen. Sie bezweckt nichts weiter, als die Lösung des Problems:

Problem.

Aus den Differential-Gleichungen des Problemes der drei Körper und ihren bekannten Integralen symmetrisch gebildete Differential-Gleichungen abzuleiten, von welchen eine jede auf eines von den bis zur Zeit noch fehlenden Integralen der drei Körper führen muss.

Auf dieses Problem bin ich geführt worden durch das Studium des Problemes zweier Körper, dessen Resultate niedergelegt sind in dem Anhange meiner Raumgeometrie 2. Auflage, Leipzig, Teubner 1869. Von dort aus will ich auch die leitenden Gedanken hernehmen, welche die nachfolgenden weiten Entwickelungen rechtfertigen sollen,.

II.

Das Problem zweier Körper verlangt zu seiner vollständigen Lösung 12 Integrationen. Da die Principe der Mechanik 10 von diesen Integrationen leisten, so fehlen noch 2 Integrale.

Ich machte daher den Versuch eine Differential-Gleichung zweiter Ordnung in symmetrischer Weise aus den sechs gegebenen Differential-Gleichungen und ihren zehn Integralen zusammen zu stellen, welche die beiden fehlenden Integrale umschliessen sollte. Der Versuch missglückte, wie man sogleich sehen wird.

Als engeres Problem zweier Körper kann man die Frage nach dem Radiusvector r, welcher die Körper von den Massen m_1 und m_2 und der Gesammtmasse $k^2 = M = m_1 + m_2$ verbindet, als Function der Zeit auffassen; dieses engere Problem führt, wie in dem Anhange der oben citirten Schrift nachgewiesen worden ist, auf die Differential-Gleichung 15) zurück:

$$r'' = -\frac{M}{r^2} + \frac{C^2}{r^3}.$$

Weiset man noch die aus den bekannten Principen der Mechanik hergenommene Constante C^2 der Integration zurück, so erhält man durch Differentiation und Elimination dieser Constante die Differential-Gleichung dritter Ordnung, welche das engere Problem vollständig löset:

1) . . . $$0 = (r^2)''' + \frac{M(r^2)'}{r^3}.$$

Die Form dieser Differential-Gleichung, welche leicht verificirt werden kann, ist schon eine aus dem Probleme der drei Körper hergenommene.

Da die Differential-Gleichung 1) von keiner Integrations-Constante abhängig ist, so ist zu ihrer Herstellung auch keines von den drei Principen der Mechanik erforderlich, welches ein Integral liefert. Man kann daher die Behauptung aufstellen, dass, während zur Lösung des vollständigen Problemes zweier Körper 12 Integrationen erforderlich sind, das engere Problem nur 3 Integrationen verlangt.

Zwei erste Integrale des engeren Problemes sind bald gefunden:

2) . . . $$4h = (r^2)'' - \frac{2M}{r}$$

3) . . . $$2C^2 = r^2\left((r^2)'' + \frac{2M}{r}\right) - \tfrac{1}{2}(r^2)'(r^2)'.$$

Denn man hat:

4) . . . $$(r^2)''' + \frac{M(r^2)'}{r^3} = \frac{d}{dt}\left\{(r^2)'' - \frac{2M}{r}\right\}$$

5) . . . $$(r^2)''' + \frac{M(r^2)'}{r^3} = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dt}\left\{r^2\left((r^2)'' + \frac{2M}{r}\right) - \tfrac{1}{2}(r^2)'(r^2)'\right\},$$

Gleichungen, welche später ihre Verwendung finden werden.

Die Bezeichnung der Integrations-Constanten h und C ist hier so gewählt worden, dass man in Uebereinstimmung mit der Bezeichnung in der citirten Schrift sogleich erkennen soll, dass die

beiden Integrale keine neuen sind. Die Integrations-Constante h ist dieselbe als in Gleichung 9) und die Integrations-Constante C die Constante in der Gleichung 15).

Eliminirt man aus den beiden angegebenen Integral-Gleichungen 2) und 3), deren Formen ebenfalls aus dem Probleme dreier Körper hergenommen sind, die Grösse $(r^2)''$, so erhält man die Differential-Gleichung 13) erster Ordnung:

6) . . . $$r'r' = 2h + \frac{2M}{r} - \frac{C^2}{r^2}.$$

Ihr Integral ist allerdings eines von den beiden noch fehlenden Integralen des allgemeinen Problemes. Das zweite fehlende Integral ist aber bei der Uebertragung des allgemeinen Problemes in das engere vollständig entschlüpft. Das engere Problem, des Radiusvectors, umfasst also nicht die beiden fehlenden Integrale des allgemeinen Problemes, sondern nur ein Integral. Das andere Integral hat man ausserhalb des engeren Problemes zu suchen.

In der Trennung der beiden fehlenden Integrale des allgemeinen Problemes wird man einen glücklichen Umstand erblicken, wenn man dafür hält, dass es vorzuziehen sei, zwei Differential-Gleichungen erster Ordnung zu integriren, als eine Differential-Gleichung zweiter Ordnung. Man kann sich sogar dem Glauben hingeben, dass diese Trennung der beiden noch fehlenden Integrale des Problemes zweier Körper ihre Auffindung und damit die vollständige Lösung des Problemes erheblich erleichtert hat.

III.

Das allgemeine Problem der drei Körper, welches 18 Integrationen erfordert, werden wir dadurch verengern, dass wir nur die Gestalt des Dreieckes kennen zu lernen verlangen, dessen Ecken die drei Körper bilden. Demnach soll die Gestalt des genannten Dreieckes zu einer beliebigen Zeit das engere Problem sein.

Es wird sich also darum handeln, die Differential-Gleichungen zwischen den Radienvectoren und der Zeit aufzustellen, welche das engere

Problem lösen. Von welcher Ordnung diese Differential-Gleichungen sein werden, hängt davon ab, ob zu ihrer Aufstellung bekannte Integrale des allgemeinen Problemes verwendet werden dürfen, oder nicht.

Wenn wir den letzteren Fall im Auge behalten, dass die gesuchten drei Differential-Gleichungen keine Integrations-Constanten enthalten sollen, so lässt sich mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit von ihnen voraussagen, dass jede derselben auf die Differential-Gleichung 1) zurückführen wird, wenn man eine der drei Massen verschwinden lässt. In dieser Voraussicht werden wir drei Differential-Gleichungen, jede von der dritten Ordnung, aufzusuchen haben, welche das engere Problem der drei Körper ohne irgend eine Integration vollständig lösen. Diese Differential-Gleichungen werden 9 Integrationen verlangen.

Da das allgemeine Problem mit Voraussetzung der bekannten Integrale nur 8 neue Integrationen verlangt, so sieht man, dass von den 9 erwähnten Integrationen wenigstens eine durch die bekannten Principien geleistet wird.

Wenn man aber erwägt, dass in dem engeren Probleme zweier Körper von den 3 verlangten Integrationen zwei Integrationen durch die Principe der Mechanik geleistet werden, so kann man voraussetzen, dass jene Principe auch 2 Integrale für das engere Problem dreier Körper hergeben werden, welche in die Integrale 2) und 3) übergehen, wenn man eine der drei Massen verschwinden lässt, so dass von den 9 Integrationen des allgemeinen Problemes nur noch 7 Integrationen für das engere Problem zu machen übrig bleiben.

Da in dem allgemeinen Probleme der drei Körper 8 Integrale noch fehlen, in dem engeren Probleme aber nur 7, so ergibt sich hieraus, dass (wie in dem Probleme zweier Körper) bei dem Uebergange von dem allgemeinen Probleme zu dem engeren Probleme ein Integral verloren geht, welches dem letzteren ganz fremdartig ist.

Diese Reflectionen werden in dem Folgenden ihre Bestätigung finden. Wir beginnen die Ausführung mit der Aufstellung der D'Alembert'schen Differential-Gleichungen, welche das allgemeine Problem der drei Körper lösen.

IV.

Wenn man mit r, r_1, r_2 die Radienvectoren bezeichnet, welche je zwei Körper von den Massen m, m_1, m_2 verbinden, so ist U die Kräftefunction

$$7) \ldots \qquad U = m m_1 m_2 \left\{ \frac{1}{m r} + \frac{1}{m_1 r_1} + \frac{1}{m_2 r_2} \right\},$$

deren partielle Differentialquotienten in die Differential-Gleichungen der Bewegung eingehen.

Bezeichnet man ferner mit ξ, η, ζ die Coordinaten des mit der Masse m erfüllten ersten Körpers zur Zeit t, die als die einzige unabhängige Variabele angesehen werden soll, und die entsprechenden Grössen für den zweiten und dritten Körper durch Anhängung der gebräuchlichen Indices 1 und 2, so hat man zur Lösung des Problemes folgende Differential-Gleichungen:

$$8) \ldots \qquad \begin{aligned} m \xi'' &= \frac{d U}{d \xi} \\ m \eta'' &= \frac{d U}{d \eta} \\ m \zeta'' &= \frac{d U}{d \zeta}. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen repräsentiren ein ganzes System von 9 Gleichungen, welches man vervollständiget dadurch, dass man der Masse m und den Coordinaten ξ, η, ζ die Indices 1 oder 2 beigibt.

Da in die Kräftefunction, wenn man sie durch die Coordinaten der drei Körper ausdrückt, nur die Differenzen der Coordinaten eingehen, gleich wie in die rechten Theile der Differential-Gleichungen 8), deren Einfachheit nur auf der Erfindung der Kräftefunktion beruht, so erscheint es zur Erzielung grösserer Einfachheit angemessen, an Stelle der Coordinaten der drei Körper ihre Differenzen x, y, z einzuführen. Setzt man daher:

$$
\begin{aligned}
&x = \xi_1 - \xi_2 \quad , \quad x_1 = \xi_2 - \xi \quad , \quad x_2 = \xi - \xi_1 \\
9) \ldots \quad &y = \eta_1 - \eta_2 \quad , \quad y_1 = \eta_2 - \eta \quad , \quad y_2 = \eta - \eta_1 \\
&z = \zeta_1 - \zeta_2 \quad , \quad z_1 = \zeta_2 - \zeta \quad , \quad z_2 = \zeta - \zeta_1
\end{aligned}
$$

so wird:

$$\frac{dU}{d\xi} = m\left\{\frac{m_2 x_1}{r_1^3} - \frac{m_1 x_2}{r_2^3}\right\}$$

und aus der ersten Gleichung 8) ergeben sich auf Grund der zu beachtenden Symmetrie zwischen den drei Körpern auf diese Weise die Differential-Gleichungen:

$$\xi'' = \frac{m_2 x_1}{r_1^3} - \frac{m_1 x_2}{r_2^3} \quad , \quad \xi_1'' = \frac{m x_2}{r_2^3} - \frac{m_2 x}{r^3} \quad , \quad \xi_2'' = \frac{m_1 x}{r^3} - \frac{m x_1}{r_1^3}.$$

Zieht man die letzte Gleichung von der vorhergehenden ab, so erhält man in Berücksichtigung von 9) die Differential-Gleichung:

$$x'' = -M\frac{x}{r^3} + m\left\{\frac{x}{r^3} + \frac{x_1}{r_1^3} + \frac{x_2}{r_2^3}\right\},$$

wenn man mit **M** die Summe der Massen der drei Körper bezeichnet, wie folgt:

$$10) \ldots \qquad M = m + m_1 + m_2$$

Wegen der Symmetrie der Coordinaten eines Körpers gehen aus der zuletzt angegebenen Differential-Gleichung folgende hervor:

$$
\begin{aligned}
&x'' = -M\frac{x}{r^3} + m\left\{\frac{x}{r^3} + \frac{x_1}{r_1^3} + \frac{x_2}{r_2^3}\right\} \\
11) \ldots \quad &y'' = -M\frac{y}{r^3} + m\left\{\frac{y}{r^3} + \frac{y_1}{r_1^3} + \frac{y_2}{r_2^3}\right\} \\
&z'' = -M\frac{z}{r^3} + m\left\{\frac{z}{r^3} + \frac{z_1}{r_1^3} + \frac{z_2}{r_2^3}\right\}.
\end{aligned}
$$

Diese Gleichungen repräsentiren wieder ein ganzes System von 9 Differential-Gleichungen, welches man erhält durch Vertauschung der drei Indices o, 1, 2, von welchen der Index o der Einfachheit wegen fortgelassen ist.

Die Differential-Gleichungen 11) würden wieder 18 Integrationen verlangen, wenn man nicht auf Grund von 9) die Relationen hätte:

$$12) \ldots \quad \begin{aligned} x + x_1 + x_2 &= 0 \\ y + y_1 + y_2 &= 0 \\ z + z_1 + z_2 &= 0. \end{aligned}$$

Durch diese Relationen wird die Zahl 18 der Integrationen, welche die Differential-Gleichungen 8) des allgemeinen Problemes verlangten, verringert auf 12 Integrationen, welche das durch Einführung der Differenzen der Coordinaten schon beschränkte Problem 11) noch zu leisten hat.

Von diesen 12 Integrationen vollführen die bekannten Principe der Mechanik vier, welche aufzusuchen unsre nächste Aufgabe sein wird.

V.

Setzen wir, um das System Gleichungen 11) abzukürzen:

$$13) \ldots \quad \begin{aligned} A &= \frac{x}{r^3} + \frac{x_1}{r_1^3} + \frac{x_2}{r_2^3} \\ B &= \frac{y}{r^3} + \frac{y_1}{r_1^3} + \frac{y_2}{r_2^3} \\ C &= \frac{z}{r^3} + \frac{z_1}{r_1^3} + \frac{z_2}{r_2^3}, \end{aligned}$$

multipliciren hierauf die Gleichungen 11) der Reihe nach mit x' y' z' und addiren, so erhalten wir:

14) . . . $x'x'' + y'y'' + z'z'' = -M\frac{r'}{r^2} + m\left\{Ax' + By' + Cz'\right\}.$

Dividiren wir diese Gleichung durch m und nehmen die Summe, so verschwinden, weil man auf Grund von 12) hat:

15) . . .
$$x' + x_1' + x_2' = 0$$
$$y' + y_1' + y_2' = 0$$
$$z' + z_1' + z_2' = 0.$$

die letzten Glieder, und wir erhalten:

16) . . . $$\sum \frac{(x'x'' + y'y'' + z'z'')}{m} = -M\sum \frac{r'}{mr^2}.$$

Durch Differentiation von 7) erhalten wir die Gleichung:

17) . . . $$\frac{dU}{dt} = -mm_1m_2\sum \frac{r'}{mr^2}.$$

Auf Grund der Gleichung 17) stellt sich die Gleichung 16) nun so dar:

18) . . . $$\frac{mm_1m_2}{2}\frac{d}{dt}\sum \frac{(x'x' + y'y' + z'z')}{m} = M\frac{dU}{dt},$$

und integrirt:

19) . . . $$\frac{mm_1m_2}{2}\sum \frac{(x'x' + y'y' + z'z')}{m} = MU + h.$$

Es entspricht dieses Integral demjenigen Integrale, welches in dem allgemeinen Probleme 8) aus dem Principe der Erhaltung der lebendigen Kraft hervorgeht, wenn es auch nicht mit demselben identisch ist.

Um die Integrale zu erhalten, welche in ähnlicher Art den Flächensätzen entsprechen, multipliciren wir die letzte Gleichung 11) mit y, ziehen die mit z multiplicirte vorletzte Gleichung ab und dividiren durch m. Alsdann wird:

$$\frac{y z'' - y'' z}{m} = y C - z B$$

Auf beiden Seiten der Gleichung die Summe genommen ergibt sich mit Rücksicht auf 12):

$$\sum \frac{(y z'' - y'' z)}{m} = 0,$$

eine Differential-Gleichung, deren erstes Integral ist:

$$\sum \frac{(y z' - y' z)}{m} = \alpha.$$

Auf diese Weise ergeben sich aus dem Systeme Differential-Gleichungen 11) die gesuchten drei Integrale:

20) . . .
$$\alpha = \sum \frac{(y z' - y' z)}{m}$$
$$\beta = \sum \frac{(z x' - z' x)}{m}$$
$$\gamma = \sum \frac{(x y' - x' y)}{m}.$$

Die aufgeführten Integrale 19) und 20) sind keine neuen Integrale, sondern zusammengesetzt aus den bekannten zehn Integralen des allgemeinen Problemes 8). Es bleiben darum auch in dem beschränkten Probleme 11) noch acht Integrationen zu machen übrig.

Wenn es nun gelingt durch geschickte Verbindung der Differential-Gleichungen 11) mit den Gleichungen 12), 15), 19), 20) eine Differential-Gleichung herzustellen, welche für sich integrirbar ist, so wird man wieder nicht wissen können, ob das Integral derselben eines von den noch fehlenden acht Integralen ist. Voraussichtlich wird das entdeckte Integral kein neues sein.

Diese Erwägungen haben auf das am Ende des ersten Paragraphen ausgesprochene Problem geführt. Die Lösung desselben beruht auf der Einführung einfacher Zeichen für gewisse symmetrisch gebildete Functionen, welche demnächst vorgeführt werden sollen.

VI.

Das in dem dritten Paragraphen bezeichnete engere Problem der drei Körper verlangt die Elimination sämmtlicher Variabelen aus den Differential-Gleichungen 11) mit Ausnahme der Radienvectoren und ihrer Differentialquotienten. Bei dieser Gelegenheit drängen sich symmetrisch gebildete Functionen der zu eliminirenden Variabelen auf, von welchen in erster Linie diejenigen Functionen hervorgehoben werden sollen, welche sich allein durch die Radienvectoren (nicht durch ihre Differentialquotienten) ausdrücken lassen. Dahin gehören die Functionen:

$$21) \ldots \quad xx + yy + zz = r^2 \ , \ x_1x_1 + y_1y_1 + z_1z_1 = r_1^2 \ , \ x_2x_2 + y_2y_2 + z_2z_2 = r_2^2,$$

für welche wir respective die neuen Zeichen wählen:

$$22) \ldots \qquad [00] = r^2 \qquad [11] = r_1^2 \qquad [22] = r_2^2$$

Multiplicirt man die Gleichungen 12) der Reihe nach mit x, y, z und addirt, so erhält man in Verfolg der eingeführten neuen Bezeichnung für symmetrisch gebildete Functionen wie $xx_1 + yy_1 + zz_1 = [01]$ die Gleichung:

$$[00] + [01] + [02] = 0,$$

woraus denn wieder das System Gleichungen hervorgeht:

$$23) \ldots \quad \begin{aligned} [00] + [01] + [02] &= 0 \\ [10] + [11] + [12] &= 0 \\ [20] + [21] + [22] &= 0, \end{aligned}$$

welche Gleichungen beweisen, dass die neu hinzugekommenen symmetrischen Functionen sich durch die Radienvectoren ausdrücken lassen, wie folgt:

$$24) \ldots \quad \begin{aligned} [12] &= \tfrac{1}{2}\{r^2 - r_1^2 - r_2^2\} \\ [20] &= \tfrac{1}{2}\{r_1^2 - r_2^2 - r^2\} \\ [01] &= \tfrac{1}{2}\{r_2^2 - r^2 - r_1^2\} \end{aligned}$$

Multiplicirt man die Gleichungen 11) der Reihe nach mit x, y, z und addirt, so erhält man, wenn man setzt: $xx'' + yy'' + zz'' = [0''0] = R$.

$$25) \ldots \quad [0''0] = R = -\frac{M}{r} + m\left\{\frac{[00]}{r^3} + \frac{[01]}{r_1^3} + \frac{[02]}{r_2^3}\right\}$$

An Stelle des hier ganz berechtigten Zeichens $[0''0]$ wählen wir jedoch aus Rücksicht auf die im nächsten Paragraphen nachfolgenden Zeichen für symmetrisch gebildete Functionen das Zeichen R, um mit demselben anzudeuten, dass R, sowie R_1 und R_2 Funktionen seien nur der Radienvectoren wie folgt:

$$26) \ldots \quad \begin{aligned} R &= -\frac{M}{r} + m\left\{\frac{[00]}{r^3} + \frac{[01]}{r_1^3} + \frac{[02]}{r_2^3}\right\} \\ R_1 &= -\frac{M}{r_1} + m_1\left\{\frac{[10]}{r^3} + \frac{[11]}{r_1^3} + \frac{[12]}{r_2^3}\right\} \\ R_2 &= -\frac{M}{r_2} + m_2\left\{\frac{[20]}{r^3} + \frac{[21]}{r_1^3} + \frac{[22]}{r_2^3}\right\}. \end{aligned}$$

Es wird sich später zeigen, dass die in 26) mit den Einzelnmassen multiplicirten Ausdrücke der Radienvectoren berufen sind in die abzuleitenden Differential-Gleichungen einzutreten. Aus diesem Grunde führen wir sie ein mit den Zeichen:

$$P = \frac{[00]}{r^3} + \frac{[01]}{r_1^3} + \frac{[02]}{r_2^3}$$

27) . . . $$P_1 = \frac{[10]}{r^3} + \frac{[11]}{r_1^3} + \frac{[12]}{r_2^3}$$

$$P_2 = \frac{[20]}{r^3} + \frac{[21]}{r_1^3} + \frac{[22]}{r_2^3}.$$

Differentiirt man diese Ausdrücke nach der Zeit, nicht total, sondern nur in so ferne dieselbe in den Zählern der Brüche enthalten ist, aus welchen die Ausdrücke bestehen, so erhält man wieder Ausdrücke, welche in die abzuleitenden Differential-Gleichungen eingehen. Wir führen dieselben schon hier ein mit den Bezeichnungen:

$$Q = \frac{[00]'}{r^3} + \frac{[01]'}{r_1^3} + \frac{[02]'}{r_2^3}$$

28) . . . $$Q_1 = \frac{[10]'}{r^3} + \frac{[11]'}{r_1^3} + \frac{[12]'}{r_2^3}$$

$$Q_2 = \frac{[20]'}{r^3} + \frac{[21]'}{r_1^3} + \frac{[22]'}{r_2^3}.$$

Auf Grund von 23) hat man nun:

29) . . . $$P + P_1 + P_2 = 0$$

30) . . . $$Q + Q_1 + Q_2 = 0.$$

Und es lassen sich die Gleichungen 26) kürzer so wiedergeben:

$$R = -\frac{M}{r} + m\,P$$

31) . . .
$$R_1 = -\frac{M}{r_1} + m_1 P_1$$

$$R_2 = -\frac{M}{r_2} + m_2 P_2.$$

Mit den durch die neuen Zeichen dargestellten symmetrischen Functionen, welche sich durch die Radienvectoren ausdrücken lassen, treten zum Zwecke der Elimination noch andere symmetrisch gebildete Functionen auf, die sich durch die Radienvectoren und deren Differentialquotienten ausdrücken lassen. Diese Functionen sollen demnächst vorgeführt werden.

VII.

Differentiirt man die Gleichungen 22), so erhält man:

32 . . . $[0'0] = \frac{1}{2}(r^2)'$, $[1'1] = \frac{1}{2}(r_1^2)'$, $[2'2] = \frac{1}{2}(r_2^2)'$.

Multiplicirt man die Gleichungen 12) der Reihe nach mit x', y', z' und addirt, oder multiplicirt man die Gleichungen 15) der Reihe nach mit x, y, z und addirt, und setzt dieses Verfahren fort, so erhält man:

$$[0'1] + [0'2] = -\tfrac{1}{2}(r^2)' \qquad [1'0] + [2'0] = -\tfrac{1}{2}(r^2)'$$

33) . . . $[1'2] + [1'0] = -\tfrac{1}{2}(r_1^2)' \qquad [2'1] + [0'1] = -\tfrac{1}{2}(r_1^2)'$

$$[2'0] + [2'1] = -\tfrac{1}{2}(r_2^2)' \qquad [0'2] + [1'2] = -\tfrac{1}{2}(r_2^2)'.$$

Diese sechs Gleichungen reichen nicht aus, um die sechs bezeichneten symmetrischen Functionen der Coordinaten durch die Differentialquotienten der Quadrate der Radienvectoren auszudrücken, weil die Summe der drei ersten Gleichungen gleich der Summe der drei letzten ist. Zu ihrem Ausdrucke bedarf es sogar den dritten Differential-

quotienten der Quadrate der Radienvectoren, wie es sich in dem folgenden Paragraphen zeigen wird.

Bemerkt man aber, dass man durch Subtraktion der nebeneinander stehenden Gleichungen 33) erhält:

$$34) \ldots \qquad [1'0] - [0'1] = [2'1] - [1'2] = [0'2] - [2'0],$$

so ist ersichtlich, dass durch Einführung einer neuen symmetrischen Function L der Coordinaten:

$$35) \ldots \qquad {}_2L = [1'0] - [0'1],$$

die genannten sechs symmetrischen Functionen durch die ersten Differentialquotienten der Quadrate der Radienvectoren und durch die neue Function L sich ausdrücken lassen, wie folgt:

$$36) \ldots \qquad \begin{aligned} [1'0] &= \tfrac{1}{2}[10]' + L \quad , \quad [0'1] = \tfrac{1}{2}[01]' - L \\ [2'1] &= \tfrac{1}{2}[21]' + L \quad , \quad [1'2] = \tfrac{1}{2}[12]' - L \\ [0'2] &= \tfrac{1}{2}[02]' + L \quad , \quad [2'0] = \tfrac{1}{2}[20]' - L. \end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen oder aus 34) erkennt man sogleich, dass die Function L eine alternirende Function der drei Körper ist. Denn vertauscht man zwei Körper mit einander, so bleibt L ungeändert, nimmt aber das entgegengesetzte Vorzeichen an.

Die alternirende Eigenschaft der Funktion L lässt sich durchsichtiger noch an ihrem Differentialquotienten nachweisen, der durch die Radienvectoren selbst ausgedrückt werden kann.

Differentiirt man nämlich die Gleichung 35) nach der Zeit, so erhält man:

$${}_2L' = [1''0] - [0''1].$$

Auf Grund von 11) hat man:

$$[0''1] = -M\frac{[01]}{r^3} + m\left\{\frac{[01]}{r^3} + \frac{[11]}{r_1^3} + \frac{[21]}{r_2^3}\right\}$$

$$[1''0] = -M\frac{[01]}{r_1^3} + m_1\left\{\frac{[00]}{r^3} + \frac{[01]}{r_1^3} + \frac{[02]}{r_2^3}\right\}.$$

Zieht man nun die erste Gleichung von der zweiten ab und gibt den Grössen [00] und [11] ihre Werthe aus 23), so erhält man:

37) . . . $$_2L' = m\,[12]\left(\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_2^3}\right) + m_1\,[20]\left(\frac{1}{r_2^3} - \frac{1}{r^3}\right) + m_2\,[01]\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r_1^3}\right).$$

Differentiirt man die erste Gleichung 21) zwei Mal, so erhält man mit Berücksichtigung von 25) und 31) die Gleichung:

38) . . . $$x'x' + y'y' + z'z' = \tfrac{1}{2}(r^2)'' + \frac{M}{r} - mP.$$

Hieraus ergeben sich nun die Ausdrücke der symmetrischen Functionen:

39) . . .
$$[0'0'] = \tfrac{1}{2}(r^2)'' + \frac{M}{r} - m\,P$$

$$[1'1'] = \tfrac{1}{2}(r_1^2)'' + \frac{M}{r_1} - m_1 P_1$$

$$[2'2'] = \tfrac{1}{2}(r_2^2)'' + \frac{M}{r_2} - m_2 P_2.$$

Multiplicirt man die Gleichungen 15) respective mit x', y', z', addirt und setzt dieses Verfahren fort, so erhält man:

40) . . .
$$[0'0'] + [0'1'] + [0'2'] = 0$$

$$[1'0'] + [1'1'] + [1'2'] = 0$$

$$[2'0'] + [2'1'] + [2'2'] = 0.$$

Diese Gleichungen beweisen, dass auch die symmetrischen Functionen von der Form $[0'1']$ sich durch die Quadrate der Radienvectoren und ihre Differentialquotienten bis zur zweiten Ordnung ausdrücken lassen. Denn aus diesen Gleichungen ergibt sich:

$$41) \ldots \quad \begin{aligned} [1'2'] &= \tfrac{1}{2}\{[0'0'] - [1'1'] - [2'2']\} \\ [2'0'] &= \tfrac{1}{2}\{[1'1'] - [2'2'] - [0'0']\} \\ [0'1'] &= \tfrac{1}{2}\{[2'2'] - [0'0'] - [1'1']\}. \end{aligned}$$

Stellen wir nun die Resultate dieses und des vorhergehenden Paragraphen kurz zusammen, so lässt sich dieses sagen, dass alle durch die neue Bezeichnung eingeführten symmetrischen Functionen sich ausdrücken lassen durch die Radienvectoren und ihre Differentialquotienten bis zur zweiten Ordnung mit Ausnahme der Functionen von der Form $[0'1]$, welche abgesehen von den Radienvectoren und ihren ersten Differentialquotienten, in 36) abhängig gemacht worden sind allein von der durch Gleichung 35) definirten alternirenden Function L.

Diese Functiou L lässt sich nicht mehr ausdrücken durch die Radienvectoren und ihre Differentialquotienten niederer Ordnung. Wie wir im folgenden Paragraphen sehen werden bedarf es dazu noch der Differentialquotienten der dritten Ordnung.

Aber an Stelle eines einzigen Ausdruckes für die alternirende Function L wird die Symmetrie sogleich drei verschiedene Ausdrücke ergeben, aus deren Gleichsetzung zwei Differential-Gleichungen des engeren Problemes hervorgehen von der dritten Ordnung und zwar ohne Integration.

VIII.

Wenn man die Gleichung 38) differentiirt und durch 2 dividirt, so erhält man:

$$42) \ldots \quad x'x'' + y'y'' + z'z'' = \tfrac{1}{4}\frac{d}{dt}\left\{(r^2)'' + \frac{2M}{r}\right\} - \frac{m}{2}P',$$

eine Gleichung, deren linker Theil gleich ist dem linken Theile der Gleichnng 14). Setzt man die rechten Theile der Gleichungen einander gleich, so wird:

$$-\frac{Mr'}{r^2}+m\left\{Ax'+By'+Cz'\right\}=\tfrac{1}{4}\frac{d}{dt}\left\{(r^2)''+\frac{2M}{r}\right\}-\frac{m}{2}P',$$

und wenn man für A, B, C die Werthe setzt aus 13):

$$-\frac{Mr'}{r^2}+m\left\{\frac{[0'0]}{r^3}+\frac{[0'1]}{r_1^3}+\frac{[0'2]}{r_2^3}\right\}=\tfrac{1}{4}\frac{d}{dt}\left\{(r^2)''+\frac{2M}{r}\right\}-\frac{m}{2}P'.$$

oder da man hat: $-\frac{Mr'}{r^2}=\frac{1}{4}\frac{d}{dt}\left\{\frac{4M}{r}\right\}$ und $[0'0]=\frac{1}{2}[00]'$, so geht die letzte Gleichung über in:

$$\frac{[0'1]}{r_1^3}+\frac{[0'2]}{r_2^3}=\frac{1}{4m}\frac{d}{dt}\left\{(r^2)''-\frac{2M}{r}\right\}-\frac{1}{2}P'-\frac{1}{2}\frac{[00]'}{r^3}.$$

Setzt man in diese Gleichung die Werthe von [0'1] und [0'2] aus 36) ein, so erhält man:

$$-L\left\{\frac{1}{r_1^3}-\frac{1}{r_2^3}\right\}=\frac{1}{4m}\frac{d}{dt}\left\{(r^2)''-\frac{2M}{r}\right\}-\frac{1}{2}P'-\frac{1}{2}\left\{\frac{[00]'}{r^3}+\frac{[01]'}{r_1^3}+\frac{[02]'}{r_2^3}\right\}.$$

Multiplicirt man mit -2, so wird mit Rücksicht auf 28):

43) . . . $$2L\left\{\frac{1}{r_1^3}-\frac{1}{r_2^3}\right\}=-\frac{1}{2m}\frac{d}{dt}\left\{(r^2)''-\frac{2M}{r}\right\}+P'+Q.$$

Eine andere bemerkenswerthe Gestalt erhält diese Gleichung, wenn man die Gleichungen 4) und 5) benutzt.

Aus der Gleichung 43) geht nun ein System von drei Gleichungen hervor durch cyclische Vertauschung der Indices 0, 1, 2. Dieses System

lässt sich sehr einfach wiedergeben, wenn wir die Bezeichnung einführen:

$$44) \ldots \quad v = \frac{n}{m}\left\{(r^2)'' - \frac{2M}{r}\right\} + \frac{n_1}{m_1}\left\{(r_1^2)'' - \frac{2M}{r_1}\right\} + \frac{n_2}{m_2}\left\{(r_2^2)'' - \frac{2M}{r_2}\right\},$$

bei welcher Gelegenheit wir zu künftigen Gebrauch gleich auf einen ähnlich gebildeten Ausdruck $\mathcal{V}$, ebenfalls der zweiten Ordnung, aufmerksam machen:

$$45) \ldots \quad \mathcal{V} = \frac{1}{m}\left\{(r^2)'' - \frac{2M}{r}\right\} + \frac{1}{m_1}\left\{(r_1^2)'' - \frac{2M}{r_1}\right\} + \frac{1}{m_2}\left\{(r_2^2)'' - \frac{2M}{r_2}\right\}.$$

Man hat demnach folgende drei Ausdrücke für die alternirende Funktion L:

$$46) \ldots \quad \begin{aligned} {}_2L\left(\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_2^3}\right) &= -\frac{1}{2}\frac{d^2 v}{dn\, dt} + P' + Q \\ {}_2L\left(\frac{1}{r_2^3} - \frac{1}{r^3}\right) &= -\frac{1}{2}\frac{d^2 v}{dn_1\, dt} + P_1' + Q_1 \\ {}_2L\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r_1^3}\right) &= -\frac{1}{2}\frac{d^2 v}{dn_2\, dt} + P_2' + Q_2. \end{aligned}$$

Die beiden letzten Ausdrücke beweisen, dass L nicht unendlich wird, wenn man die Masse m gleich 0 setzt. Der erste Ausdruck von L in 46) oder 43) wird nur scheinbar unendlich, wenn man m gleich 0 setzt, denn in diesem Falle reducirt sich das Problem auf das Problem zweier Körper und es verschwindet nach 1) und 4) auch der Zähler jenes Bruches dessen Nenner m ist. Der erste Ausdruck für L wird demnach unbestimmt, wenn man m gleich 0 setzt.

Die angegebenen Ausdrücke 46) sind unsymmetrisch. Um einen symmetrischen Ausdruck für das Produkt zweier alternirenden Functionen zu erhalten, von welchen die eine L ist, multipliciren wir die Gleichungen 46) der Reihe nach mit $m[12]$, $m_1[20]$, $m_2[01]$ und

addiren. In Berücksichtigung von 37) erhalten wir dann:

$$47)\ \ldots \quad {}_4LL' = -\frac{m}{2}[12]\frac{d^2v}{dn\,dt} - \frac{m_1}{2}[20]\frac{d^2v}{dn_1\,dt} - \frac{m_2}{2}[01]\frac{d^2v}{dn_2\,dt}$$
$$+ m[12]\left\{P' + Q\right\} + m_1[20]\left\{P_1' + Q_1\right\} + m_2[01]\left\{P'_2 + Q_2\right\}.$$

Um nun die alterirende Function L in symmetrischer Weise aus den Gleichungen 46) zu eliminiren, addiren wir die Gleichungen und erhalten auf Grund von 29) und 30):

$$0 = \frac{d^2v}{dn\,dt} + \frac{d^2v}{dn_1\,dt} + \frac{d^2v}{dn_2\,dt},$$

Da aber nach 44) und 45) ist:

$$\mathcal{V} = \frac{dv}{dn} + \frac{dv}{dn_1} + \frac{dv}{dn_2},$$

so hat man die Differential-Gleichung dritter Ordnung zwischen den Radienvectoren und der Zeit:

$$48)\ \ldots \qquad o = \frac{d\mathcal{V}}{dt}.$$

Die zweite gesuchte Differential-Gleichung ebenfalls der dritten Ordnung erhält man, wenn man die Gleichungen 46) respective mit $\frac{2}{r^3}$, $\frac{2}{r_1^3}$, $\frac{2}{r_2^3}$ multiplicirt und addirt:

$$49)\ \ldots \quad \frac{1}{r^3}\frac{d^2v}{dn\,dt} + \frac{1}{r_1^3}\frac{d^2v}{dn_1\,dt} + \frac{1}{r_2^3}\frac{d^2v}{dn_2\,dt}$$
$$= \frac{2}{r^3}\left\{P' + Q\right\} + \frac{2}{r_1^3}\left\{P_1' + Q_1\right\} + \frac{2}{r_2^3}\left\{P_2' + Q_2\right\}.$$

Als Controlle der vorangegangenen Entwickelungen mag die Bemerkung dienen, dass sowohl die Gleichung 48) als 49) übergeht in die Differential-Gleichung 1), wenn man eine der Massen gleich 0 setzt.

Die beiden letzten Differential-Gleichungen dritter Ordnung haben sich ergeben ohne Integration. Sie lassen sich daher betrachten als zweckmässige Zusammenstellungen der Differential-Gleichungen des allgemeinen Problemes.

Es bleibt demnach noch übrig eine dritte Differential-Gleichung zwischen den Radienvectoren und der Zeit ebenfalls der dritten Ordnung ohne Integration aufzusuchen.

IX.

Es wird Vortheil bringen den bis dahin eingeschlagenen Weg zu verlassen und von wirklichen Integralen des allgemeinen Problemes auszugehen, denn wir haben es ja in der Gewalt durch Differentiation die Integrations-Constanten wieder verschwinden zu lassen.

Zur Herleitung der dritten und letzten Differential-Gleichung des engeren Problemes werden wir uns der drei Integrale 20) mit den willkürlichen Constanten α, β, γ, oder, präciser ausgedrückt, des einen Integrales bedienen, dessen Integrations-Constante C sich aus den angegebenen zusammensetzt wie folgt:

$$50) \ldots \qquad C^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2.$$

Wir haben demnach auf Grund von 20):

$$51) \ldots \quad C^2 = \left(\sum \frac{(y z' - y' z)}{m}\right)^2 + \left(\sum \frac{(z y' - z' x)}{m}\right)^2 + \left(\sum \frac{(x y' + x' y)}{m}\right)^2$$

Ordnet man diese Gleichung nach den umgekehrten Quadraten und Produkten der Massen, so sieht man, dass der Coefficient von $\frac{1}{m^2}$ in der Entwickelung ist:

$$(yz' - y'z)^2 + (zx' - z'x)^2 + (xy' - x'y)^2$$

und dass der Coefficient von $\frac{2}{m m_1}$ ist:

$$(yz' - y'z)(y_1z_1' - y_1'z_1) + (zx' - z'x)(z_1x_1' - z_1'x_1) + (xy' - x'y)(x_1y_1' - x_1'y_1)$$

und so ferner.

Dieses sind Formen, für welche die Determinanten-Theorie für unsere Zwecke passendere Formen einführen lehrt, nämlich für den ersten Ausdruck folgenden:

$$(xx + yy + zz)(x'x' + y'y' + z'z') - (xx' + yy' + zz')^2$$

und für den zweiten:

$$(xx_1 + yy_1 + zz_1)(x'x_1' + y'y_1' + z'z_1') - (x'x_1 + y'y_1 + z'z_1)(xx_1' + yy_1' + zz_1')$$

Machen wir nun von den für die symmetrischen Functionen eingeführten Zeichen Gebrauch, so haben wir:

52) . . .
$$(yz' - y'z)^2 + (zx' - z'x)^2 + (xy' - x'y)^2 = [00][0'0'] - [0'0]^2$$
$$(yz' - y'z)(y_1z_1' - y_1'z) + (zx' - z'x)(z_1x_1' - z_1'x_1) + (xy' - x'y)(x_1y_1' - x_1'y_1)$$
$$= [01][0'1'] - [0'1][1'0]$$

und so weiter.

Man hat demnach folgende Entwickelung der Gleichung 51):

$$C^2 = \frac{1}{m^2}\left\{[00][0'0'] - [0'0]^2\right\} + \frac{2}{m m_1}\left\{[01][0'1'] - [0'1][1'0]\right\} + \cdots$$

Setzt man in dieselbe die Werthe von $[0'1]$, $[1'0]$ etc. aus 36) und multiplicirt mit -1, so erhält man:

53*) . . . $$\frac{2M}{m m_1 m_2} L^2 - C^2 =$$

$$= -\frac{1}{m^2}\left\{[00][0'0'] - [0'0]^2\right\} - \frac{2}{m m_1}\left\{[01][0'1'] - [01]'[10]'\right\} - \cdots$$

Dieses würde, da nach 47) L ein Ausdruck der dritten Ordnung ist, die gesuchte dritte Differential-Gleichung zwischen den Radienvectoren und der Zeit sein, wenn sie nicht die Constante C^2 der Integration enthielte. Um aus ihr die verlangte Differential-Gleichung des engeren Problemes ohne willkürliche Constante abzuleiten, differentiiren wir dieselbe nach der Zeit:

54) . . . $$\frac{4M}{m m_1 m_2} L L' =$$

$$= -\frac{1}{m^2}\frac{d}{dt}\left\{[00][0'0'] + [0'0]^2\right\} - \frac{2}{m m_1}\frac{d}{dt}\left\{[01][0'1'] - [01]'[10]'\right\} - \cdots$$

Da der rechte Theil der Gleichung 53*) von der zweiten Ordnung ist, so wird der rechte Theil der Gleichung 54) von der dritten Ordnung. Die Gleichung selbst ist von der dritten Ordnung weil nach 47) das symmetrische Produkt LL' von der dritten Ordnung ist.

Auch hier wird man bemerken, dass die Differential-Gleichung 54) übergeht in 1), wenn man eine der Massen gleich 0 setzt.

Die vollständige Lösung des Dreieck-Problemes der drei Körper beruht demnach auf der Integration der drei Differential-Gleichungen 48) 49) 54) dritter Ordnung, zu deren Aufstellung es keiner Integration der Differential-Gleichungen des allgemeinen Problemes bedurfte.

Wenn man die Principe der Mechanik walten lässt, welche Integrale liefern, so liegen zwei Integrale des Systems von drei Differential-Gleichungen des engeren Problemes zu Tage, nämlich das aus 48) hervorgehende Integral von der zweiten Ordnung:

55*) . . . $$4h = \mathcal{V}$$

mit der willkürlichen Constante h, und die Differential-Gleichung 53*), vorläufig von der dritten Ordnung, mit der willkürlichen Constante C.

Da die Differential-Gleichungen 48) 49) 54) sämmtlich linear sind in Rücksicht auf die dritten Differentialquotienten der Quadrate der Radienvectoren, so kann man lesztere leicht ausdrücken durch die Differentialquotienten niederer Ordnung. Setzt man ihre Werthe in den Ausdruck 47) für L, so wird derselbe von der zweiten Ordnung und die Differential-Gleichung 53*) selbst von der zweiten Ordnung. Diese Differential-Gleichung 53*) lässt sich demnach betrachten als ein Integral der drei Differential-Gleichungen des engeren Problemes mit der willkürlichen Constante C der Integration von der zweiten Ordnung.

Um die Richtigkeit der beiden Integral-Gleichungen 55*) und 53*) zu prüfen, setzen wir für h und C respective $\frac{h}{m}$ und $\frac{C}{m}$ und lassen m verschwinden. Die erstere Gleichung geht dann über in die Gleichung 2), die letztere in Berücksichtigung des im vorhergehenden Paragraphen ausdrücklich aufgeführten Umstandes, dass L nicht unendlich wird, wenn $m = 0$, in die Gleichung 3).

Die durchgeführte Untersuchung fassen wir nun kurz zusammen in dem Theoreme:

Theorem.

Wenn man das allgemeine Problem der drei Körper beschränkt auf die Gestalt des Dreieckes, dessen Ecken die drei Körper bilden, so hängt die Lösung des engeren Problemes ab von drei Differential-Gleichungen der dritten Ordnung 48) 49) 54). Wenn man aber die Principe der Mechanik voraussetzt, welche Integrale liefern, so lässt sich dasselbe abhängig machen von zwei Differential-Gleichungen 55*) 53*) der zweiten Ordnung und einer Differential-Gleichung 49) dritter Ordnung.

München. Juli 1871.

Anmerkung.

Das Theorem ist bekannt durch eine von Lagrange verfassten und von der Pariser Akademie gekrönten Preis-Schrift: ‹Essai d'une nouvelle Méthode pour résoudre le Probléme des trois Corp› aus dem Jahre 1772. Da der Verfasser von Vorne herein, wenn auch mit sichtbarem Widerstreben, die Symmetrie der Aufgabe fallen liess, so konnte er kaum zu den, den Umständen nach einfachen, Resultaten gelangen, welche vorliegen. In späteren Jahren ist Lagrange nicht wieder auf sein Problem zurückgekommen. Es ist dieses um so mehr zu beklagen, als gerade er den Gebrauch der Symmetrie in einem Grade ausgebildet hat, wie kein Mathematiker vor ihm.

Ein

Apparat zur mechanischen Lösung der nach Pothenot, Hansen u. A. benannten geodätischen Aufgaben

von

Carl Max Bauernfeind.

Mit einer Steindrucktafel.

Ein

Apparat zur mechanischen Lösung der nach Pothenot, Hansen u. A. benannten geodätischen Aufgaben

von

Carl Max Bauernfeind.

Wenn es Aufgabe der Geodäsie ist, die gegenseitige Lage von Punkten der Erdoberfläche zu bestimmen, so muss ihr jedes Hilfsmittel, welches diese Bestimmung erleichtert oder abkürzt, willkommen sein, und um so mehr dann, wenn mit diesen Vortheilen in vielen Fällen zugleich eine grössere Genauigkeit der Arbeit erreicht wird. Der hier zu beschreibende Apparat ist ein solches Hilfsmittel, da er die direkte Lösung der oben bezeichneten Aufgaben ohne jede Construction durch sofortige Verzeichnung von Kreisen möglich macht, welche entweder durch drei gegebene Punkte gehen oder über einer Sehne von gegebener Länge einen bestimmten Peripheriewinkel fassen.

Die Erfindung dieses Apparats beruht auf der Umkehrung des geometrischen Satzes, dass in einem Kreise alle auf dem nämlichen Bogen stehenden Peripheriewinkel einander gleich sind. Es wird demnach auch der Scheitel eines festen Winkels, dessen Schenkel an den Endpunkten einer Sehne hingleiten, einen Kreis beschreiben, und da, wenn drei Punkte gegeben sind, immer einer als Scheitel dieses Winkels angesehen werden kann, während die Verbindung der beiden anderen als Sehne erscheint, so folgt von selbst, dass die Lösung der Aufgabe:

durch drei gegebene Punkte einen Kreis zu legen, leicht darauf zurückgeführt werden kann: über einer gegebenen Sehne einen Kreisbogen zu beschreiben, welcher einen bestimmten Peripheriewinkel fasst.

Aus der hier dargelegten Idee der Erfindung ergibt sich, dass der in Rede stehende Apparat im Allgemeinen die Gestalt eines Zirkels haben muss, dessen Schenkel sich auf jeden Winkel einstellen lassen und der nicht, wie der gewöhnliche Zirkel, in vertikaler Stellung, sondern in horizontaler Lage gebraucht wird. Und da dieser Zirkel zunächst für die Lösung der Pothenot'schen Aufgabe, welche auch unter dem Namen „Rückwärtseinschneiden auf drei Punkte" bekannt ist, erfunden wurde und zur Lösung aller geodätischen Aufgaben dient, welche unter den Begriff des Einschneidens fallen, so kann man ihn füglich „Einschneidezirkel" nennen, wie von nun an geschehen soll.

Dieser Zirkel ist nach dem für die geodätische Sammlung der hiesigen k. polytechnischen Schule aus Stahl[1]) hergestellten Exemplare in Fig. 1 perspektivisch und in Fig. 2 geometrisch in halber natürlicher Grösse abgebildet, und es sind in beiden Figuren gleiche Theile mit gleichen Buchstaben bezeichnet.

Die beiden Schenkel A und B bewegen sich in dem Gewinde C wie die Schenkel eines gewöhnlichen Zirkels und können nach Auslösung der unendlichen Schraube s durch grobe Drehung in alle möglichen Lagen zwischen 0 und 250^0 gebracht werden. Ist durch diese Drehung die erforderliche gegenseitige Neigung der Winkelschenkel nahezu erreicht, so kann man mit der nunmehr wieder eingreifenden Schraube s den Schenkel B gegen A fein bewegen und so den Zirkel auf einen gegebenen Winkel genau einstellen.

Die erwähnte Auslösungsvorrichtung D ist sehr einfach. Auf der mit dem Schenkel B fest verbundenen Platte a e (Fig. 1) befinden sich nämlich zwei Drehpunkte: einer (a) für die Schraube, ein anderer (b) für den Hebel c, und ausserdem zwei Federn: eine (d) um den Hebel in der Auslösungsstellung mittels einer Nase zurückzuhalten und eine

1) Für die genannte Sammlung ist der Einschneidezirkel auch in Messing ausgeführt worden. Ich finde zwischen beiden Ausführungen bis jetzt keinen wesentlichen Unterschied; nach längerem Gebrauche mögen indessen die messingenen Schenkel durch die Reibung an den Anschlagnadeln sich etwas mehr abnützen als die von Stahl, wesshalb dieses härtere Metall vorzuziehen sein dürfte.

andere (e) zum Andrücken der Schraube gegen den mit einem entsprechenden Gewinde versehenen Rand des Zirkelkopfs bei der Einlösungsstellung.

Um die Wirkungsweise dieser Vorrichtung noch anschaulicher zu machen, dient die schematische Fig. 3. In derselben stellen die ausgezogenen Linien die durch Anziehen des Hebels c gegen den Zirkelkopf bewirkte Auslösung und die punktirten Linien die durch Niederdrücken der Feder d hervorgerufene Einrückung der Schraube s vor: bei der Auslösung bewegt sich die Schraube um den Winkel $kak' = \alpha$ vom Kopfrande weg, und bei der Einrückung kommt sie diesem Rande um gleichviel wieder näher, um in dessen Gewinde einzugreifen.

Damit man auf dem Felde den Zirkel sofort auf einen durch Signale bezeichneten Winkel genau einstellen kann, befindet sich auf jedem Schenkel ein Diopter. Diese Absehen haben das Ocular o, welches entweder ein kleines Loch (Fig. 1) oder eine scharfe Kante (Fig. 4) ist, gemeinsam. Die Kante o, welche nur bei stark geneigtem Boden zum Visiren benützt wird, und ebenso der Mittelpunkt des kreisrunden Oculars fallen selbstverständlich mit der Zirkelaxe zusammen, und das letztere Ocular muss jedesmal in die Richtung gedreht werden, nach der visirt werden soll: zuerst also in die Richtung des Schenkels A mit dem Diopterflügel f, und dann in die des Schenkels B mit dem Diopterflügel g. Die Visirebenen of und og schneiden sich beide in der Axe des unten in eine feine Spitze p ausgehenden Zirkelgewinds und jede läuft in dem Abstande einer halben Nadeldicke der anliegenden inneren genau abgeschliffenen Seitenfläche eines der Schenkel A und B parallel. (Nach gemachtem Gebrauche werden die Diopterflügel auf diese Schenkel niedergeklappt).

Eine für den Einschneidezirkel unentbehrliche Hilfsvorrichtung sind die Anschlagnadeln (m, n), welche in den Endpunkten der Sehne, worüber ein Kreis mit gegebenem Peripheriewinkel (m p n) zu beschreiben ist, senkrecht auf das Zeichnungsbrett gestellt werden müssen, damit an ihnen die Zirkelschenkel hingleiten und sich drehen können. Diese Nadeln (feinste englische Nähnadeln) stecken in kleinen senkrechten Messingcylindern (i, i) und ragen unten etwa 3, oben 10 Millimeter über deren Grundflächen hervor. Auf den oberen Grundflächen ruhen die

Zirkelschenkel, wenn ein Kreis beschrieben wird. Aus der Bedingung, dass diese Schenkel sowohl bei diesem Geschäfte als bei der Winkelaufnahme der Zeichnungstafel parallel sein müssen, ergibt sich die Forderung gleicher Höhe der Cylinder i, der elfenbeinernen Füsse h und des den Kreis beschreibenden Stiftes p.

Für einen andern, mit der Verzeichnung von Kreisen nicht zusammenhängenden und später näher zu erörternden Zweck sind die Zirkelschenkel von ihrer Drehaxe aus in halbe Centimeter eingetheilt: diese Eintheilung dient nämlich in Verbindung mit der Winkelmessung zur systematischen Aufstellung des Messtisches über einem gegebenen Punkt und nach einer gegebenen Richtung.

Der Einschneidezirkel ist in ein Gehäuse eingeschlossen, das dem eines gewöhnlichen Zirkels gleicht: für den hier beschriebenen Apparat ist es 26 cm lang, 5 cm breit und 3 cm dick; es lässt sich also leicht verpacken und transportiren. Die Kosten eines stählernen Einschneidezirkels mit Etui berechnet der am geodätischen Institute der hiesigen polytechnischen Schule angestellte Mechaniker Heinrich Mayer mit 21 fl. oder 12 Thlr.

Die Prüfung des Einschneidezirkels hat sich über folgende Punkte zu erstrecken:

1) ob die inneren Wände der Winkelschenkel genau eben und senkrecht zu den oberen Wänden sind;
2) ob die durch die oberen Schenkelflächen gebildete Instrumentenebene der durch die Füsse und dem Zeichenstift bestimmten Unterlagsebene parallel ist;
3) ob die Visirebenen zur Instrumentenebene senkrecht stehen und den anliegenden inneren Zirkelwänden parallel laufen;
4) ob das Ocular des Diopters in der Axe des Zirkelgewindes liegt;
5) ob die Anschlagnadeln auf ihren Cylindern senkrecht stehen und diese die richtige Höhe haben.

Was die erste dieser fünf Untersuchungen betrifft, so kann sie mit bekannten mechanischen Hilfsmitteln leicht ausgeführt werden; es wird sich aber kaum jemals ein erheblicher Fehler in dieser Beziehung ergeben, da die Herstellung von parallelepipedischen Stäben zu den elementarsten und am meisten geübten Arbeiten des Mechanikers gehört.

Die zweite Untersuchung führt man in derselben Weise mit Hilfe von Dioptern auf einem Messtischblatte aus, wie die Prüfung des Spiegelsextanten in Bezug auf die Forderung, dass die Visirlinie des Fernrohrs der Sextantenebene parallel sein soll. Ein allenfallsiger Fehler würde sich durch Abschleifen der Stützen des untersuchten Instrumentes beseitigen lassen.

Die dritte Untersuchung zerfällt in zwei Theile, von denen der erste (ob die Visirebenen senkrecht zur Instrumentenebene stehen) von der gleichnamigen Prüfung eines Diopters sich nicht unterscheidet, während der zweite Theil (ob die Visirebenen den anliegenden inneren Schenkelflächen parallel laufen) sich in genügender Weise dadurch erledigen lässt, dass man die Schenkel des Zirkels, soweit es die Diopterflügel gestatten, aneinander legt und zusieht, ob erstens die inneren Schenkelflächen überall gleichweit (um die Nadeldicke) von einander abstehen, und ob zweitens die vereinigten Visirebenen der Diopter den Schlitz zwischen den Zirkelschenkeln halbiren. Ein durch diese Untersuchungen festgestellter Fehler wird an den Diopterflügeln verbessert.

Ob viertens das Diopter-Ocular in der Axe des Zirkelgewinds liegt, d. h. ob keine Excentricität der Visirlinie stattfindet, kann man wie folgt untersuchen. Es sei F in Fig. 5 das Objectiv eines Diopters, O dessen Ocular, A die Axe des Zirkelgewinds und OFG die Visirlinie nach einem Gegenstand G. Die Spitze A werde in das Papier des Messtisches gedrückt. Dreht man das Ocular O in der Axe A um 180^0, so kommt es zunächst nach O; stellt man aber damit auf G ein, so muss es um den Winkel $O'FO = 2\delta$ gedreht werden, wodurch die Spitze A nach A' kommt. Wird dieser Punkt wieder markirt, so zeigt der Abstand A A' die doppelte Excentricität $e = AO$ an. Eine solche Excentricität lässt sich nur durch ein neues Ocular verbessern, ihr Einfluss aber sofort aus dem Dreiecke AOF berechnen, worin die eine Seite AO die Excentricität e des Oculars und die andere AF die Länge l des Diopters ist. Für $e = \frac{1}{4}\,^{mm}$ und $l = 25\,^{cm} = 250\,^{mm}$ wäre $\delta = 206'' = 3'\,26''$; ein solcher grober Fehler wird aber wohl von keinem Mechaniker begangen werden.

Die fünfte Anforderung kann in der Praxis ebenfalls sehr leicht erfüllt werden; ob es geschehen wird theils nach Nr. 2, theils dadurch

untersucht, dass man zusieht, ob die Nadel mit ihrem durch die obere Cylinder-Endfläche erzeugten Spiegelbilde in einer Geraden liegt oder nicht. Ein geneigtes Spiegelbild würde auf eine schiefe Stellung der Nadel deuten und deren erneute verbesserte Einsetzung in den Metallcylinder fordern.

Wir gehen nun zur Anwendung des als vollständig berichtigt vorausgesetzten Einschneidezirkels über.

1. Mechanische Lösung der Pothenot'schen Aufgabe.

Die Aufgabe, um deren mechanische Lösung es sich hier handelt, rührt bekanntlich nicht von Pothenot, nach dem sie benannt wird, sondern von Snellius, dem Entdecker des Lichtbrechungsgesetzes und Erfinder der Triangulation her. Gleichwohl behalten wir den einmal üblichen Namen bei, da er bei dem Fachmanne sofort die Vorstellung weckt, welche unserer Aufgabe entspricht, die Vorstellung nämlich, dass die Lage eines Punktes D aus der bekannten Lage dreier anderen Punkte A, B, C zu bestimmen ist. Die Pothenot'sche Aufgabe ist eine der wichtigsten in der praktischen Geometrie und hat desshalb eine grosse Literatur hervorgerufen; am meisten beschäftigten sich die Geometer mit ihrer Lösung auf graphischem Wege. In diesem Falle lässt sich die vorliegende Aufgabe auch so aussprechen: es soll (Fig. 6) auf dem Messtische ein Viereck a b c d construirt werden, welches einem Vierecke ABCD in der Natur ähnlich ist, von dem die Seiten AB, BC und die Winkel $ADB = \mu$ und $BDC = \nu$ bekannt sind.

Die einfachste graphische Lösung der vorliegenden Aufgabe geht aus der Betrachtung hervor, dass der Punkt D durch die zwei Sehwinkel μ und ν, unter denen die Seiten AB und BC des Dreiecks ABC von ihm aus erscheinen, charakterisirt ist: kein anderer Punkt gibt gleichzeitig dieselben zwei Sehwinkel, den seltenen Fall ausgenommen, dass D mit A, B, C auf einem Kreise oder in einer Geraden liegt. Man wird daher einen geometrischen Ort des Punktes d auf dem Messtische erhalten, wenn man über a b als Sehne einen Kreis beschreibt, der den Peripheriewinkel μ fasst; ein zweiter geometrischer Ort des Punktes d ist ein Kreis über b c, welcher durch den Peripheriewinkel ν bedingt

ist. Da nun der Punkt d auf diesen beiden Kreisen liegen muss, so kann er sich nur in ihrem Durchschnitt befinden, und er lässt sich folglich finden, wenn man auf dem Felde die Winkel μ, ν misst und dann die beiden Kreise a b d und b c d construirt.

Dieses einfache direkte Verfahren, den Punkt d zu finden, wird aber bekanntlich nicht angewendet, weil man auf dem Messtische keine umständlichen Constructionen ausführen will und auch der Fall eintreten kann, dass der Mittelpunkt eines zu beschreibenden Kreises über das Messtischblatt hinausfällt, wodurch das Ziehen dieses Kreises unmöglich wird. Mein Einschneidezirkel soll diesem direkten Verfahren in der Praxis Geltung verschaffen, indem er gestattet, ohne jede Construction die geometrischen Oerter von d zu zeichnen und folglich auch den Punkt d selbst zu bestimmen.

Es sei der Messtisch, welcher das dem Dreieck ABC (Fig. 7) ähnliche Bilddreieck abc enthält, über dem Punkte D horizontal aufgestellt und auf ihn dieser Punkt mit der Lothgabel nach d' projicirt. Auf diesen Punkt d' stelle man die Zirkelspitze p, öffne den Zirkel mittelst der groben Drehung nahezu um den Winkel ADA und stelle mit der Schraube die Diopter genau auf A und B ein. Damit ist also der Winkel μ gemessen. Befestigt man nun in a und b die Anschlagnadeln, so kann man mit dem Zirkel, indem man die Schenkel sanft an a und b andrückt, den Kreis a d b beschreiben. Misst man hierauf in gleicher Weise den Winkel ν = BDC und beschreibt über b c den Kreis b d c, so gibt der Schnitt dieses Kreises mit a d b den gesuchten Punkt d und damit das Viereck a b c d, welches dem ABCD ähnlich ist.

Will man nun auch den Messtisch in Bezug auf D centriren und nach ABC orientiren, so braucht man nur den eben gefundenen Punkt d in das Loth von D und irgend eine der Richtungen d a, d b, d c in die entsprechende Vertikalebene DA, DB, DC zu bringen, was auf die weiter unten anzugebende Weise systematisch und leicht geschehen kann.

Wäre der Punkt D auf dem Felde nur annähernd gegeben und seine endgültige Festsetzung dem Geometer überlassen, so würde dieser nach der Bestimmung von d die Kippregel an d a legen, den Messtisch drehen, bis d a mit DA zusammenfällt, und schliesslich den Punkt d auf das Feld hinablothen und dort mit einem Pfahle bezeichnen.

Läge der Punkt D mit den drei anderen A, B, C ganz oder nahezu in einem Kreise, so würde dieses sofort durch die volle oder annähernde Deckung der Hilfskreise abd und bcd angezeigt werden, und es wäre hiedurch Veranlassung gegeben, die Bestimmung dieses Punktes aus A, B, C nicht weiter zu verfolgen oder wenigstens erst dann vorzunehmen, wenn ein anderer Punkt D' gefunden ist, der in Verbindung mit zweien der drei Punkte A, B, C die Lösung der Aufgabe in Bezug auf D zulässt.

Da Diopter überhaupt nicht weit zu sehen gestatten und für minder gute Augen diese Weite noch kleiner ist, so kann man die Sehwinkel μ und ν auch mit der Kippregel auf das Tischblatt zeichnen und von dieser Zeichnung aus mit dem Einschneidezirkel zur Beschreibung der Hilfskreise abnehmen. Es gehört dazu nur, dass man die Axe p des Zirkels in den Scheitel d' des überzutragenden Winkels μ bringt und, nach vorausgegangener grober Drehung, den linken Schenkel mit Hilfe des elfenbeinernen Fusses h, der scharf nach der Innenfläche dieses Schenkels begrenzt ist, auf die Linie d' A stellt und den rechten Schenkel durch die Schraube k in die Richtung d' B so dreht, dass diese von dem Fusse h des Schenkels gedeckt wird.

2. Geometrische und mechanische Lösung der Hansen'schen Aufgabe.

Auch die nunmehr zu behandelnde Aufgabe führt nicht den Namen ihres Erfinders. Man hat ihr den vorstehenden Namen gegeben, weil sie Herr Geheimrath Hansen in Gotha in Nr. 419, S. 165 der Astronomischen Nachrichten trigonometrisch aufgelöst und als neu bezeichnet hat. Diese Angabe beruhte aber auf einem Irrthum, da eine trigonometrische Lösung der vorliegenden Aufgabe schon von van Swinden in seinen Elementen der Geometrie (S. 321 der deutschen Uebersetzung von Jakobi) und von Gerling in Nr. 62 S. 233 der Astronomischen Nachrichten, eine praktisch-geometrische Lösung aber schon 1838 von Pross in seinem Lehrbuch der praktischen Geometrie (S. 198) gegeben wurde. Wir behalten indessen aus demselben Grunde wie in Nr. 1 den einmal angenommenen Namen bei, nachdem auf die Unrichtigkeit desselben wiederholt hingewiesen worden ist.

Hier haben wir es nicht mit der trigonometrischen, sondern ledig-

lich mit der geometrischen und beziehungsweise mechanischen Lösung der Hansen'schen Aufgabe zu thun: wir werden also auf graphischem und mechanischem Wege die Lage zweier Standorte A, B (Fig. 8) des Messtisches aus den daselbst gemessenen scheinbaren Grössen $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$ der Verbindungslinien dieser Orte mit zwei anderen gegebenen Punkten C, D bestimmen, oder was dasselbe ist: wir werden auf dem Messtische ein Viereck abcd aus einer Diagonale cd und den an der anderen Diagonale ab liegenden Winkeln $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$, so verzeichnen, dass es dem Vierecke ABCD in der Natur ähnlich ist.

Stellt man nämlich den Messtisch über dem Punkte A horizontal auf, projicirt diesen Punkt auf das Blatt und stellt den Einschneidezirkel auf den Winkel CAD $= \alpha + \alpha'$ ein, so kann man mit dieser Einstellung über der Sehne cd sofort den Kreis cadf beschreiben. Nimmt man dann ferner den Winkel CAB $= \alpha$ in den Zirkel und legt den einen Schenkel desselben an c und seinen Scheitel in α' auf den eben beschriebenen Kreis, so schneidet der zweite Schenkel diesen Kreis in dem Punkte e. Wird hierauf der Messtisch nach B versetzt und horizontal aufgestellt, der Punkt B auf das Blatt projicirt und der Winkel CDB $= \beta + \beta'$ mit dem Einschneidezirkel aufgenommen, so lässt sich mit diesem über der Sehne cd der Kreis cbde beschreiben.

Misst man endlich den Winkel ABD $= \beta'$ und legt ihn so auf den eben beschriebenen Kreis, dass der Scheitel irgend einen Punkt b' deckt und der Schenkel b'd an dem Endpunkte d anliegt, so schneidet der andere Schenkel des Zirkels (b'e) den Kreis cbde in dem Punkte e. Verbindet man nun die Schnittpunkte e und f durch eine gerade Linie, so schneidet diese die zwei Kreise cadf und cbde in zwei Punkten a und b, welches die gesuchten Punkte sind.

Der Beweis für die Richtigkeit dieses Verfahrens ist sehr einfach. Die Lage des Punktes a ist offenbar durch die scheinbaren Grössen α, α' und $\alpha + \alpha'$, die des Punktes b durch β, β' und $\beta + \beta'$ bestimmt, also muss der Kreis cadf ein geometrischer Ort von a und der Kreis cbde ein geometrischer Ort von b sein. Dadurch, dass man ca'f $= \alpha$ und folglich da'f $= \alpha'$ macht, bestimmt man einen Punkt f, der die Eigenschaft hat, durch seine Verbindung mit den Punkten a, a'... des Ortes von a alle auf der Sehne cd stehenden Peripheriewinkel cad $=$ ca'd

$= \ldots = \alpha + \alpha'$ in ihre zwei Bestandtheile α und α' zu zerlegen: jede von f ausgehende Sehne des Kreises cadf liefert folglich einen Punkt a, a' ..., welcher mit c, f, d die Winkel $\alpha, \alpha', \alpha + \alpha'$ bildet. Ebenso hat der durch den Winkel $db'e = \beta'$ bestimmte Punkt e des Kreises cbde die Eigenschaft, durch seine Verbindung mit den Punkten b, b' ... des Ortes von b alle auf der Sehne cd stehenden Peripheriewinkel cbd, $cb'd \ldots = \beta + \beta'$ in ihre zwei Bestandtheile β und β' zu zerlegen, so dass jede von e ausgehende Sehne des Kreises cbde einen Punkt b, b' ... liefert, welcher mit c, e, d die Winkel $\beta, \beta', \beta + \beta'$ bildet. Wenn nun die Sehnen fa', fa ... in Bezug auf den Punkt a und die Sehnen eb', eb ... in Bezug auf den Punkt b allen Bedingungen der Aufgabe genügen, so ist klar, dass nur die zwei Sehnen fa und eb, welche in eine Gerade fe zusammenfallen, den Bedingungen der Aufgabe in Bezug auf die beiden Punkte a und b genügen können. In der That liegen gleichzeitig nur an den Enden der Geraden ab einerseits die scheinbaren Grössen α, α' der Seiten BC, BD und andererseits die scheinbaren Grössen β, β' der Seiten AC, AD, während jene Enden selbst auf den Kreisen ruhen, welche durch die Gesichtswinkel $\alpha + \alpha'$ und $\beta + \beta'$ der Geraden CD bestimmt sind.

Wollte man die Kreise cad und cbd nicht ganz ausziehen, um die Punkte f und e als deren Schnitte mit den Geraden a'f und b'e zu erhalten, so dürfte man nur auf dem Kreise cad noch einmal den Winkel $\alpha = ca''f$ und auf dem Kreise cbd den Winkel $\beta' = db''e$ antragen und die Schnitte der Schenkel a'f, a''f, beziehungsweise b'e, b''e suchen, welche mit den Kreisschnitten f und e übereinstimmen müssen. Jedenfalls gewähren die eben genannten Winkelschenkel a''f und b''f eine Controle für die Genauigkeit der Arbeit, wenn diese nach der ersten Vorschrift ausgeführt wurde.

Sind die Punkte a und b auf dem Messtische gefunden, so versteht es sich von selbst, wie derselbe für diese Punkte zu centriren und nach den Richtungen ac, ad und beziehungsweise bc, bd zu orientiren ist.

Um meine gegenwärtige Auflösung der vorliegenden Aufgabe mit der älteren von Pross vergleichen zu können [1]), führe ich letztere nach

1) In meinen „Elementen der Vermessungskunde", 3. Aufl. S. 499 findet sich eine von der Pross'schen abweichende Lösung der Hansen'schen Aufgabe, welche bei Messtischaufnahmen in kleinen Massstäben vortheilhaft anzuwenden ist.

dessen Lehrbuch der praktischen Geometrie (S. 198) hier an. Es handle sich dabei (mit Bezug auf Fig. 9) um die Bestimmung der Punkte C und D aus den gegebenen Punkten A und B.

Auf dem Messtische sei ab gegeben. Man orientire denselben in D nach dem Augenmasse und schneide diesen Punkt in D durch die rückwärts gezogenen Visirlinien aA, bB ein. Von d visire man auch nach C und ziehe dc. Der Punkt D wird nunmehr mit einem Stabe bezeichnet und der Messtisch nach C so versetzt, dass cd mit CD in einer Ebene liegt, der Tisch also dieselbe Orientirung wie in D hat. Nun lege man die Kippregel an a, visire nach A und ziehe Aa rückwärts bis c in dc: von c visire man noch B und ziehe b'c. Trifft diese Vision den Punkt b, so war die Orientirung in D richtig und ist es folglich auch in C; tritt aber der gewöhnliche Fall ein, dass b'c nicht mit bc zusammenfällt, so sind die Punkte d und c fehlerhaft bestimmt. Hierauf verbinde man a mit b', so ist ab' parallel zu AB, während es ab sein sollte: der Tisch ist folglich um den Winkel b'ab unrichtig orientirt. Um ihn in die richtige Lage zu bringen, lege man das Lineal der Kippregel an ab' und lasse in dieser Richtung in grosser Entfernung einen Stab E ausstecken, bringe dann das Lineal an ab und drehe den Tisch, bis das Fadenkreuz des Fernrohrs der Kippregel den Stab E deckt. Von allen bis jetzt gezogenen Visionen und ihren Durchschnittspunkten wird jetzt keine Notiz mehr genommen, sondern aufs Neue von a nach A und von b nach B visirt, wodurch sich der richtige Punkt c ergibt. Visirt man schliesslich von diesem Punkte nach D zurück, zieht eine neue Vision cd und ändert auch die früher gezogene Vision ad um den Winkel b'ab, der die falsche Orientirung anzeigt, so wird auch der Punkt D richtig erhalten.

Es bedarf wohl kaum der Erinnerung, dass meine Lösung der sog. Hansen'schen Aufgabe auch eine rein geometrische Bedeutung hat, indem sie zeigt, wie auf einfachste Weise ein Viereck abcd zu construiren ist, von dem man eine Diagonale (cd) und die vier Winkel an der anderen Diagonale ($\alpha, \alpha', \beta, \beta'$) kennt.

3. Das Centriren und Orientiren des Messtisches mit Hilfe des Einschneide-Zirkels.

In der Zeitschrift des österreichischen Ingenieur-Vereins, Bd. XXII, S. 215 hat Herr Joseph Schlesinger darauf aufmerksam gemacht, dass

es bis jetzt an einem Mittel fehle, den Messtisch systematisch so aufzustellen, dass er nach einer auf ihm gegebenen Geraden mn, mit dem Punkte m lothrecht über M, orientirt ist, und er hat hiefür einen „Ordinatenwinkel“ vorgeschlagen, welcher nichts anderes als ein vom Scheitel aus auf beiden Schenkeln getheiltes Winkelmass ist. Diese einfache Vorrichtung erfüllt ihren Zweck sehr gut und bedarf keiner Verbesserung; mein Einschneidezirkel ersetzt aber den obengenannten Ordinatenwinkel vollständig, wenn seine Schenkel von der Gewindaxe aus gleichmässig eingetheilt sind, wie es wirklich der Fall ist.

Wenn nämlich auf dem Messtische die Gerade mn (Fig. 10) und auf dem Felde die Vertikalebene MN gegeben und verlangt ist, den Punkt m des Messtisches in das Loth von M und mn in die Ebene MN zu stellen, so kann dieser Forderung durch folgendes systematische Verfahren genügt werden. Von dem (mit der Lothgabel leicht zu findenden) Durchschnittspunkte p der Drehaxe des Messtisches mit dem Zeichnungsblatte ziehe man auf diesem die Verbindungslinie pm, stelle den Einschneidezirkel auf den Winkel $pmn = \omega$ ein und messe auf dem feststehenden rechten Schenkel den Abstand $mp = l$ ab. Bringt man hierauf am Boden (etwa mit Hilfe einer Messlatte) den einen Winkelschenkel (hier den linken) in die Richtung MN und die Gewindaxe in den Punkt M, so bezeichnet der Punkt p des rechten Zirkelschenkels auf diesem Boden den Punkt P, über den der Punkt p des Messtisches lothrecht aufzustellen ist, wenn man diesen nach m und mn centriren und orientiren will. Ist p wirklich im Lothe von P und der Tisch horizontal gestellt, so ist klar, dass durch entsprechende grobe und feine Drehungen m in das Loth von M und mn in die Vertikal-Ebene MN kommen muss und dass damit der Aufgabe genügt ist.

Während ich hier die Aufstellung des Messtisches mit Polarcoordinaten bewirke, benützt Herr Schlesinger rechtwinkelige Coordinaten, indem er auf dem Messtische die Senkrechte pq auf mn fällt, die Abscisse $mq = x$, die Ordinate $qp = y$ misst und beide mittelst eines rechten Winkels (pqm) auf das Feld überträgt. Es bedarf wohl kaum der Erinnerung, dass man dieses Verfahren auch mit meinem Einschneidezirkel nachahmen kann, wenn man beide Schenkel mit Hilfe einer am Gewinde des Zirkels angebrachten Marke auf 90^0 ein- und feststellt.

Ebenso ist leicht einzusehen, dass der Einschneidezirkel auch wie ein gewöhnlicher Zirkel benützt werden kann, wenn man die Schenkel bei A und B mit Spitzen oder Einsätzen versieht.

4. Die Genauigkeit und der Zeitgewinn, welche der Einschneidezirkel gewährt.

Die Genauigkeit des Einschneidezirkels kann entweder in Hinsicht auf die Beschreibung von Kreisen allein oder in Bezug hierauf und die Aufnahme der Peripheriewinkel geprüft werden; in dem letzteren Falle setzt sich der Ausdruck für die Genauigkeit aus denen für Winkelmessung und Kreisbeschreibung zusammen. Ich habe über beide Fälle Beobachtungen angestellt, beziehungsweise anstellen lassen.

Mit welcher Genauigkeit man Kreise beschreiben kann, von welchen entweder eine Sehne und ein Peripheriewinkel oder drei Punkte (also auch wieder Sehne und Peripheriewinkel) gegeben sind, erfährt man am besten dadurch, dass man die mit dem Einschneidezirkel und auf gewöhnliche Weise beschriebenen Kreise miteinander vergleicht, wobei es gleich ist, ob man zu dem vom Einschneidezirkel gelieferten Bogen den Mittelpunkt sucht und von diesem aus den Weg des Einschneidezirkels mit dem gewöhnlichen Zirkel prüft, oder ob man mit letzterem im Voraus einen Kreis beschreibt, den Einschneidezirkel auf drei Punkte desselben einstellt und zusieht, ob oder wie weit der von der Axe des Einschneidezirkels beschriebene Bogen mit dem voraus gezogenen Kreise zusammenfällt. Nach längerer Uebung, namentlich im sanften Andrücken der Winkelschenkel an die Einsatznadeln, ist jeder in geometrischen oder graphischen Arbeiten nur einigermassen Geübte im Stande, mit dem Einschneidezirkel Kreise zu beschreiben, welche sich von den auf gewöhnliche Weise erzeugten nicht mehr unterscheiden, als zwei mit einem Stockzirkel aus Einem Mittelpunkte beschriebene Kreise, welche gleiche Halbmesser haben: der Einschneidezirkel gewährt somit als Kreisbeschreiber volle Befriedigung, und dasselbe ist mit seiner Gesammtleistung der Fall, wie aus den nachfolgenden Mittheilungen hervorgeht.

Herr Assistent August Vogler hat in der Umgebung von München (bei der Georgenschwaige) die Pothenot'sche und die Hansen'sche Auf-

gabe einerseits mit dem Theodolithen trigonometrisch, andrerseits mit dem Messtische geometrisch und mechanisch gelöst, und ich habe die gefundenen Messungsergebnisse in den zwei Tafeln Nr. 1 und Nr. 2 zusammengestellt. Ueber diese Versuche ist folgendes zu bemerken.

Zunächst wurde ein Dreieck ABC (Fig. 11) aus einer direkt mit Messstangen gemessenen Grundlinie $AC = 743^{m}421 = b$ und den drei Winkeln $A = 56^{0}\ 30'\ 15''4$; $B = 49^{0}\ 7'\ 15''4$ und $C = 74^{0}\ 22'\ 29''2$ bestimmt, wobei die Rechnung die Seitenlänge $BC = 819^{m}950 = a$ und $AB = 946^{m}904 = c$ ergab. Innerhalb des durch A, B, C gehenden Kreises wurden zwei Standpunkte D_2, D_3 angenommen und deren Abstände von A, B, C aus den hiezu erforderlichen Stücken berechnet. Auf denselben Standpunkten wurden dann je 4 Bestimmungen mit dem Einschneidezirkel und nach dem Lehmann'schen Verfahren gemacht und die Abstände der gefundenen Punkte d_2, d_3 von a, b, c mit genauen Massstäben in Centimetern gemessen. Die Resultate dieser Messungen sind in den Tabellen aufgeführt und es sind daselbst auch die Mittel aus je 4 solchen Messungen mit den betreffenden trigonometrischen Bestimmungen zusammengestellt.

Weiter wurden in dem Viereck ABC_1D_1 die Abstände AC_1, AD_1, BC_1, BD_1, C_1D_1 mit Hilfe des Theodolithen und der Grundlinie $AB = 946^{m}904$ möglichst genau gemessen und in der Verjüngung von 1:6000 in der Tafel Nr. 1, Abth. B unter der Bezeichnung „berechnet" vorgetragen. Dieselben Abstände wurden dann je 4 mal theils nach meinem Verfahren (mechanisch), theils nach der oben angegebenen Methode von Pross (geometrisch) bestimmt und sowohl einzeln als nach ihren Mitteln in der eben genannten Abtheilung B der Tafel Nr. 1 aufgeführt.

Endlich wurden auch die Zeiten beobachtet und aufgeschrieben, welche für die mechanischen und geometrischen Lösungen der beiden hier in Betracht kommenden Aufgaben nöthig waren. Die hierauf bezüglichen Angaben befinden sich in der Tafel Nr. 2. Es ist hiezu nur zu bemerken, dass bei den mechanischen Lösungen die Zeiten für die Orientirung des Messtisches besonders vorgetragen sind, weil diese Lösungen, abweichend von den rein geometrischen, eine Orientirung des Messtisches nicht voraussetzen.

Tafel Nr. 1

enthaltend die Ergebnisse der Genauigkeitsversuche.

I. Die Pothenot'sche Aufgabe.

A. Mechanische Lösung. Massstab = 1:5000.

Nr. des Versuchs	Standpunkt D_2			Standpunkt D_3		
	Entfernung in Centimeter			Entfernung in Centimeter		
	ad_2	bd_2	cd_2	ad_3	bd_3	cd_3
1	10,41	11,68	6,75	11,00	8,37	14,62
2	10,40	11,67	6,76	11,11	8,25	14,69
3	10,48	11,61	6,76	11,11	8,28	14,68
4	10,49	11,62	6,72	11,07	8,31	14,69
Mittel	10,445	11,645	6,748	11,073	8,303	14,670
Berech.	10,449	11,615	6,775	11,100	8,262	14,646

B. Lösung nach Lehmann. Massstab = 1:5000.

1	10,45	11,62	6,78	11,08	8,30	14,65
2	10,45	11,61	6,78	11,10	8,28	14,65
3	10,44	11,61	6,79	11,09	8,28	14,64
4	10,43	11,62	6,78	11,09	8,28	14,64
Mittel	10,443	11,615	6,783	11,090	8,285	14,645
Berech.	10,449	11,615	6,775	11,100	8,262	14,646

II. Die Hansen'sche Aufgabe.

A. Mechanische Lösung. Massstab = 1:6000.

Nr. des Versuchs	Entfernung in Centimeter				
	ac_1	ad_1	bc_1	bd_1	c_1d_1
1	19,06	10,52	9,91	17,27	14,34
2	19,05	10,45	9,94	17,30	14,40
3	19,07	10,52	9,86	17,26	14,38
4	19,07	10,50	9,90	17,31	14,41
Mittel	19,063	10,498	9,903	17,285	14,383
Berechnet	19,046	10,516	9,907	17,256	14,320

B. Lösung nach Pross. Massstab = 1:6000.

1	19,07	10,52	9,90	17,23	14,32
2	19,03	10,50	9,90	17,24	14,31
3	19,05	10,51	9,92	17,25	14,32
4	19,05	10,51	9,91	17,27	14,32
Mittel	19,050	10,510	9,908	17,248	14,318
Berechnet	19,046	10,516	9,907	17,256	14,320

Tafel Nr 2

enthaltend die Beobachtungen über den Zeitaufwand.

(In Minuten.)

I. Pothenot'sche Aufgabe.

Nr. des Versuchs	A. Mechanische Lösung (Massstab 1 : 5000)						B. Nach Lehmann	
	Standpunkt D_2			Standpunkt D_3			D_2	D_3
	Bestimmung	Orientirung	Summe	Bestimmung	Orientirung	Summe	Bestimmung und Orientirung	
1	10	4	14	9	6	15	17	24
2	8	4	12	8	4	12	15	25
3	7	5	12	8	3	11	16	23
4	9	3	12	9	5	14	14	15
Mittel	8,5	4,0	12,5	8,5	4,5	13,0	15,5	21,8

II. Die Hansen'sche Aufgabe.

Nr. des Versuchs	A. Mechanische Lösung				B. Lösung nach Pross		
	Bestimmung von		Orientirung	Summe	Bestimmung von		Summe
	C_1	D_1			C_1	D_1	
1	10	17	6	33	6	23	29
2	10	14	3	27	5	22	27
3	9	11	3	23	4	21	25
4	11	11	4	26	6	27	33
Mittel	10,0	13,3	4,0	27,3	5,3	23,3	28,5

Die vorstehenden Zahlen sprechen für sich selbst: die Genauigkeit des geometrischen Verfahrens scheint zwar im Allgemeinen etwas grösser zu sein als die des mechanischen, allein die Unterschiede zwischen den gemessenen und berechneten Entfernungen in Tafel Nr. 1 sind meistens so gering, dass sie innerhalb der Genauigkeitsgrenzen von Messtisch-aufnahmen liegen und daher zu einem entscheidenden Urtheile um so weniger berechtigen, als die auf trigonometrischem Wege bestimmten Entfernungen keineswegs absolut genau sind und die Fertigkeit eines

Beobachters in rein geometrischen Aufnahmen, die Jahre lang geübt sind, offenbar grösser ist als in rein mechanischen Bestimmungen, die zum ersten Male ausgeführt werden.

Die Zeitersparniss, welche das mechanische Verfahren dem geometrischen gegenüber gewährt, ist namentlich dann bedeutend, wenn lediglich die Bestimmung der Standpunkte in Betracht kommt, also auf die Orientirung des Messtisches verzichtet werden darf: in diesem Falle kann die Pothenot'sche Aufgabe in der halben Zeit, welche zur Ausführung des Lehmann'schen Verfahrens nothwendig ist, gelöst werden, während die Ausführung der Hansen'schen Aufgabe einen so auffallenden Zeitgewinn allerdings nicht gewährt, und namentlich dann nicht, wenn statt des Pross'schen Verfahrens zur Lösung dieser Aufgabe dasjenige angewendet wird, welches ich in der dritten Auflage meiner Elemente der Vermessungskunde S. 499 beschrieben habe.

Fig. 3.

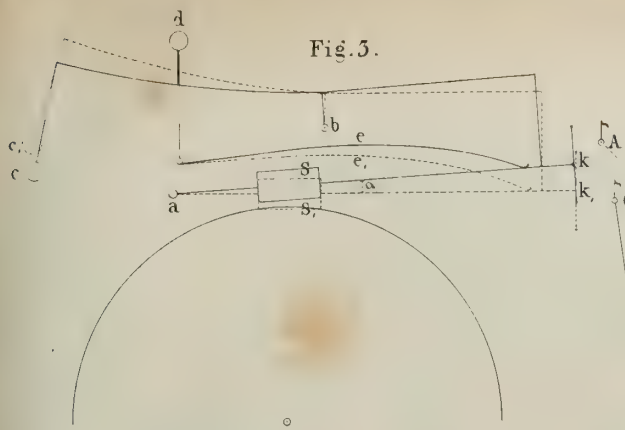


Fig. 5.

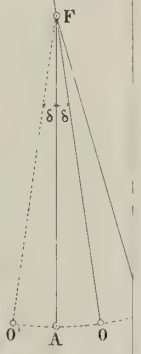


Fig. 9.

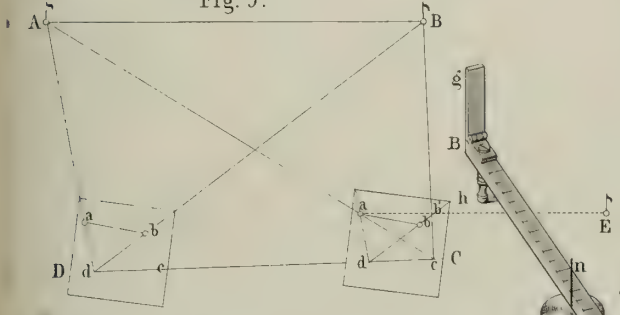


Fig. 1.

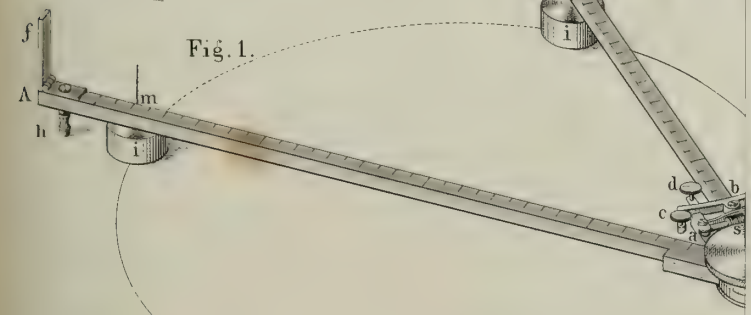


Fig. 4.

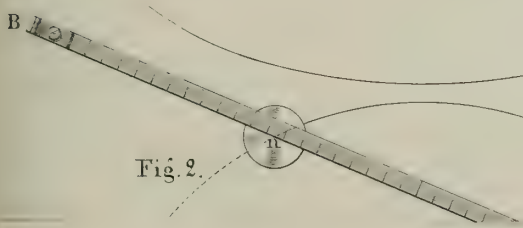
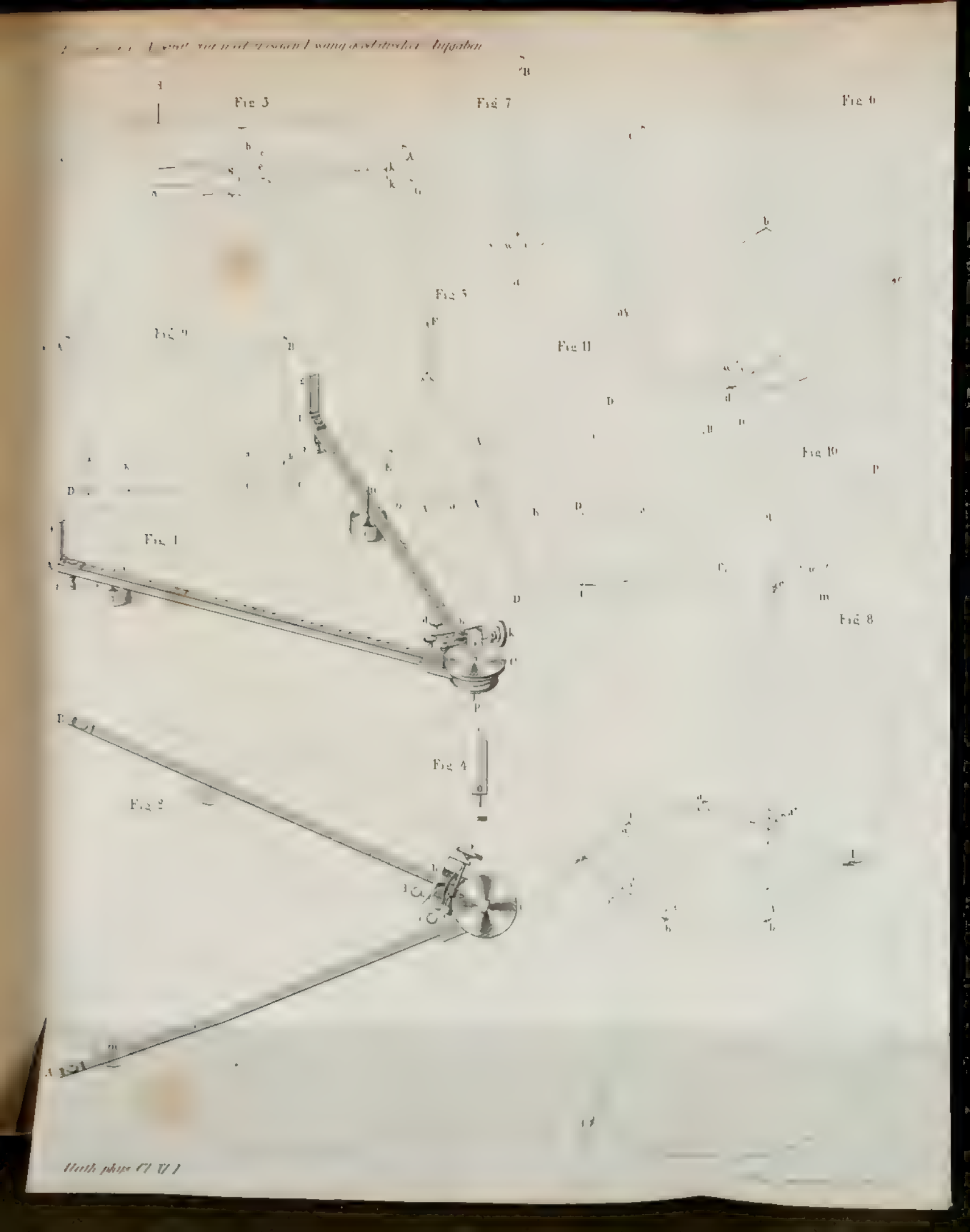


Fig. 2.



Untersuchungen

über die Salzseen

im westlichen Tíbet und in Turkistán.

I. Theil:

Rúpchu und Pangkóng;

das Gebiet der Salzseen im westlichen Tíbet.

Von

Hermann von Schlagintweit-Sakünlünski.

Im Entwurfe vorgelegt und darüber vorgetragen in der Classensitzung der k. b. Akademie der Wissenschaften, am 7. Januar 1871.

Inhalt

des ersten Theiles.

	Seite
Einleitung	105
Topographische und geologische Verhältnisse	110
Der Tsomoríri in Rúpchu	117
Die Gruppe der kleineren Seen	127
Der Tsomognalarí in Pangkóng	135
Messungen und physikalische Beobachtungen	148

Einleitung.

Erläuterung des Gegenstandes. — Die gewählte Form der Transscription. — Allgemeine Bemerkungen.

Erläuterung des Gegenstandes.

Was ich hier vorzulegen mir erlaube, ist die Untersuchung der Seen im westlichen Tíbet sowie jener auf dem Turkistáni-Plateau, das im Süden an der wasserscheidenden Karakorúm-Kette beginnt und bis an den Künlún sich fortsetzt.

Ueberall waren es Reste einer früher viel ausgebreiteteren Seebildung; überdiess befanden sich die meisten der Seen jetzt in einem eigenthümlichen Zustande stetig zunehmenden Salzgehaltes.

Von ähnlich gelegenen Seen des centralen Tíbet sind der See Kongkyú in der Nähe des 15,500 F. hoch gelegenen Maryím La-Passes und die schon länger bekannten grösseren Seen Mansaráuer und Rákus Tal, Höhe 15,250 F., noch anzuführen.

Nur der erstere ist ein Salzsee; die beiden letzteren, die man früher ebenfalls für solche hielt, haben sich als Süsswasser ergeben.

Für den südwestlich von Lása gelegenen See Yámdok sind die Angaben über Form sowie über Wasserbeschaffenheit noch immer sehr unbestimmt. Für die beiden Téngri Nur und Umgebung, gleichfalls im östlichen Tíbet, nördlich von Lása, fehlen bis jetzt irgend zuverlässige Daten. [1])

---

1) Auf der indischen Seite des Himálaya, längs seines Südabhanges, sind ohnehin mit Ausnahme des Náini Tal-Sees in Kămáon sowie des Vúlar-Sees nebst dem Dal bei Srináger in Kashmír (jeder ein Süsswasser-See mit den gewöhnlichen Verhältnissen des Zu- und Abflusses) alle grossen, noch deutlich erkennbaren lacustrinen Becken, entleert.

Ausführlichere Angaben habe ich mitgetheilt in „Reisen in Indien und Hochasien", Band II. S. 118.

Die Ausdehnung des Gegenstandes sowie die Verschiedenartigkeit der zu besprechenden Verhältnisse hat mich veranlasst, die Tibetische Gruppe hier allein zusammenzufassen.

Bei der Bereisung der Seen in Turkistán auf der Linie von Núbra über den Karakorúm-Pass nach Élchi, 1856, war mein Bruder Robert mein Gefährte. Adolphs Routen berührten, 1857, das Salzseegebiet auf der tibetischen Seite nur an den Púga-Boraxquellen und er schritt von da gegen das Ende des Tsomognalarí vor; von dort, wo er sich möglichst rasch zur weiten Reise nach Turkistán rüstete, durchzog er auf einer Route, die mit der unseren im Jahre vorher beinahe rechten Winkel bildete, das ganz neue Terrain der westlichen Hälfte des Turkistáni-Plateau, aus dem ich, im zweiten Theile, gleichfalls viele Daten über Salzseen und geologische Verhältnisse mitzutheilen vermag, da wir das Glück hatten, von seinen Manuscripten und Zeichnungen so vieles noch zu erhalten.

Mit dem Berichte über die Seen von Turkistán werde ich auch eine Vergleichung der chemischen Analyse für mehrere dieser Seen beifügen können; Herr Dr. Hilger, Privatdocent in Würzburg, hatte die Güte, die Analyse all unserer Wasserproben zu übernehmen.[2])

Die gewählte Form der Transscription.

Da in unseren bisherigen Mittheilungen an die k. b. Akademie stets nur in wenigen Worten die Wahl der Buchstaben und die ihnen beigelegte Bedeutung besprochen wurde, gebe ich hier eine etwas allgemeinere vergleichende Zusammenstellung, ähnlich dem Blatte über Transscription in jedem Bande unserer „Results“ (und speciell erläutert in „Results“ Bd. III, S. 137—160) [3]).

---

2) Als Zahl der Localitäten wird sich nach vollendeter Zusammenstellung und Gruppirung gegen 80 ergeben; die Zahl der Flaschen ist etwas über 400 (nemlich für Hochasien mit den tropischen Gebieten und den Reisen zur See zusammen).

3) Results of a scientific Mission to India and High Asia by H., A., and R. de Schlagintweit — Zahlreiche und, was vor Allem wichtig, logisch durchdachte Modificationen wären noch beizufügen gewesen nach Prof. Lauth's „Das vollständige Universal-Alphabet“. Doch hätte es zu viel des Abweichens von dem zur Zeit angenommenen Sprachgebrauche nothwendig gemacht.

Das zur Transcription angewandte Alphabet.

a (ā ă a̲), ä; b (bh); ch (chh)); d (dh); e (ē ĕ); f; g (gh); h; i (ī); j (jh); k (kh), k̲h̲; l (lh); m; n; o (ō), ö; p (ph); r (rh); s; sh; t (th); u (ū), ü; v; y; z.

In einzelnen Fällen philologischer Vergleichung mit Sanskritwörtern sind noch d und ḍ, r und ṛ, t und ṭ u. s. w., je nach dentalem oder cerebralem Charakter unterschieden.

Die Besonderheiten des Sanskrit-Alphabets sind ferner auch durch ñ und q markirt, so oft wegen etymologischer Erläuterung der Wortbedeutung eine dem Originale sich anschliessende Transliterirung nöthig schien. [4])

In unserem grösseren Werke sind auch noch nasale Modificationen der Vokale durch den griechischen Circumflex über dem Vokale unterschieden; da sie aber nur selten vorkommen und überdies für den Philologen meist durch die nachfolgenden unterpunktirten Consonanten bezeichnet sind, konnten die Circumflexe hier der Einfachheit wegen fortgelassen werden.

Aussprache der verschiedenen Buchstaben und ihrer Modificationen:

Vokale:

1) a, e, i, o, u, wie im Deutschen.
2) ä, ö, ü, wie im Deutschen.
3) Diphthongen geben den Ton der beiden nebeneinandergestellten Vokale (was zum Beispiel im Deutschen nicht immer so ist, deutsch lautet = daütsch, frei = frai etc. etc.). Diärese eines Diphthongen tritt stets ein und ist dann auch so bezeichnet, wenn der Accent des Wortes auf den zweiten der beiden Vokale fällt;

Consonanten:

1) b, d, f, g, h, k, l, m, n, p, r, s, t werden ausgesprochen wie im Deutschen.
2) h nach einem Consonanten lautet als hörbare Aspiration, mit Ausnahme der Combinationen ch, sh und k̲h̲.
3) ch ist gleich dem deutschen tsch.
4) j ist gleich dem deutschen dsch.
5) sh ist gleich dem deutschen sch.

Für 3, 4 und 5 wurde hier die zunächst englische Art der

4) Ich folgte darin den Angaben meines Bruders Emil, der zugleich mit seinen Untersuchungen über den Buddhismus mit Sanskrit und mit der Bearbeitung des von uns gesammelten tibetischen Materiales (in Druck und Manuscript) sich beschäftigt.

(Vokale:)

in den seltenen Fällen, wo Diärese in andern Silben vorkömmt, ist sie hier nicht bezeichnet.

4) ¯ über einem Vocale zeigt an, dass er lang ist. Im Allgemeinen wurde aber, um die Transscripton zu vereinfachen, nur in jenen Fällen das Längezeichen speciell angegeben, in welchen die Stellung des Accentes oder die Aehnlichkeit des Wortes mit solchen anderer Bedeutung das Bezeichnen der Länge des Vokales direct nöthig machten.

Kurze Vokale sind als solche nicht speciell unterschieden.

5) ˘, das gewöhnliche Kürzezeichen, ist über solchen Vocalen „a“ und „e“ angebracht, welche unvollkommen tönend ausgesprochen und in den orientalischen Sprachen dann meist gar nicht geschrieben werden. Als Analogie des Lautes nenne ich aus dem Englischen das u in „but“ und das e in „herd“.

6) ¯ unter dem Vokale „a“ bezeichnet einen tiefen Laut desselben, gleich a im englischen „wall.“

(Consonanten:)

Anwendung dieser Buchstaben gewählt, weil dieselbe in den geographischen Namen dieser Gegenden schon jetzt grosse Verbreitung gefunden hat, und, was nicht weniger wichtig ist, weil mit der englischen Art der Transscription keine so grosse Anhäufung von Consonanten sich verbindet als mit der deutschen.

6) kh gleich dem deutschen ch.

7) v gleich dem deutschen w.

8) y gleich dem deutschen j.

9) z als weiches s, wie im englischen Worte „zero“.

Accente.

Bei jedem mehrsilbigen Worte ist der Vokal, auf welchen der Accent fällt, durch solchen, in der Form des Acuts, ´, bezeichnet; der Accent kann auch auf kurze, selbst unvollkommen gebildete Vokale fallen. Gerade bei ungewohnten geographischen Namen lässt sich der Accent sehr schwer errathen und ist zugleich für die richtige Aussprache, auch für das im Gedächtnisse Behalten des Wortes, von grosser Wichtigkeit.

Abweichungen von dem hier erläuterten Systeme finden nur statt in folgenden Fällen:

1) Wenn andere Werke oder Publicationen citirt sind, ist jene Schreibweise beibehalten, welche dort angewandt ist.

2) In Citaten von Wörtern aus der Sanskritliteratur ist kein phonetischer Accent, sondern nur, wenn nöthig, eine Unterscheidung der langen Vokale gegeben.
3) In ausserindischen persischen und arabischen Wörtern, und in den Ortsnamen der Gebiete ausserhalb Indien, Tíbet und Turkistán sind Accente nur dann angebracht, wenn die Verhältnisse uns selbst gestattet hatten, die Betonung der Eingeborenen mit Bestimmtheit zu beurtheilen.

Allgemeine Bemerkungen.

Höhen. Sie sind stets in engl. Fuss angegeben. Wir wählten diese Einheit, weil fast alle Messungen in anderen Werken, über die weiten Regionen zwischen Ceylon und Centralasien, in ihren Originalbestimmungen in engl. Fuss vorliegen. — 1000 E. F. = 304·79 Meter = 938·29 Par. F.

Horizontale Entfernungen. „Meile" ohne nähere Bezeichnung ist die engl. Meile = 5,280 engl. Fuss. 69·04 engl. M. = 1 Aequatorialgrad; 4·60 engl. M. = 1 deutsche M. Für die Beurtheilung krummer Linien z. B. Längenentwicklung von Flüssen, Strassen etc. bediente ich mich des „Scalenrädchens". (Mitgetheilt der k. b. Ac. d. Wiss., in der Sitzung des 10. März 1866.)

Die Temperaturen sind in der 100 theiligen Scala angegeben.

Topographische und geologische Verhältnisse.

Routen; Vertheilung der Seen. — Frühere Existenz von zahlreichen Gebirgsseen (sowie von Wasserfällen). — Wirkung der Erosion auf Entleerung der Seen. Einfluss der Verdunstung in Tíbet. — Periodische Niveauveränderungen. — Pass- und Gletscher-Seen. — Geologische Formation des Salzseegebietes. Trias und krystallinische Gesteine. — Vertheilung der Seen, von kochsalzführenden Schichten unabhängig. — Landschaftlicher Charakter.

Als Uebersicht meiner Routen im Gebiete der tibetischen Seen, 1856, seien hier die folgenden Daten gegeben, zusammengestellt aus unserem Itinerare.

Provinz Rúpchu mit der Hirtenstation Kórdzog, 15,349 Fuss, 18. bis 23. Juni. Uebergang über den Indus, Höhe 13,858 Fuss, bei Dēra Ráldang, 24. Juni.

Provinz Pangkóng mit dem Hauptorte Chúshul, Höhe 14,406 F., 25. Juni bis 2. Juli.

Für neun der grösseren Seen in diesem Theile von Tíbet sind mir Höhe, Lage und manche topographische Details bekannt geworden; sie sind der Höhe nach geordnet, nebst Angabe der Provinz, in der folgenden Tabelle enthalten:

Tso Gyagár, in Rúpchu	15,693	Fuss
Múre Tso, in Rúpchu	15,517	„
Tsomoríri, in Rúpchu	15,130	„
Hánle Tso, in Rúpchu	14,600	„
Tso Gam, in Rúpchu	14,580	„
Tso Rul, in Pangkóng	14,400	„
Tso Mitbál, in Pangkóng	14,167	„
Oberer Tsomognalarí, in Pangkóng	14,050	„
Unterer Tsomognalarí, in Pangkóng	14,010	„

Das Vorhandensein des Tso Gyagár, des Tso Gam und des Tso Mitbál war früher ganz unbekannt.

Von den kleineren Seen, die meine Route nicht berührte, habe ich noch anzuführen den Kyang Tso unterhalb des Múre Tso, den Tso Kar in einer Seitenmulde des Múre Tso mit noch einem kleinen Süsswassersee oberhalb, den Süsswassersee Lam Tso südöstlich von Tsomoríri, und den sehr salzhaltigen See Thógji im nördlichen Theile von Rúpchu.

Frühere Reisewerke, die ich für einige dieser Seen zu vergleichen hatte, sind folgende: Moorcroft und Trebeck, „Travels" 1819 bis 1825, London 1841; Thomson, „Western Himalaya and Tibet" 1847—8, London 1852; Henry Strachey „Physical Geography of western Tibet" London 1854; Cunningham, „Ladák", London 1854.

In allen Theilen Hochasiens, südlich und nördlich von der wasserscheidenden Hauptkette, dem Karakorúm, finden sich zahlreiche Stellen, welche die frühere Ezistenz von Gebirgsseen erkennen lassen. Die Seen lagen theils in Senkungen und Erweiterungen der Flussthäler und hatten dann ungeachtet grosser Längen-Ausdehnung eine deutlich mit den umgebenden Kämmen congruente Richtung, theils füllten sie jene flachen Thalstufen aus, welche hier, ähnlich wie in den Alpen, in manchen Thälern mit engen, steileren Strecken wechseln.

Die stetig fortschreitende Wirkung des Einschneidens der Flüsse — die Erosion — dieselbe Ursache, welche im ganzen Gebiete Hochasiens vom Saume der indischen Tarái bis zu den Sandwüsten im Norden alle Wasserfälle verschwinden machte und sie in Stromschnellen verwandelte, hat die meisten dieser Seen entleert.

Es war dabei ausser der Menge des Niederschlages auch der Umstand von Bedeutung, dass Flussgebiete von grosser Flächenausdehnung sehr zahlreich sind.

In Tíbet war, bei entsprechendem Wasserreichthum während der Tertiär- und Diluvial-Periode wie im Himálaya, die Summe der wasserbedeckten Flächen eine ungleich grössere gewesen, wegen der weit zahlreicheren flachen Stufen, die sich hier bei dem geringen Gefälle der Thalsohlen zeigen. Ueberall lässt sich in solchen das frühere Vorhandensein von Wasserausfüllung an den Ablagerungen erkennen; noch in der Diluvialzeit musste auch die Circulation der atmosphärischen Feuchtigkeit eine viel lebhaftere sein. Die Existenz jener Seen förderte — ähnlich der Wirkung dichter Bewaldung — locale Anhäufung der

Verdunstung, und vermehrte so die Menge des Niederschlages der aus der Ferne kommenden Winde — „zugleich die Kraft der erodirenden Wirkung der Flüsse.“ Was als darüber entscheidendes Resultat gegenwärtig vorliegt, ist dadurch charakterisirt, dass auch in Tíbet, in der ganzen „Längendepression zwischen dem Kamme des Himálaya und dem wasserscheidenden Kamme des Karakorúm“, von den zahlreichen Seen verhältnissmässig nur wenige sich erhalten haben. Zugleich hat sich die atmosphärische Feuchtigkeit so verändert, dass die Regenmenge nur wenige Zoll im Jahre beträgt, und dass sich der Feuchtigkeitsgehalt der Luft sehr häufig als eine auf gewöhnliche Weise unmessbar kleine Quantität ergiebt.

Bei der Besprechung der meteorologischen Verhältnisse werde ich Gelegenheit haben, unsere Beobachtungen darüber in den verschiedenen Theilen von Tíbet vergleichend zusammenzustellen.[5])

Bei solch extremer Trockenheit ist jetzt im westlichen Tibet, beinahe bei allen der übriggebliebenen Seen, die Verdunstung eine grössere als die Quantität des Zuflusses; es ist also ein stetiges Fortschreiten des Eintrocknens das jetzt Vorherrschende. Dessenungeachtet ist die frühere Ausdehnung der einzelnen Seen mit Vorsicht zu beurtheilen, um sie nicht zu überschätzen; das wesentlichste Element in der klimatischen Wirkung der Erosion ist, dass die Summe der Wasserflächen, die verschwunden sind, eine so grosse ist.

Die Niveauveränderung der Seen innerhalb der Jahresperiode ist sehr ungleich; das wichtigste Element derselben ist das Verschwinden von Schnee und Eis, welches gegen Ende Juni, mit Ausnahme der constanten Firnlager und der Gletscher, allgemein eintritt. Seen, welche steile Umgebungen haben, erhalten weniger Zufluss von Süsswasser, als jene, deren Wassergebiet bei geringerem Ansteigen des Bodens über grössere Flächen sich verbreitet. Die Schicht des Schnees auf den Seen, die hier meist zwischen 14,000 und 15,000 Fuss liegen, erreicht im unteren Theile dieses Gebietes 1 bis 1 1/2 Fuss, wie mir die Hirten sagten und wie ich selbst dies zu beobachten Gelegenheit hatte, nemlich an den Incrustationen der Steine in den Umgebungen von Tso Mitbál, in der

5) „Results“, vol. V: Meterology, 2d part.

zweiten Hälfte des Juni. In den höheren Theilen nimmt die Schneemenge ab. Wegen der geringen Consistenz der Flocken bei schwachem Luftdrucke ist von einer Schneelage in 14,000 Fuss Höhe nur $^1/_8$ des Volumens als die entsprechende Wassermenge, die sie nach dem Schmelzen liefert, zu erwarten.

Gewöhnlich steigen die grösseren Seen noch bis Ende Juli; in den kleineren, deren Umgebungen nicht so hoch und niemals so ausgedehnt sind, tritt schon im Juni die Periode ein, während welcher nun bis zum Beginn des Frostes die Verdunstung grösser ist als der Zufluss, oder diesem wenigstens das Gleichgewicht hält.

Ehe der Ausfluss ganz aufgehört hatte, war wohl überall eine Periode vorhergegangen — in verschiedener Zeit, je nach den localen Verhältnissen — welche noch jetzt an einigen Seen sich beobachten lässt, jene nämlich, in welcher, bei reicherem Zuflusse noch des schmelzenden Winterschnees, wenigstens einige Monate hindurch Ausfluss stattfand.

In der Tagesperiode konnte ich, während des Juni keine Niveauverschiedenheit beobachten. Selbst im Hochsommer scheint eine solche sehr selten; bei Tage zwar verdunstet merklich mehr als bei Nacht, und, zweitens, die grösseren, also etwas ferne herkommenden Zuflüsse führen des Nachts etwas mehr Schmelzwasser zu, als während des Schmelzens selbst; aber dessenungeachtet lässt sich mit Berücksichtigung der Fläche der Seen für die meisten derselben auch dann keine Erhöhung des Niveau von messbarer Grösse erwarten.

Als Wasseransammlungen anderer Art, ähnlich den entsprechenden der Alpen, sind auch hier noch die Aufstauungen durch Gletscher, sowie die Wassermulden in der Nähe von Passübergängen anzuführen. Die letzteren sind stets sehr klein. Die Gletscherseen, bei denen ein tiefer liegender Gletscher den Abfluss eines oberen absperrt, sind in ihrer Existenz von den Oscillationen der Gletscher abhängig; auch solche Seen sind stets klein, und bleiben oft Jahre lang ganz entleert.

Die geologische Formation jenes Theils von Westtíbet, in welchem diese salzhaltigen Seen vorkommen, hätte eine vorherrschende Anhäufung von Kochsalz in vielen derselben nicht unwahrscheinlich gemacht. Ebenso wie im östlichen Tíbet und in Gnári Khórsum, kommen hier

Gesteine jener Trias-Periode vor, welche auf die paläozoische folgt, und im Muschelkalke findet sich auch Kochsalz, aber hier, an der Oberfläche wenigstens, nur in vereinzelten Spuren; Bergbau ist den Eingebornen unbekannt.

Der Jura unserer Kalkalpen ist dort in den centralen Theilen nicht vertreten.

Gyps, der meist mit Salz vorkömmt aber zwar in weit geringerer Menge, an vereinzelten Localitäten und gewöhnlich unter dem Salze lagernd, ist auch hier zu finden. Leider konnten wir ihn nicht anwenden — weil es kein Brennmaterial in genügender Menge gegeben hätte.[6])

Da regelmässiger Bergbau nicht betrieben wird, gestalten sich die Verhältnisse derart, dass im westlichen Tíbet Salz nicht ausgeführt, sondern eingeführt wird. Der Werth von Salz ist, sonderbarer Weise, dessenungeachtet dem Gewichte nach auch im westlichen Tíbet nahezu der gleiche wie von Mehl, was ganz dem Verhältnisse im centralen Tíbet entspricht. Die etwas grössere Fruchtbarkeit in den tibetischen Provinzen Ladák und Bálti, vermindert einestheils den Bedarf an eingeführtem Mehle, anderstheils trägt dazu die nicht unbedeutende Ausfuhr von Borax, auch von Schwefel, aus den westlichen Theilen bei. Da die Verhältnisse von Lása und von Gnári Khórsum, indirect wenigstens, früher bekannt wurden als jene des westlichen und nordwestlichen Tíbet, so geschieht es, dass man noch jetzt sehr oft von einer nicht unbedeutenden Ausfuhr für Tíbet im allgemeinen sprechen hört. Das Salz im tibetischen Handel ist von einer Qualität, die zwischen dem bei uns gebrauchten Kochsalze und dem Viehsalze steht.

6) Zu den zahlreichen Abformungen von lebenden Individuen der verschiedenen Menschenraçen benützten wir stets Gyps, der aus Europa nachgesandt wurde; selbst in Orten wie Calcutta fand sich keiner vorräthig: Stuccoarbeit wird nämlich in den Tropen nicht angewendet, da sie der feuchten Wärme der Regenzeit nicht genügend Widerstand leisten würde.

Die Zahl der von uns gemachten Abformungen, positiv in Metall reproducirt, ist 275; 80 davon sind in das ethnographische Museum zu München aufgenommen. Die ganze Reihe derselben befindet sich in London, Paris und St. Petersburg, sowie in Calcutta und und Madrás in Indien; kleinere Reihen sind in Indien zu Bombay, Lahór und Ágra aufgestellt. — 9 solcher Raçentypen hat Robert von seinen Reisen in Amerika, in gleicher Herstellung mitgebracht. Verlag von J. A. Barth, Leipzig, u. E. H. Mayer, Köln.

An das Triasgebiet in Tíbet reiht sich, im Hauptkamme und seinen Ausläufern, eine breite Region von metamorphischen krystallinischen Gesteinen und von Gneiss, die schon in der geologischen Periode der Trias inselartig emporgeragt haben muss, da wir auch weiter nördlich davon wieder Muschelkalk mit salzführenden Schichten fanden. Die Entfernung der Triasgesteine in Tíbet von jenen in Turkistán fanden wir am grössten im Meridian des Karakorúm-Passes; weiter östlich davon zeigte sie sich bedeutend geringer.

Das Vorkommen der Salzseen, so wie sie überall im westlichen Tíbet sich zeigen, liess sich als ganz unabhängig von dem Vorhandensein kochsalzführender Gesteine erkennen. Nicht nur fanden sich die bedeutendsten und die am meisten salzhaltigen der Seen im Gebiete der krystallinischen Gesteine, auch die Salze, die das Wasser enthält, sind qualitativ nirgend von den Bodensalzen des gewöhnlichen Quell- und Flusswassers verschieden. Eine, wenn auch den Gebrauch zum Trinken und Kochen nicht ganz ausschliessende Vermehrung zeigte sich bei all' jenen Seen, die jetzt keinen Ausfluss mehr haben; Quellwasser, noch deutlicher Gletscherwasser, schmeckt süss dagegen. Einige Seen sind entschieden brakisch; auch solche mit ganz ungeniessbarem Wasser gibt es.

Die Ursachen einer bisweilen so grossen Anhäufung von Salz, sowie überhaupt der so bedeutenden Verschiedenheit in der relativen Salzmenge der einzelnen Seen, liessen sich erst nach dem Besuche und der vergleichenden Untersuchung grosser Strecken beurtheilen; als solche ergab sich die Ungleichheit nicht in den geologischen, sondern in den topographischen Verhältnissen.

Eine gegenwärtig mehr oder weniger isolirte Lage, wobei grössere Trockenheit der Luft die Verdunstung fördert, sowie die Grösse des Quellengebietes der Zuflüsse im Verhältnisse zum Wasservolumen und zur Oberfläche des Sees, dies sind dabei die wichtigsten Momente.

Der Charakter der Umgebung von Seen, deren gegenwärtiges Niveau tiefer als ihr früherer Ausfluss liegt, hat, wie zu erwarten, viel des Neuen geboten. Bei manchen Seen trugen gewaltige Dimensionen der Wasserflächen nicht weniger als die mächtigen, die Schneegrenze überragenden Kämme dazu bei, den Eindruck auch des Bildes der ganzen Landschaft zu heben. Die eigenthümlichen und ungeachtet vorherrschender

Wüste grossartigen Formen hatten mich veranlasst, schon für die bisher publicirten Tafeln des „Atlas zu den Results“ Alles zu liefern, was ich von Salzseen aufzunehmen Gelegenheit hatte, nämlich Tso Mitbál, Tso Gam, Tsomoríri und Tsomognalarí aus dem westlichen Tíbet, Kiúk Kiöl, aus Turkistán. Von den Seen längs Adolphs (mehr östliche) Route über das Turkistáni-Plateau liegen mir jetzt gleichfalls mehrere Aquarelle vor, die im Atlas mit den zpäteren Bänden der „Results“ folgen werden.

Gemeinschaftlich war den Umgebungen all dieser Seen, dass nirgend eine Vegetation sich bot, dicht genug, um zusammenhängende grüne Flächen zu bilden, als da, wo Zuflüsse süssen Wassers aus Quellen oder aus Gletschern sich heranzogen; längs dieser lagen meist zwei schmale grüne Uferränder. Pflanzen, aber sehr vereinzelt, fanden sich, auch in grosser Entfernung noch. in den Bodenmulden, sowie auf der besonnten Seite der Bergabhänge und Felsengerölle; die Summe der hier vorkommenden Pflanzenspecies ist ungeachtet der Höhe immer noch eine unerwartet grosse zu nennen.

Der Tsomoríri in Rúpchu.

Bedeutung des Namens. — Ueberblick bei Dĕra Náma Bíngbo. — Wassermenge und Delta des Pangpók-Flusses. — Zuflüsse und Quellen. — Niveauveränderung durch Eintrocknen; geringe Volumenverminderung. — Anhäufung von Bodensalzen. — Unterirdische Zufluss-Gräben oder Canäle. — Dichter Abschluss gegen Ausfluss. — Obere Uferlandschaft; Kórdzog, oder die „Schatzburg" der Hirten. — Mangel an Fischen. — Erosionshügel mit Pflanzendecke.

Der Tsomoríri war der erste der Salzseen, an den meine Route mich führte, zugleich einer der grössten.

Die Bedeutung des Namens als „Berg-See" lässt sich sehr wohl mit der landschaftlichen Gestaltung seiner Ufer verbinden.

Mein erstes Lager hatte ich dort in Dĕra Náma Bíngbo nahe dem südlichen, unteren Ende des Sees. Einige Felsen westlich davon, die ziemlich steil ansteigen, boten, wie zu erwarten, einen sehr guten Ueberblick; ich wählte sie als Standpunkt für meine Zeichnungen und für Winkelmessungen. [7])

Im Hintergrund erhebt sich hier gegen Norden eine zusammenhängende Kette von Schneebergen, gegen Nordosten drei vereinzelte mächtige Gruppen; näher dem See liegen Berge mittlerer Höhe mit flachen Kämmen.

Der höchste der Berge auf dem Wege von Spíti aus über den Párang-Pass zum Tsomoríri liegt auf der rechten Seite, im Párangthale; die Höhe ist 24,723 Fuss nach Mittheilungen aus den neueren indischen Vermessungen. Er kann seiner Lage nach als der „nördliche Párang-Peak" bezeichnet werden. In dem Bilde des Sees, das bei Náma Bíngbo sich bietet, kann er nicht gesehen werden, da er rückwärts vom Beschauer, gegen Süden, liegt.

---

7) Die Originalbilder sind, in Oel ausgeführt, Gen. Nro. 580 u. 581. Im Atlas zu den „Results" bildet der Tsomoríri den Gegenstand der Tafel XVII.

Im Mittelgrunde fällt vor allem auf, dass eine Anzahl von Seitenthälern hier zum See herabführen, die alle als trockene Flussbette sich zeigen; einige enden in steile Wände, wo es früher Wasserfälle gegeben hat, die meisten aber sind schon zur Zeit, als ihre Wasser zu versiegen begannen, so tief eingeschnitten gewesen, dass grosse ganz deutliche Flussdeltas an den Rand des Sees sich vorschieben.

Die Niveauveränderung des Sees konnte ich sehr gut, unmittelbar in der Nähe meines Standpunktes beurtheilen — durch ziemlich parallel laufende Linien, die sogleich als Ufermarken sich erkennen liessen. Auch die Bodenbeschaffenheit bot viele Anhaltspunkte. Ueberall, wo immer die nicht zu steile Abdachung es erlaubte, war das frühere Ufer mit solchem Kiesgeröll bedeckt, welches von dem Wellenschlage des Seewassers gerundet sein musste, da dies Gerölle zwischen den Mündungen lagerte und klein war, während jenes an den Flussmündungen grosse Stücke mit sich führte. Rollkies von Seewasser gerundet fand sich später auch an all den kleineren Seen; die Heftigkeit, welche häufig die Stürme in Tibet erreichen, trägt viel dazu bei.

Auch am jenseitigen Ufer zeigten sich, mit dem Fernrohre gesehen, die entsprechenden Niveaulinien.

Nahe der früheren Ausflussstelle fand ich aus einem Thale südwestlich vom See den noch jetzt constant wasserführenden Pangpók-Fluss herabkommen. Dieser Fluss hat eine für solches Gebiet nicht unbedeutende Wassermenge; ich bestimmte dieselbe im Pangpók-Thale selbst, etwas oberhalb der Stelle, wo der Fluss mit deltaförmiger Anschwemmung in das Tsomoríri-Thal eintritt und zugleich seine Richtung ändert. Bei 65 Fuss Breite, 1·3 Fuss Tiefe und einer mittleren Schnelligkeit von 5·15 Fuss in der Secunde, ergab sich eine Wassermenge von 435 Kub.-Fuss in der Secunde. Im oberen Theile des Delta spaltet sich der Fluss in einige Arme, die, wenn auch nicht alle beständig, doch bei hohem Wasserstande gefüllt sind. Hier kommt der in Gebirgsverhältnissen fast einzige Fall vor, dass ein Zweig nicht nur einen ungewöhnlichen Weg nimmt, sondern auch der Gesammtwassermenge des Flusses entzogen bleibt; er fällt nämlich in den Salzsee, der keinen Ausfluss hat. — In der neuen Arbeit der Ind. Great Trig. Survey, von Col. Walker, d. d. August 1868, die ich jüngst erhielt, ist ein

Fluss angegeben, aber so, als ob er sich ganz in den See ergösse; die ungleich grösseren Arme, die weiter abwärts in das Tsomoríri-Thal münden, sowie die Terraindarstellung des früheren, jetzt trockenen Ausflussbettes des Sees fehlen; es lässt dies ganz unbestimmt, ob im nördlichen oder im südlichen Theile des Sees das untere Ende zu suchen ist, und es wird so noch unverständlicher, wie ein früherer Ausfluss des Sees mit der allgemeinen Thalbildung in der Umgebung sich verbinden konnte. In meiner Karte[8]) ist für jeden der grösseren Seen der Lauf des früheren Ausflusses durch eine punktirte Linie bezeichnet. Das Delta muss schon zur Zeit als der See noch Ausfluss hatte, sich vorgeschoben haben; denn der untere Theil des Delta lässt deutlich, weil erodirt, den früheren Ausfluss erkennen. Diese Stelle markirt sich auch dadurch als Austrittspunkt, obwohl nur wenig eingeschnitten, dass die Verlängerung des unteren Theiles des Tsomoríri-Thales direct darauf hinweist. Von dieser Austrittsstelle gegen die jetzige Oberfläche des Sees senkt sich nun der Boden in entgegengesetzter Richtung. Den Höhenunterschied zwischen diesem Punkte und dem Niveau des Sees, also die Höhe, um die der See durch das Eintrocknen niederer geworden ist, fand ich im Juni für den Tsomoríri-See = 32 englische Fuss.[9]) Die Marken der letzten Wellenschläge reichten nirgends an diesem See ganz bis zur Höhe hinauf, die sich hier, direct, als der Beginn des Eintrocknens erkennen lässt. Die letzte zart markirte „Uferlinie" fand ich östlich von meinem Lagerplatze, wo die Neigung des Ufers gegen den See hinab nicht ganz $6\frac{1}{2}$ Grad betrug, 256·5 Fuss vom gegenwärtigen Wasserrande entfernt, was 29 Fuss als Höhe über dem Wasser ergiebt. Nahe dieser Stelle liegt ein Erdsturz von ziemlich

8) Die Karte des unteren Theiles des Tsomoríri wurde von mir aufgenommen am 21. Juni 1856, wobei mir gerade diese Unregelmässigkeit an der Ausflussstelle vor allem entgegentrat. Auch auf meiner allgemeinen „Karte des westlichen Hochasien", im Massstabe von 1:4,050,000 oder 1 engl. Zoll: 64 engl. Meilen, ist deutlich zu sehen, dass die Hauptmasse des Pangpók-Flusses unterhalb des Sees eintritt, während, als punktirte Linie gehalten, die Form des früheren Ausflusses sich erkennen lässt und zwar als die Hauptlinie. Dass die kleine Deltabildung des Seitenflusses Pangpók sich noch erkennen liesse, konnte bei dem hier angegebenen Massstabe nicht ausgeführt werden.

9) In den Sitzungsberichten der Berliner Geographischen Gesellschaft, 1856, S. 533, wo ein Brief von mir an Se. Majestät den König von Preussen gegeben ist (abgesandt aus dem Salzseegebiete, 2. Juli, 1856), steht 22 Fuss statt 32 Fuss; Druckfehler.

kleinen schiefrigen Fragmenten, der bis in den See herabreicht. Als der Erdsturz statt fand, muss der See schon $2^1/_2$ Fuss niedrer gewesen sein als seine letzte Ausflusshöhe, da sich oberhalb dieses Niveaus die Fläche des Erdsturzes in ihrer Neigung und in der Lage ihrer Schutttheile ganz unverändert zeigt.[10])

Cunningham,[11]) der die deutliche Stelle des Aufhörens des Ausflusses ganz übersehen haben muss, schätzt die wahrscheinliche Lage des See-Niveaus, als er einzutrocknen anfing, um „800 bis 900 Fuss" höher als sie jetzt ist. Abgesehen davon, dass ich die Stelle, in welcher der Ausfluss aufhörte, direct erkennen konnte, wäre ein Eintrocknen „um 800 Fuss Höhe" mit einer Salzanhäufung durch Concentration verbunden gewesen, wie sie nirgend in diesen Seen auch nur annähernd vorkömmt.

Zur Zeit des Schneeschmelzens auf den Abhängen, Juni und Juli, sind ausser dem Pangpók noch andere Bachrinnen längs der Ufer etwas mit Wasser gefüllt, und jene, welche mit den grösseren, hochgelegenen Firnregionen in Verbindung stehen, führen den ganzen Sommer hindurch etwas Wasser zu. Einige Quellen liefern ständigen Zufluss, mit gutem Trinkwasser; die Wassermenge von diesen ist eine sehr geringe. Die Verdunstung ist während des Sommers genügend, um bei der grossen Oberfläche des Sees die Wirkung der Zuflüsse auf Niveauveränderung ganz verschwinden zu machen. So wie der See jetzt begrenzt ist, hat er 12 englische Meilen Länge und im Mittel an 3 Meilen Breite; als Höhe seines Niveaus über dem Meere erhielt ich 15,130 Fuss.

Auch der Tsomoríri hatte schon vor dem Beginne des Salzigwerdens durch allmäliges Einschneiden seines Ausflusses eine Verminderung seiner Wassermenge und eine Senkung seines Niveau erfahren, wie wir sie in Tíbet bei so vielen einst mit Seewasser bedeckten Thalstufen und Flächen jetzt bis zur völligen Entlehrung führen sahen. In Lagen, wo das Wasser eingeengt ist (wie in Thälern) und wo zugleich durch die Festigkeit des Gesteines die Begrenzung der älteren von

10) Alle Erdstürze, die von Bergabhängen in ruhiges Wasser von Seen führen, werden nämlich unmittelbar da, wo sie das Niveau des Wassers berühren, viel steiler als in dem oberen Theile, dem uur die Luft im Herabfallen Widerstand geleistet hatte.

11) Cunningham „Ladák", S. 139.

oben nach abwärts laufenden Formen der Abhänge [12]) sich deutlich erhalten hat, ist der obere Rand, „der Beginn" der Erosion, meistens gut markirt; aber längs Seeufern ist dies fast nirgends der Fall, weil hier nur selten festes Gestein, in der Form von Abglättung zum Beispiel, afficirt ist, während vorherrschend die Ablagerung der losen Sand- und Steinmassen die Marke bildet, eine Marke, die aber den Einwirkungen der Verwitterung umgebender Gesteine, ferner dem Einflusse der atmosphärischen Verhältnisse ungleich geringern Widerstand zu leisten vermag. Selbst an unseren Seen in Europa, wo das Ausfliessen noch jetzt fortdauert, also erodirend fortwirkt, ist unmittelbar am Seerande die Erosion nur selten in ihrer ganzen Grösse zu erkennen, in jener Grösse nämlich, die man erhält, wenn man die Erosion weiter unten als noch geschlossen sich denkt und nun aus den topographischen Formen die Höhe sich construirt, welche das Seewasser haben musste, ehe es damals ausfliessen konnte.

Da nirgend ein Boot oder sonst ein Material zum Befahren des Sees zu erhalten war, liess sich nicht beurtheilen, in welchem Verhältnisse die Volumenverminderung um eine Schicht von 32 Fuss zum Gesammtvolumen des Seewassers steht. Aber die relative Grösse der Veränderung kann keine sehr bedeutende sein, wie sich aus dem Vergleiche mit den allgemeinen Formen der Thalbecken an andern Orten ergab. Solchen Umständen entspricht, dass das Wasser noch trinkbar ist.

Dem oberen, jetzt trockenen Rande des Sees entlang zeigte sich hier mehr als gewöhnlich stark jene Ablagerung von Bodensalzen, wie sie mir in anderen tibetischen Thälern längs der Flussränder, aber in einiger Entfernung von denselben, vorgekommen war. Ich fand, dass das Durchsickern der stets sehr geringen Menge atmosphärischen Niederschlages nicht weiter sich fortschiebt, als bis an den untern Rand der eigentlichen Bergabhänge; da wo die etwas flachere Thalsohle beginnt,

12) Wo immer Erosion eintritt, fangen auch die Abhänge an, steiler zu werden und haben sich so fast überall erhalten, ganz unahhängig von den geologischen Perioden der Gebirgsformation. Nur da, wo ungewöhnliche Regenmenge, wie in Sikkim oder in den Gebirgen östlich vom Brahmapútra, regelmässig eintritt, sind auch meist die Erosionsgrenzen sehr unklar geworden.

zeigt sich am deutlichsten Anhäufung solcher Salze, die oft über grosse Strecken hin eine zusammenhängende Linie bilden. Es könnte scheinbar dem Factum so geringer Regenmenge widersprechen, dass das Auslaugen des Bodens in so grosseu Massen hervortrete, aber was gerade hier das Auslaugen „sichtbar" macht, ist der Umstand, dass die Wassermenge, welche es bewirkt, nicht genügt, um die ausgelaugten Salze vollkommen zu entfernen und dem abströmenden Flusswasser zuzuführen.

Solche Salzanhäufung beschränkt die Vegetation oft auf grosse Strecken. Wenn bei unseren Alpenseen in Europa es vorkömmt, dass sie nicht ganz bis unmittelbar an den Rand bewachsen sind, so ist dies nur bei den grösseren derselben der Fall; mit der Wasserfläche nimmt die Heftigkeit des Wellenschlages bei Stürmen zu und verhindert so, mechanisch, das Aufkeimen der Pflanzen; die Breite des kahlen Streifens ist bei uns stets sehr gering.

Eine eigenthümliche Erosionsform längs der Ufer des Tsomoríri sind „unterirdische Gräben", die Canäle seitlichen Zuflusses. Diese entstehen hier zugleich mit dem Fortschreiten des allmäligen Eintrocknens und sind bedingt durch das rasche Erhärten lacustriner Ablagerungen an der Oberfläche, verbunden mit längerem Fortdauern weicher, feuchter Schichten etwas unterhalb derselben. Im Kleinen kommt ähnliches auch in Deutschland vor, wenn in heissen Sommern nach langer Trockenheit kräftiger Regen folgt. So sah ich letzten Herbst, im August 1870, bei Jägersburg an einer Stelle des Gartens und an zwei Stellen in einer etwas tiefer gelegenen Wiese plötzlich Wasser an der Oberfläche, das einer aufsteigenden Quelle ähnlich, zu Tage trat. Am zweiten Tage schon war kein Ausströmen mehr zu bemerken, und als bald darauf eine Unterbrechung des Regens die Sache näher zu untersuchen erlaubte, zeigten sich wenige Fuss unter der Oberfläche kleine Canäle, in denen sich durch einzelne der Risse der Oberfläche Wasser gesammelt hatte, so lange noch nicht die ganzen obersten Schichten des Bodens sich erweicht hatten.

An den Ufern des Tsomoríri gibt es unterirdische Gräben so breit und so tief, dass sie leicht den Pferden gefährlich werden, wenn an der zu überschreitenden Stelle die Decke nicht dick genug ist. Von meinen Lastthieren brach einmal unterhalb Kórdzog ein Pferd mit den

Vorder- und Hinterfüssen durch, nachdem es, wie wir später es erkannten, der (einem Wege etwas ähnlichen) Senkung über dem Graben eine Strecke weit gefolgt war.

Auch dies kommt hier vor, dass man die Decke solch unterirdischer Gräben angeschnitten sieht, und zwar von Erosionsrinnen der Oberfläche die meist gleichfalls zur Zeit trocken sind. Hier nämlich geschieht es sehr leicht, dass die Einflussstelle zu solch einem unterirdischen Canale längst durch Verwitterung, durch Erdstürze u. s. w. geschlossen ist, ehe wieder Regen eintritt. Neuer Abfluss macht sich nun an der Oberfläche Weg, und schneidet sich, wenn auch erst nach einer schwer zu definirenden Zeitperiode, tief genug ein, um unterirdische Gräben bloszulegen. Die Winkel haben die Wahrscheinlichkeit sehr spitz zu sein, doch kommen bisweilen auch ziemlich grosse Winkel vor, dann nämlich, wenn eine Strecke weit die Oberfläche verändert worden ist, z. B. durch Erdstürze oder durch Krümmung des austrocknenden Bodens (wenn von ungleicher Dicke über dem festen Gesteine). Zur Zeit meines Aufenthaltes fand ich nur in einem der unterirdischen Canäle etwas Wasser, das sehr wenig über dem Seeniveau zu Tage trat. Gegen Ende des Frühlings und Anfang des Sommers, zur Zeit wenn überhaupt durch Schneeschmelzen der Seitenzufluss sein Maximum erreicht, mögen auch die unterirdischen Canäle ihr Wasser nicht unwesentlich vermehrt erhalten. Unterirdisches Ausströmen, das etwa bei diesen Seen, die oben keinen Ausfluss haben, an einer tiefer gelegenen Stelle der Umgebung zu Tage träte, ist mir bei den Salzseen nirgend vorgekommen. Solches wäre, wie aus den allgemeinen topographischen Verhältnissen der Umgebungen sich ergibt, etwa nur da zu erwarten, wo es im Bette des früheren Ausflusses sich zeigen würde, da in solcher Stellung die Entfernung wenigstens keine sehr grosse zu sein hätte. Ich habe aber weder hier, am Tsomoríri, noch später bei den anderen Salzseen eine solche Ausflussstelle bemerkt. „Gestein", welches dabei zu durchdringen gewesen wäre, bietet ohnehin einen Widerstand ganz anderer Art als die lacustrinen Ablagerungen, durch welche die oben erwähnten Gräben führen. Jene Kalke der Alpen und des Jura, die am ersten die Wahrscheinlichkeit hätten durch Höhlungen, ähnlich wie es vom Aachensee in den Alpen angenommen wird, Abfluss des Wassers zu ermöglichen,

kommen in diesen Gebieten nicht vor, und directer Beweis gegen solchen Abfluss ist es, dass die vergleichende Untersuchung dieser Seen nicht nur eine stetige Verminderung ihrer Wassermenge, sondern, damit verbunden, eine stetige Zunahme ihres Salzgehaltes ergiebt.

Es möge jedoch hier nicht unerwähnt bleiben, dass für den Tsomoríri wenigstens Dr. Theobald, eifriger Mitarbeiter der „Geological Survey of India" über Quellen spricht, die „der unterirdische Ausfluss" sein sollten.

Uebrigens müsste solches Quellwasser eine ungleich mehr als gewöhnliche Mächtigkeit haben, um dem Zuflusse auch nur des Pangpók-Armes zu genügen ohne dass der Verdunstung noch immer der bei weitem überwiegende Antheil in dem Wasserverlurste des Sees bliebe, und Quellen die als ganze Bäche austräten, sind mir dort nirgend vorgekommen.

Im oberen Theile des Tsomoríri-Beckens auf der rechten Seite und in einiger Entfernung vom Ufers des Sees liegt Kórdzog, ein Haus und in weitem Umkreise das einzige feste Gebäude. Dieser Punkt ist wichtig für die Benützung ausgedehnter, wenn auch spärlich bewachsener Weide; die Bedeutung des Namens (tibetisch geschrieben dKor-dzog) ist desshalb „die Schatzburg". Auch Gónpa (oder „Kloster") Kórdzog hört man dieses Haus nennen. Dies Epitheton ist hier in der ursprünglichen Bedeutung des Wortes, als „einsamer Platz" zu verstehen, obwohl gegenwärtig Gónpa fast ausschliesslich für Gebäude zu religiösen Zwecken und zwar nicht nur für Einsiedlerhäuser, sondern noch allgemeiner für Klöster gebraucht wird. Lámas giebt es keine hier, es sei denn bei vorübergehendem Besuche tibetischer Bettelmönche; aber zunächst am Hause steht eine grosse Gebetmauer, auch im Innern findet man zahlreiche Objecte des Búddhacultus, wie gewöhnlich in jedem tibetischen Wohnorte.[14])

Vor dem Hause steht ein Chórten und eine Gebetmauer, beide ganz normal in Form und Grösse für diesen Theil von Tíbet. Der

---

13) Journal Asiatic Soc. Beng. Vol. XXXI, 1862.

14) Eine Abbildung des Gebäudes und seiner Umgebungen, Gen. Nr. des Zeichnungskatalogs 347, wird als Tafel XVII im dritten Bande der „Reisen" erscheinen und ist dort auch mit einer ausführlichen Beschreibung der Einzelheiten verbunden.

Chórten hat eine mit der Ebene oben liegende Halbkugel,[15]) die auf mehreren Stufen ruht. Zahlreich waren die Gebetsteine. Sie zeigten sich hier am Chórten und an der Gebetmauer; an der letzteren waren sie, in halber Höhe derselben, der ganzen Länge nach angebracht.

Im Hintergrunde von Kórdzog sieht man Berge, die ungeachtet ihrer flachen langgestreckten Kämme schon in die Schneeregion reichen, die also, nach den nahe liegenden Pässen unserer Routen zu schliessen, über 18,000 Fuss hoch sind.

Ausser Kórdzog giebt es noch mehrere Stellen längs des Tsomoríri, die als Weideplätze eigene Namen haben, aber Häuser — selbst in der bescheidensten Form einer Alpenhütte aus quer geschichteten Steinen — findet man dort nirgend; jene Weiden werden nur mit Zelten und auf sehr kurze Zeit bezogen. Die Höhe von Kórdzog ist 15,349 Fuss, 219 Fuss über dem See. Getreidebau, obwohl er in diesem Theile von Tíbet bis 14,700 Fuss reicht, ist wegen der allgemeinen Erhebung noch meilenweit ausgeschlossen, dessenungeachtet ist Kórdzog von Juni bis October von Hirten bewohnt, die mit zahlreichen Schafen, auch mit Yaksheerden hieher ziehen. Was hier von Alpenwirthschaft getrieben wird, ist nur Viehzucht zur Verwerthung der Wolle und des Fleisches; die Yakkuh gäbe viel zu wenig Milch, um Butter- und Käsebereitung im Grossen zu betreiben.

Auf dem Wege durch Spíti hatte ich als höchste und günstigste Lagen für die Getreidekultur noch Felder bis 15,000 Fuss benützen sehen. Dort aber reifen die kleinen Saaten nur dann noch, wenn, wie in den höchsten bewohnten Orten der Alpen, der Schnee durch Aufstreuen von Erde künstlich so früh als möglich entfernt wird. Dies Verfahren, den Hirten von Kórdzog nicht unbekannt, war auch hier nicht unversucht geblieben, doch war es niemals von Erfolg gewesen.

Ein wenig nördlich von Kórdzog endet der Tsomoríri in einer fast geraden, rechtwinklig auf seiner Längenachse stehenden Linie; aber hier ist er nicht durch Bergabhänge wie längs der Seiten begrenzt, sondern eine nur sehr wenig geneigte Fläche zieht sich in der vollen Breite des Sees noch über 1 engl. Meile fort. Deutlich lässt sich erkennen, dass

15) Eine Zusammenstellung über Chórtens im allgemeinen habe ich gegeben „Reisen", Bd. II, S. 90.

bei dem sehr allmäligen Eintrocknen hier eine lange Zeit ganz durchweichter Boden sich erhalten hat, da solches allein die eigenthümliche Oberfläche erklärt.

Ein kleiner Zufluss nämlich, der von Norden her diese Strecke durchzieht, mag ungeachtet seiner Theilung in unzählige kleine Arme sehr wenig Widerstand im Erodiren der oberen Bodenschicht gefunden haben — in einer längst vergangenen Zeit, als er die Bodenschicht noch feucht gefunden, und es hat sich so eine mir neue Form von Bodengestaltung gebildet: vereinzelte 6 bis 8 Fuss hohe Erosions-Hügel, die weit unter sich abstehen. Sie bestehen aus Sand und kleinem Gestein, aus gleicher Masse wie jene des Bodens; niedre Gruppen verschiedener holzbildender Gewächse befestigen ihre Oberfläche.

Die Pflanze, die hier am meisten vorkömmt, ist die Caragana versicolor, im Tibetischen „Táma" genannt, die wir in Tíbet auf Bergabhängen bis über 16,800 Fuss gefunden haben, auf der Südseite des Himálaya ausnahmsweise noch 300 bis 400 Fuss höher. Hier ist sie ein Gesträuch von einigen Fuss. Auch mehrere Species von Weiden liessen sich auffinden, aber diese weit seltener, da sie gegen Trockenheit und Kälte weniger widerstandsfähig sind. In unseren Alpen ist die Caragana in keiner Species vertreten, im Himálaya ist sie selten; in Tíbet ist sie eines der wichtigsten Brennholz-Materiale für grosse Höhen.

Das Isolirtstehen ähnlicher Vegetationsgruppen zeigt sich auch bei unseren Alpenmooren häufig — aber in ungleich kleineren Formen — wenn sie durch künstliche Drainage oder durch das Fortschreiten der Erosion allmälig trocken gelegt werden. In unseren Mooren sind es Hügelchen von nur 1 bis 2 Fuss Höhe, die sich bilden, und die Abstände dazwischen sind so klein, dass man mit einiger Vorsicht leicht darüber hinwegschreiten kann. Hier standen die Hügel bei ungleich grösserer Höhe meist sehr vereinzelt, doch kamen auch Stellen vor, wo sie nur wenige Fuss Abstand hatten. Befand man sich an einem solchen Platze zwischen denselben und ging man nur etwas unvorsichtig vorwärts, so war es ungemein schwierig sich wieder zurecht zu finden.

Meinem Kórdzog-Begleiter war dieser Theil des Thales ganz unbekannt. Der gewöhnliche Verkehr von Kórdzog führt, viel westlicher, über den Taklágu-Pass in die Provinz Zánkhar und gegen Le.

Die Gruppen der kleineren Seen.[16])

Tso Gyagár. Nördliche Grenze des Sátlejgebietes. — Die Seen gegen Westen. Thógchi Chénmo. Múre Tso. Kyang Tso. (Yánam-See). — (Tso Lam) und das Hánle-Thal, gegen Osten. (Hánle-See) und Moorbildung. — Das Industhal. Tso Gam; Tso Mitbál; beide im Kamme längs der rechten Thalseite. — Tso Rul und Tso Shaldát in Rúpchu.

Von den Seen in der Umgebung des Tsomoríri bot sich mir als der nächste der Tso Gyagár; er liegt noch im Thalgebiete des Tsomoríri, an drei Meilen von dessen altem Seerande, aber auf einer 563 Fuss höheren Thalstufe; Höhe 15,693 Fuss. Die Bedeutung des Namens Gyagár ist „weisse Fläche", als Sandfläche gemeint, wie sich später bei der Widerholung des Namens für eine noch deutlicher als exclusive Sandfläche entgegentretende Stelle in der Nähe des Klosters Hémis bestätigte. Hier ist der Name auf den sandigen breiten Uferrand zu beziehen der durch das allmälige Eintrocknen des Wassers blosgelegt wurde.

Die Wassermenge des Zuflusses fand ich, am 23. Juni, gleich 70 Cubikfuss in der Secunde. Dessenungeachtet liess der Uferrand nur ein sehr geringes Steigen des Niveau während der Nacht bemerken, dem jedoch die vermehrte Verdunstung während des Tages (Ende Juni) vollkommen das Gleichgewicht hielt.

Das jetzt trockene Bett des Ausflusses lässt sich deutlich als früherer Zufluss des Tsomoríri erkennen. Etwas oberhalb dieses Sees erreicht das Sátlejgebiet seinen nördlichsten Punkt; der Tsomoríri und seine Umgebungen bilden eine keilförmige weit sich vorschiebende Unterbrechung des Indusgebietes.

Der Kamm, der hier folgt, ist ein mässig ansteigender. Der Uebergangsstellen sind mehrere, wohl keine niedriger als 18,000 Fuss. Solches

16) Die hier in Klammern gesetzten Seen sind keine eigentlichen Salzseen; sie werden wenigstens in einzelnen Monaten trinkbar.

ist die Höhe des Nágpo Góntsin-Passes, den ich zur Fortsetzung meiner Route nach den nördlichen, auf der rechten Seite des Indusgebietes gelegenen Seen benützte.

Doch sei hier auch noch über die kleineren Seen diesseits des Indus berichtet; meine eigene Route konnte dieselben, bei den Entfernungen, die noch vor mir lagen, nicht berühren, doch waren manche derselben, zu welchen die gewöhnlichen Verkehrsrouten führen, schon früher besucht worden. In nordwestlicher Richtung vom Tsomoríri liegt der Tso Thógchi Chénmo, auch Tso Kar genannt, mit einem kleinen Süsswassersee oberhalb desselben; der letztere ist nur Erweiterung in einem der Zuflüsse. Die Höhe ist 15,684 Fuss. Obwohl der See jetzt nur ein Paar Meilen (engl.) lang und etwa $^3/_4$ breit ist, muss seine Oberfläche zur Zeit, als er noch bis zur Höhe der einstigen Ausflussstelle gefüllt war, nahezu so gross gewesen sein als das Doppelte der gegenwärtigen Oberfläche des Tsomoríri. Thomson, der ihn auf dem Wege nach Le besuchte und in seinem „Western Tibet" darüber berichtet, schätzt den Höhenunterschied zwischen dem früheren und dem gegenwärtigen Niveau auf „etwa 150 Fuss".[17]) Das Wasser des Sees ist sehr stark salzig, aber rings um denselben in den höheren Theilen, die vom Wasser bedeckt waren als es nicht süss oder nur sehr wenig salzig war, finden sich jene Süsswassermuscheln, deren ich später, im 3. Bande der „Reisen", für beinahe all diese Seen zu erwähnen haben werde.

Die westlicher gelegene Verkehrslinie über den Bára Lácha-Pass, welche damals Roberts Route war, berührte gleichfalls eine Strecke lang das Salzseegebiet. Der Múre Tso, an dem sie ihn vorüberführte, zwischen den Pässen Lácha Lung und Tákelang, liegt im Déra Rúkchin, in einem Weideplatze, dessen ganze ausgedehnte Fläche als der Boden eines frühern Sees sich erkennen lässt. Die mittlere Höhe des Weidegrundes fand Robert 15,764, das Niveau des Múre Tso 15,517 Fuss. Cunningham erwähnt noch eines kleinen Sees Kyang Tso, der in geringer Entfernung davon und etwas südwestlich, thalabwärts gelegen ist.

Déra Rúkchin liegt 77° 50′ östlich von Greenwich. Westlich von diesem Meridian sind uns in Tíbet keine Salzseen mehr bekannt ge-

17) Thomson „Western Himalaya and Tibet", pag. 171.

worden, weder in Ladák noch in Bálti. Wenig westlich vom Múre Tso liegt aber hier noch ein Süsswasser-See, der Yánam See, am Fusse des gleichnamigen 20,026 Fuss hohen Peaks. Dieser See, wenn auch bedeutend schon durch die Erosion seines Ausflusses entleert, hat Zufluss und Ausfluss behalten. Die geographische Position des Yánam-Peaks ist $32^0\,49'{\cdot}2$ nördliche Breite; $77^0\,23'{\cdot}5$ östliche Länge von Greenwich.

Oestlich und etwas südlich vom Tsomoríri liegt ein Süsswassersee, Tso Lam, der „See des Weges" genannt, da derselbe nahe dem Wege über den Lának-Pass (18,740 Fuss), eine hier oft benützte Uebergangsstelle, sich befindet. Seine Oberfläche ist klein; aber er ist desshalb nicht unerwähnt zu lassen, weil nach Cunningham die Fläche, die sich als früher mit Wasser bedeckt erkennen lässt, auch hier eine ganz bedeutende ist.

Der nächste See gegen Osten ist jener bei Hánle, ein Süsswasser-See mit Zufluss und Ausfluss. Gegenwärtig hat sich die constante Wassermenge sehr vermindert und als Umgebung des Sees zeigt sich das in Tíbet sehr seltene Vorkommen eines Moores, das hier 6—8 Meilen Länge hat. Im Frühjahre ist es zum grossen Theile mit Wasser bedeckt, und in diesem Sinne wird der Hánle Tso von den Eingebornen als der bei weitem grösste „trinkbare See" im westlichen Theile von Tíbet geschildert.

Hánle ist ein für die gewöhnlich gewählte Route des Verkehrs sehr wichtig gelegenes Dorf, und es befindet sich hier ein buddhistisches Kloster, von 20 Lámas bewohnt. Seiner Höhe, wohl auch seiner Bestimmung nach, ist es der St. Bernhard von Tíbet, zugleich der höchste permanent bewohnte Ort der Erde (in so ferne die erst jüngst entstandenen Niederlassungen bei den Gnári Khórsum-Goldfeldern als „Ueberschreitungen" der gewöhnlichen Grenzen zu betrachten sind). Die Höhe des Klosters ist 15,117 Fuss nach Cunningham, 500 Fuss über dem See [18]). Auf Walker's neuester Karte von „Turkestan and adjoining countries" ist bei Hánle 14,267 Fuss als Höhe genannt, unbestimmt allerdings ob auf das Kloster oder das Dorf bezogen. Der See ist dort nicht angegeben; bei Cumingham liegt er etwas oberhalb des Dorfes, in einem westlichen Seitenthale.

---

18) Cunningham „Ladák" S. 143 m. d. Tafel V.

Von hier geht die Route längs des Hánleflusses in das Industhal, das an der Eintrittstelle dieses Seitenflusses sehr flach und breit ist. Dem weiteren Flusslaufe entlang wird aber das Industhal sehr enge und ist tief erodirt, so dass die Verkehrslinien gegen Le an mehreren Stellen seitlich vom Hauptthale sich hinziehen, ungeachtet der nicht unbedeutenden Steigung und Senkung solchen Weges.

Die Richtung der ich zu folgen hatte, stand ziemlich rechtwinklig auf dem Wege von Hánle gegen Le; ich berührte nämlich das untere Ende des Púgathales und folgte dann dem grösseren Ráldang-Thale zum Indus. Der obere Theil des Púgathales ist weithin in Tíbet bekannt wegen seiner Boraxminen; auch Schwefel, mit Gypslagen verbunden, kommt dort vor.[19]) Von dem Sommerdorfe Púga, 15,264 Fuss, geht bedeutender Handel aus.[20])

Am 24. Juni (1856) gelangte ich zum Halteplatze Ráldang, am linken Ufer des Indus, auf einer Thalstufe 414 Fuss über dem Flusse; für die Höhe des Indus erhielt ich, als ich ihn bei der Fortsstzung meines Weges gegen Norden zu überschreiten hatte, 13,858 Fuss.

Eine kleine Strecke ging ich am rechten Indusufer thalaufwärts, dann aber in nördlicher Richtung gegen Chúsul, über einen Kamm, der hier die Grenze des Pangkóng-Gebietes bildet.

Auf dieser Route fand ich zwei Salzseen, die von früheren Reisenden noch nicht erwähnt waren. Ungeachtet ihrer nur mittleren Grösse zeigten sich verschiedene mir neue Eigenthümlichkeiten.

---

19) Ich selbst konnte damals um die nördlichsten der tibetischen Seen noch zu erreichen, nicht seitlich von dem mir sorgfältig gewähltem Wege abweichen. Aber in den letzten Papieren unseres unglücklichen Bruders Adolph, die wir nach seinem Tode aus Káshgar erhielten, fand ich auch ein sehr detailirtes Aquarell dieser eigenthümlichen Thalfläche und ihrer Bodengestaltung, sowie specielle Notizenüber die Bearbeitung des Borax; sie folgen im VI. Bande der „Results".

20) Ueber die Handelsverhältnisse und die Bedeutung des Borax in der Nationalökonomie erhielten wir mitgetheilt: The Borax of Tibet in Annual Report upon the Administration of the Punjab Proper for $18^{49}/_{50}$ and $18^{50}/_{51}$, with a Supplementary Notice of the Cis- and Trans-Sutlej Territories. Lahore, 1854.

Es ist dies eine der vielen unter den officiellen Publicationen der Indischen Regierung, die wichtige locale und allgemeine Daten bieten. In Indien sind sie sehr verbreitet, auch „ziemlich allgemein" gelesen. Es ist zu bedauern, dass dieselben in Europa weniger bekannt sind, wohl desswegen, weil sie nur officiell vertheilt werden und nicht in den Buchhandel kommen.

Der erste derselben auf dem südlichen, gegen den Indus abfallenden Abhange war der Tso Gam, „der trockene See“. Der Name — wenn auch hyperbolisch, da der Kessel des Sees etwas noch mit Wasser gefüllt ist — scheint desshalb gewählt, weil das Eintrocknen sehr weit vorgeschritten ist und weil die Bodengestaltung mit mehr als gewöhnlicher Einfachheit und Deutlichkeit die frühere Höhe des Niveaus erkennen lässt. Das Wasser liegt hier wie in der Tiefe eines Kraters, selbst dunkle Gesteine fehlen nicht im Vordergrnnde und zur Seite; aber es sind dies dunkle Thonschiefer, die man sogleich als geschichtetes Gestein erkennt.

Im Hintergrunde stehen drei ziemlich flache Berge mittlerer Höhe, ohne Schneebedeckung, die auch durch ihre Form keineswegs daran denken machen, dass der See 14,580 Fuss hoch liegt.

Als Stelle des früheren Ausflusses lässt sich jener Theil des oberen, jetzt trockenen Randes erkennen, von welchem nach der einen Seite das Gefälle gegen den See, nach der anderen gegen ein wohl erhaltenes aber ganz trockenes Flussbett führt. Zur Zeit meines Besuches, Ende Juni, war auch der schräg gegenüber liegende Bach des Zuflusses ganz wasserleer. Der Boden zeigt von Grün nirgend mehr als schwache Punkte. Unerwartet war es, in solcher Landschaft doch einige Hirten mit Schafen und selbst mit Yaks als Staffage zu sehen; sie bewohnten ein kleines halb eingefallenes Haus, das früher als Zollhaus benützt wurde.

Der Tso Mitbál ist bei 14,167 Fuss Höhe gelegen und zwar jenseits der Kammlinie, die sich hier dem Industhale entlang zieht; er befindet sich nahe dem Fusse des Nord-Abhanges dieses Kammes. Obwohl nur 413 Fuss niederer als der Tso Gam, bot er, durch die umgebenden Berge etwas geschützt, ein mehr liebliches Bild. Es zeigte sich wenigstens längs der Ufer und an den unteren Theilen der Gehänge etwas zusammenhängendes Grün, und das Gestein war nicht so dunkel. Die Höhendifferenz zwischen der Stelle, wo das Aufhören des Ausfliessens sich erkennen lässt und dem gegenwärtigen Niveau des Sees (1856) fand ich 62 Fuss. Gewöhnlich bilden die früher wasserbedeckten Abhänge — bei den Salzseen sowohl, welche durch Eintrocknen niedrigeres Niveau erhalten haben, als auch bei jenen Seen, die durch fortschreitende Erosion ihres Ausflusses niedriger geworden sind, — eine ziemlich

gleichmässig geneigte Fläche. Hier zeigten sich aber Stufen, deren Form etwas so Localeigenthümliches ist, wie in ihrer Art die „Erdpyramiden" bei Mūd.[21]) Eine mehr als gewöhnliche Cohäsion der Bodenart mag die Hauptursache dieser Stufenbildung sein. Bei fortschreitendem Eintrocknen bringt das Abspülen und Benagen durch den Wellenschlag des Wassers anfangs ziemlich steile kleine Wände hervor; unter gewöhnlichen Umständen tritt sehr rasch auch das Nachgleiten ein, was dieselben verschwinden macht. Hier aber begann das Nachgleiten erst nachdem die Höhe eine ziemlich bedeutende geworden war, und es traten die Perioden, in denen von Zeit zu Zeit grösseres Nachgleiten auf einmal stattfand, sehr deutlich hervor; sie markirten sich als Unterbrechung des an sich ziemlich flachen Seebodens durch Abhänge, so steil, dass man an manchen derselben, wenn sie etwas lose waren, kaum hinaufgehen konnte.

Es liessen sich vier Stufen erkennen. Die oberste derselben hatte eine verticale Höhe von 23 Fuss, die zweite von $16\frac{1}{2}$ Fuss, die dritte von $11\frac{1}{2}$ Fuss, die vierte von 5 Fuss; die Neigung des steilen Abhanges von einer zur anderen war von der ersten bis zur vierten im Mittel zwischen 25 bis 35 Grad: von der letzten Stufe bis zum gegenwärtigen Rande des Sees war die Neigung 15 Grad, dabei doch noch merklich steiler als der nächste Theil des Seebodens selbst.

Ein „alter" Erdsturz, der schon vor dem Beginn des Eintrocknens herabgekommen sein musste, zeigt, wie sich auch auf meinem Bilde des Atlas gut erkennen lässt,[22]) ganz dieselben Stufen, während ein anderer, in geringer Entfernung von diesem, alle Stufen überlagert, also erst in neuer Zeit herabgefallen sein kann.

Dass die unteren Stufen die kleineren und die flacheren sind, hängt wohl mit der Verminderung der ursprünglichen Neigung des Seebodens, die unten etwas geringer war als oben, zusammen. Aber von einer mehr allgemeinen Ursache ist bedingt, dass die oberste Stufe im Niveau mit dem Aufhören des Ausflusses beginnt. Es zeigt dies, dass sich hier, so lange der Ausfluss bestand, solche Stufen nicht gebildet

---

21) „Reisen" Band III S. 112 und 113; ähnlich den Erdpyramiden in Südtirol.

22) Atlas der „Results" Band I, Taf. IV.

haben, wahrscheinlich desshalb nicht, weil damals, als noch die Erosion fortwirkte, ganz Tíbet ein viel feuchteres Klima hatte, und weil durch Regen bei neuer Erweichung des Bodens die Entstehung solcher Stufen sehr leicht gehindert wird.

Bei der Untersuchung des Ufers auf Marken des winterlichen Wasserstandes konnte ich, wegen der vorgeschrittenen Jahreszeit, keine bestimmten Anhaltspnnkte mehr bekommen. Aber auffallend war mir dabei, dass ich rings um den See viele Steine umherliegen fand, die in ihren unteren Theilen wie mit Wasser abgewaschen waren, während der obere Theil mit einer dünnen Salz-Incrustation bedeckt war. Solches war hier bei allen isolirten Steinen von etwas über 1 Fuss Bodenhöhe der Fall, wenn ihre Lage über dem See nicht viel über 100 Fuss betrug. Als Erklärung ist anzunehmen, dass im Beginne des Winters, während der See noch verdunstete ehe auch dieser mit Eis sich bedeckte, durch den Wasserdunst, wie in der Nähe des Meeres, suspendirte Salztheile auf jene Körper in der nächsten Umgebung vertheilt wurden, die aus der niederen Schneedecke, durch Wind schneefrei, herausragten; ferner hätte das Salz keine Wahrscheinlichkeit gehabt auf diesen Steinen sich zu erhalten, wenn hier nach der Ablagerung desselben, die vor dem Gefrieren des Sees stattfinden musste, noch irgend merklicher Schneefall oder Regen gefolgt wäre.

Bei anderen Seen ist mir eine so markirte Salz-Incrustation nicht vorgekommen. Es genügt eine etwas mehr offene Lage, um zu veranlassen, dass Wasser, sowie Salztheilchen, die aus einem See aufsteigen, über grössere Flächen sich verbreiten; das deutliche Hervortreten von Salzablagerung verschwindet dann.

Das Wasser dieses Sees ist noch trinkbar, doch lässt sich der Geschmack entschieden als ungewöhnlich erdig bezeichnen.

Chúshul, einer der wenigen ständig bewohnten Orte Pangkóng's, wo ich am 27. Juni ankam, liegt sieben Meilen thalabwärts vom See Mitbál; die Häuser bilden mehrere unter sich ziemlich entfernte Gruppen auf den Gehängen, wie dies in tibetischen Dörfern der Exposition und der Bodenbeschaffenheit wegen sehr häufig vorkömmt, ebenso wie in unseren Alpendörfern. Die Höhe der niedersten Gruppe, wo ich mein Lager aufschlug, fand ich 14,406 Fuss.

Oestlich davon, auf dem chinesischem Gebiete der Provinz Rúdok, sind die beiden Salzseen Tso Rul und Tso Shaldát gelegen. Strachey in seiner „Physikalischen Geographie des westlichen Tíbet“ giebt für den Tso Rul, noch in seiner jetzigen Gestalt, die Länge von 15 engl. Meilen bei einer Meile Breite; der Tso Shaldát, der östlicher noch und etwas thalaufwärts gelegen ist, ist von ihm drei Meilen lang und ungefähr eine Meile breit genannt; Höhe an 14,400 Fuss. Von beiden ist das Wasser untrinkbar; der Tso Rul ist der salzigere. Der Name Tso Rul wurde mir als „der faule, der bittere See“ erklärt. (Auch die ganz kleinen Wasserstellen längs des Tsomognalari, bei Man, (S. 138), wurden mir so benannt). Auf Col. Waugh's Karte ist statt Tso Rul „Tso Pangur“ geschrieben, wohl Panggúr gemeint. Den letzteren Namen hatte ich ebenfalls angegeben erhalten,[23]) aber nicht für den See, sondern mit der Bedeutung „Rasen-Windung“ für eine mehr als mittelgut bewachsene Strecke dieses Seitenthales etwas unterhalb des Sees.

23) Erläutert in „Results“ vol. III, S. 231.

Der Tsomognalarí in Pangkóng.

Gestalt und Lage. Trennung in oberen und unteren See. Grösse der Oberfläche. — Die Benennung des Sees. — Sandgürtel, Staubsuspensionen. — Frühere Höhe und Ausdehnung der Wasserfläche. — Bewohnte Stellen der Seeufer. Pangmíg, der Sitz des Góba. — Secundäre Oscillationen der Wasserhöhe. — Construction eines Flosses auf Schläuchen — Sondirungslinien. Grösste Tiefe. — Unteres Ende. — Adolph's Changchénmo-Route.

Der Tsomognalarí ist der bedeutendste der tibetischen Salzseen, von grosser Länge aber von verhältnissmässig geringer Breite. Er beginnt mit einer nordwestlichen Richtung, dieser folgt der grösseren Strecke entlang eine westliche, die bei Chúshul wieder in die nordwestliche Richtung übergeht; beide Lagen wiederholen sich in den Hebungslinien der umgebenden Kämme und lassen sich auch als zusammenhängend mit den Klüftungssystemen des Gesteines erkennen.

Nahe seiner Mitte ist der See durch eine Verengung des Thales, mit welcher auch ein breiter Erdsturz sich hier verbindet, in zwei Theile getrennt, in den „oberen" und in den „unteren See".

Die dazwischen liegende Landstrecke, „die Landenge von Ōt", ist an 3 englische Meilen lang; durch diese führt der Ausfluss des oberen Sees nach dem unteren in einer Breite von nahe 300 Fuss, mit 40 Fuss Gefälle. Doch ist dieses Flussbett, wie Hirten aus der Landenge mir sagten, (ähnlich wie jenes zwischen den Seen Mansaráur und Rákus Tal) den grössten Theil des Jahres trocken. Nur während des Sommers, zur Zeit des höchsten Wasserstandes in Verbindung mit dem allgemeinen Abschmelzen der Firnreste unterhalb der Schneegrenze, tritt auch hier regelmässig etwas Wasserdurchfluss ein.

Die Fläche des oberen Tsomognalarí schätze ich jetzt, mit Berücksichtigung der neuen Daten der von der G. T. S. expedirten Pándits, auf nahe 100 engl. Quadrat-Meilen. Für jene des unteren hatte ich

102 erhalten, und hatte damals die Gesammtfläche beider Seen zu 250 engl. Quadrat-Meilen, also den oberen etwas zu gross, geschätzt.[24])

Der obere See liegt ganz in der Provinz Rúdok, zum chinesischen Tíbet gehörend; an dem unteren See zieht sich das chinesische Gebiet nur auf der Südseite noch etwas westlich von der die beiden Seen trennenden Verengung fort.

Eigenthümlich ist die Wahl des Namens Tsomognalarí, da derselbe als „Süsser (trinkbarer) See in den Bergen" mir interpretirt wurde, was auch mein Bruder Emil nach der Aufschreibung des Namens, die ich erhalten hatte, mir bestätigte. Für den unteren See, der sogar zu den salzreichsten unter den grösseren der tibetischen Seen gehört, trat mir diese Deutung als ein lucus a non lucendo überraschend entgegen; sie ist wohl als eine Uebertragung der Bezeichnung des oberen trinkbaren Theiles auf den ganzen See zu verstehen. Dass der Name jener Zeit schon angehöre, als auch der untere See noch nicht zur Ungeniessbarkeit durch Eintrocknen concentrirt war, dürfte ungleich geringere Wahrscheinlichkeit haben; geologische und physikalische Veränderungen schreiten meist weit langsamer vor als jene in den Sprachen und den Wohnsitzen der Völker.

In den Bearbeitungen der indischen Vermessung ist der Tsomognalarí als Pankong-See angeführt, obwohl der grössere Theil in der Provinz Rúdok liegt. Von den Bewohnern mag dieser Name, da in der Provinz Pangkóng kein anderer grosser See vorkömmt, wohl richtig verstanden werden, doch fand ich ihn niemals von denselben gebraucht.

Rings um den See läuft ein flacher, sandiger Gürtel, von wechselnder Breite, der durch das Eintrocknen des Sees zu Tage kam. Der Boden ist dort so lose geblieben (da nur wenig von thoniger Masse darin sich findet), dass jetzt Flugsand weit über das einstige Niveau des Sees sich erhebt und mehrere hundert Fuss hoch die Zerklüftungen der Felsen ausfüllt. Vorzugsweise sind die Südabhänge damit bedeckt, was mit dem Vorherrschen von Südwinden im Sommer zusammenhängt; während der Periode der nördlichen Winde im Winter ist solche Be-

---

24) „Results" vol. II, S. 419.

wegung der Sandmassen durch die wenn auch dünne, doch hart gefrorne Schneedecke gehindert.

Zur Zeit meines Aufenthaltes, Ende Juni 1856, war, mit dem Vorherrschen ziemlich heftiger Südwinde in den mittleren Tagesstunden, die Bildung gewaltiger Haufenwolken verbunden. Aber ungeachtet einigen Einflusses der indischen Regenzeit ist solche Wolkenbildung eine ausnahmsweise. Es ist weit häufiger, dass in Tíbet jene trockene Trübung der Luft eintritt, die ihren Grund im Emporwirbeln des Staubes hat, und bei freiem Ueberblicke wie hier am Tsomognalarí, zeigten sich in Tíbet, selbst bei Wolkenbildung, die tief liegenden Theile der Landschaft in ihrer Färbung meist durch die erdige Suspension in der Luft sehr verändert. Auch in allen grossen Flussthälern in Tíbet treten ähnliche Farbenreflexe häufig ein, und auf flachen Stufen der Abhänge findet man dort viel von feinen Ablagerungen lacustrinen Ursprunges. Ganz so hoch über dem Boden wie — bei viel grösserer Hitze und weit feinerem Staube während der indischen Trübungen — erhebt sich in Tíbet die suspendirte Masse nicht; solches kömmt nördlich von Indien erst in der Góbi-Wüste wieder vor.

Als Standpunkt zur landschaftlichen Aufnahme wählte ich eine an 500 Fuss sich erhebende Felsengruppe in den nächsten Umgebungen des Lagerplatzes Dēra Tákung.[25])

Am unteren Tsomognalarí liess sich, deutlicher als an den meisten der anderen Seen, die oberste Grenze des Seebeckens auch für die Süsswasserperiode, für die Zeit, die dem Eintrocknen vorausgegangen war, bestimmen. Nahe dem Hirtenplatze Mírak am linken Ufer konnte ich an Felsenwänden sehr genau die letzten Erosionsmarken von Seewellen erkennen.

Für jenes Niveau des Sees, das mit dem Aufhören des Ausflusses zusammenfällt, blieb die entscheidende Stelle jene am unteren Ende, welche ich erst einige Tage später erreichte; aber auch 2 Meilen oberhalb des Dorfes Mírak zeigte sich an einem 28 bis 31 Grad geneigten Abhange gegen den See eine so deutliche Verschiedenheit in der Veränderung der Gesteinfläche und in der Form der Sedimente auf kleinen

25) Gen. Nr. 584 u. 585; Tafel des Atlas zu den „Results“ Nr. XXVIII.

Flächen, dass ich schon hier (zu etwaiger Vergleichung mit späteren Daten unmittelbar an der einstigen Ausflussstelle) die Höhe der obersten Wellenspuren über dem See mass; ich erhielt 240·8 Fuss, was mir anfangs doch etwas zu bezweifeln schien, was aber durch die directen Bestimmungen an der Ausflussstelle, mit einer geringen Vermehrung sogar, ähnlich sich ergab.

Von Déra Tákung, meinem ersten Lagerplatze am Tsomognalarí, war ich dem linken Seeufer entlang thalabwärts gegangen. Ich kam hiebei durch drei Hirtenplätze mit festen Gebäuden, Káktet, Mírak und Man, unter denen Mírak der wichtigste und am besten gelegene ist; bewohnt sind sie nur im Sommer.

Bei Man beginnt eine Reihe sehr kleiner Seen, die auf einer Stufe des Seitenkammes an 2000 Fuss über dem Tsomognalarí gelegen sind. Bisher hatte ich nirgends bei den anderen Seen kleinere auf Nebenstufen vorkommend gefunden. Vom See zunächst bei Man führt ein deutlich ausgesprochenes Thal herab; diesem hohen Nebensee folgen die zwei kleinsten, wahrscheinlich ohne Ausfluss. Der vierte und der fünfte fliessen in Seitenthälern ab, welche etwas unterhalb der früheren Ausflussstelle des Tsomognalarí einmünden.

In ähnlicher Lage ist mir eine zweite Reihe solcher Seen auch auf der linken Seite des Kyúptangthales bekannt, aus dem ein Zufluss herabkömmt, der nahe dem unteren Ende noch in dem Tsomognalarí einmündet. Der letzte dieser kleinen Seen liegt an der Südseite des 17,500 Fuss hohen Chágra-Passes, über den man gegen Norden in das Changchémno-Thal gelangen kann.

Auf Man folgte am See Pangmíg, ein ständig bewohnter Ort, noch $6^1/_2$ Meilen vom Ende entfernt. Wie der Name es anzeigt, der bedeutet „das Wiesen-Auge", findet sich hier eine längliche, in der Mitte sich erweiternde Grasflur und etwas culturfähiger Boden. In Tíbet ist das Vorkommen solcher Stellen für die Bewohner so wichtig, dass der Name Pangmíg mit Vorliebe gegeben wird, wo solche günstige Bodengestaltung ist; ich fand ihn später wieder in Ladák und in Núbra.

Zu Pangmíg traf ich den Góba oder Vorstand der Provinz Pangkóng, der hier ungeachtet einer Höhe von 14,146 Fuss seinen Sitz hat. Ausser diesen Orten gibt es am unteren See längs der ganzen aus-

gedehnten Uferlinie nirgend mehr, auch nicht für Hirtenobdach, eine Steinhütte. Am oberen See ist mir nur eine Hirtenstätte mit Häusern am Seeufer genannt worden, Pal, am rechten Ufer, an 30 Meilen von Ot entfernt. Weiter aufwärts folgt nach Strachey's Karte (auf der aber Pal nicht angegeben ist) das Sommerdorf No, in einem von Norden einmündenden Seitenthale gelegen.

Der Góba von Pangmíg ging bereitwillig auf die Besprechung der Verhältnisse seines Gebietes ein und zeigte ganz bestimmte und, wie mir scheint, recht wohl begründete Auffassung. In der Jahresperiode, sagte er, ändert sich der Wasserspiegel nur wenig; auch das langsam vor sich gehende Schmelzen des Schnees auf den Bergabhängen hat geringen Einfluss. (Aehnliches hatte man mir auch zu Kórdzog vom Tsomoríri gesagt).

Die gewöhnliche Höhe des Schnees auf der Eisdecke im Winter schätzte er anf „wenig über einen Fuss". Aber das Höhersteigen des Wassers in einzelnen Jahren soll an 4 bis 5 Fuss betragen und dieses soll meist von etwas grösserer Schneemenge in den kalten Monaten abhängig sein. Hohe Wasserstände sollen sehr sicher mit fruchtbaren Jahren zusammenfallen. (Wegen vermehrter Bodenfeuchtigkeit sehr wohl möglich, ungeachtet regenlosen Sommers und Herbstes). Solcher Steigerungen der Fruchtbarkeit, mit grosser Wasserhöhe des Sees verbunden, erinerte sich der Góba mehrerer vor 1841; jene 15 Jahre aber, die meinem Besuche von 1856 vorausgingen, sollen bei ziemlich niederem Wasserstande auch kaum mittelgute gewesen sein; das Wiedereintreten von Aenderungen wie vor 1841 wurde mit Zuversicht erwartet. Es bestärkte dies mein Vertrauen auf seine Angaben; man wird ja nur zu häufig finden, dass von Landleuten, wenn über ähnliche Dinge befragt, eine Aenderung, die etwas angehalten hat, besonders wenn sie zugleich eine schlimme war, als permanent betrachtet wird.

Oscillationen, von geringer Grösse wie die hier gemeinten, lassen sich sehr wohl mit dem stetigen Fortschreiten des Eintrocknens und mit der allgemeinen Trockenheit des Landes vereint denken.

Für den Tsomoríri, bei welchem analoge nicht periodische Oscillationen der Wassermenge wohl ebenfalls vorkommen, hatte ich über diese nichts erfahren können. Bei den kleineren Seen ist fast

immer auch das zu denselben gehörende Flussgebiet so wenig ausgedehnt, dass solche Oscillationen geringe Wahrscheinlichkeit haben, deutlich bemerkbar zu werden.

Zur Vervollständigung der Untersuchung der physikalischen Eigenschaften, sowie zur Beurtheilung der Verminderung durch Austrocknen im Vergleiche mit der noch gegenwärtig vorhandenen Wassermenge, war es meine feste Absicht geworden, mir irgend ein Fahrzeug hier zu verschaffen, da dies der grösste und zugleich der letzte der Salzseen war, der in dieser Gruppe mir vorlag. Es gelang mir, wenn auch in sehr unvollkommener Weise. Ein Ort wie Pangmíg hätte zwar schon Boote erwarten lassen, um so mehr, da solche im oberen Dihóng-Thale eine grosse Strecke weit in Höhen vorkommen, die zwar 500 Fuss niederer sind als hier, die aber dennoch auch dort die Grenze hochstämmiger Bäume, selbst in vereinzeltem Auftreten, überschritten haben. Im Dihóng-Thale allerdings liegt eine Veranlassung zu Schiffahrt vor, hier aber fehlt das Bedürfniss des Verkehrs, weil das gegenüberliegende Ufer des Sees unbewohnt ist; und weil hier alles Holz aus ziemlicher Entfernung zu Lande heraufgeschafft werden muss. Von Booten war nirgend etwas aufzutreiben. In Erinnerung an die heimathlichen Alpen dachte ich nun an Flösse, doch hätte man zum mindesten mehrere der „besten Häuser" demoliren müssen, um nur einigermassen stämmiges Holz zu erhalten; bisweilen wird ein schwimmender Yak auch im Wasser als Reitthier benützt, was aber, wegen der Unlenksamkeit des Thieres sowie wegen seiner geringen Tragkraft im Wasser, niemals praktische Bedeutung erhält; am wenigsten hätte sich ein Yak bei der Ausführung von Beobachtungen irgend welcher Art benützen lassen.

Endlich ward es mir möglich, zwölf Schläuche aus Schaf-Häuten, welche an Holz von kleinen Dimensionen, wie Zeltstangen, Stöcke, Stiele von Ackergeräthen etc. etc., befestigt wurden, zur Construktion eines wenn auch schwachen Flosses zu verwenden. Die Schläuche waren zum Aufbewahren von Flüssigkeiten bestimmt, also wasserdicht; aber ich dachte, es liesse sich, vorsichtig ausgewählt, eine Gruppe von solchen auffinden, die hinlänglich dicht wären, mit Luft aufgeblasen zu werden; diese konnten dann als Träger an der Unterseite eines leichten Flosses aus Stöcken benützt werden.

Ich kam auf diese Idee, weil mir aus dem Pănjáb bekannt war, dass dort einzelne Schläuche, aus Zébu- oder aus Büffel-Häuten aufgeblasen, beim Flussübersetzen gebraucht werden. Dort sind die Vorkehrungen derart, dass auf jeder Seite des Schlauches ein Mann schwimmt, der mit einem Arme an dem aufwärts gestellten Vorderfusse der Haut sich anklammert, und in der Hand des anderen Armes ein kleines Ruder führt. In der Mitte eines solchen Rinderschlauches kann noch ein dritter Mann reitend sitzen, der sich passiv verhält; doch ist auch für diesen solche Art des Uebersetzens nicht ganz ohne Schwierigkeit, da bei der geringsten Unruhe der längliche Schlauch bedeutend sich zu drehen beginnt.[26])

Versuche, die mit meinem tibetischen Flosse zuerst längs dem Ufer gemacht wurden, zeigten, dass auf ein Quadrat von wenig mehr als 6 Fuss Seite ausser mir und den Instrumenten zwei Ruderer und noch ein Mann zum Helfen beim Benützen des Senkbleis, der Bodenthermometer etc. etc. aufgesetzt werden konnten. Die quadratische Form war allerdings nicht die bequemste für die Fortbewegung im Wasser, aber diese allein erlaubte die Grösse des vorhandenen Holzes richtig zu benützen: durch das Aneinanderfügen von Holzstücken, um eine grössere Länge zu erhalten, wäre bei der hier nöthigen Einfachheit der Construction die Widerstandsfähigkeit des Flosses nicht nur gegen die Schwere der Belastung, sondern auch gegen etwa eintretenden Wellenschlag sehr vermindert worden. Dabei blieb noch immer als ein unerprobtes Element der Gefahr, dass aus den Schläuchen, bei stundenlangem Drucke auf dieselben, Luft austreten könne und so die Tragkraft vermindert werde. Thierische Blasen, die hier nicht aufbewahrt werden, waren nicht vorräthig; diese hätten, in feste Tücher eingenäht um gegen Reibung am Holze geschützt zu sein, verhältnissmässig die grösste Tragfähigkeit gehabt und wären viel leichter als diese Schläuche aufzublasen und zu verschliessen gewesen.

Die physikalischen Beobachtungen werden in allgemeiner Zusammenstellung und vergleichender Erklärung zum Abschlusse des Berichtes

---

26) Wir haben einen solchen Schlauch, aus dem Jhílumgebiete, in unserer Sammlung, den Robert im Pănjáb im darauffolgenden Winter sich verschaffen konnte.

über diese Salzseen folgen. Hier seien dagegen die für den Tsomognalarí resultirenden topographischen Daten zusammengestellt.

Vollständig befuhr ich zwei Linien in dem gegen Nordwesten gerichteten Theile des unteren Sees; die erste beim Dorfe Man, die zweite bei Mírak. Die Breite an beiden Stellen war nahezu 3 Meilen. (Ich war von Pangmíg wieder 2 Tagmärsche thalaufwärts gegangen, um Linien zu haben, die der Mitte des Sees näher lagen.)

Während der Ueberfahrt schätzte ich die Lage der Punkte, wo ich das Senkblei hinabliess, mit dem prismatischen Compass nach Gegenständen am Ufer, deren Entfernung unter sich ich vorher gemessen hatte.

Die Resultate, die ich auf den beiden ersten Linien (am 30. Juni) erhielt, waren die folgenden:

A. Linie bei Man.

	Entfernung vom linken Ufer.	Tiefe in engl. Fuss.
Nr. 1)	1/8 der Breite	55·5
„ 2)	1/4 „ „	67·5
„ 3)	1/2 „ „	140·0
„ 4)	3/4 „ „	148·4
„ 5)	etwas über 7/8	63·0

B. Linie bei Mírak.

	Entfernung vom linken Ufer.	Tiefe in engl. Fuss.
Nr. 6)	1/8 der Breite	13·5
„ 7)	1/4 „ „	41·6
„ 8)	3/8 „ „	68·1
„ 9)	1/2 „ „	107·1
„ 10)	5/8 „ „	160·0
„ 11)	3/4 „ „	110·0
„ 12)	7/8 „ „	56·5

Auf einer dritten Linie, welche Dĕra Tákung gegenüber das Centrum des unteren Sees durchschnitt, ergab sich etwas jenseits der halben Breite an einer Stelle die Tiefe von 170 Fuss; die Entfernung des Punktes vom Ufer konnte ich nicht wie am vorhergehenden Tage direct durch Visionslinien nach bekannten Gegenständen bestimmen, da es diesmal ziemlich windig war, und das bedeutende Schwanken des kleinen Flosses das Handhaben des prismatischen Compass unmöglich machte. Diese Tiefe kann mit Wahrscheinlichkeit als die grösste des Sees betrachtet werden, da ich nicht versäumt hatte, sogleich noch weiter aufwärts von dieser Stelle, der Längenrichtung des Sees parallel, fortzusondiren, und dabei in geringer Entfernung davon auf Abnahme der Tiefe kam. Fast hätte an diesem Tage, am letzten, den ich noch in der mittleren Region des Sees zubringen konnte, überhaupt jede

neue Sondirung unmöglich geschienen. Um 7 Uhr Morgens war der Wellenschlag so heftig, dass der Höhenunterschied des niedersten und des höchsten Wasserstandes am Ufer $3^1/_2$ Fuss betrug; es schritt nämlich die Welle in der Periode des Ansteigens auf dem 17^0 geneigten Uferrande 12 Fuss vor. Die Zeit des Ansteigens war 5 Secunden. Auf Alpenseen mit guten Booten lässt sich allerdings weit besser Widerstand leisten. Am Starnbergersee sah ich einmal ein Boot bei $4^1/_2$ Fuss Wellenhöhe noch recht gut geführt, obwohl solche schon als eine ungewöhnlich stürmische Seebewegung gilt; selbst mit dem ziemlich grossen Boote musste dabei gegen die Wellenlinie in einem Winkel von 40—50 Grad angefahren werden und nicht zu stark, damit die Hebung möglichst gleichmässig sich vertheilte.

Auf dem Salzsee wäre bei einem Sturme wie damals des Morgens vom Flosse kein Gebrauch zu machen gewesen. Zwar sassen wir mit gekreuzten Beinen und der Schwerpunkt lag tief, aber bei solchem Wellenschlage hätte das kleine Fahrzeug zu leicht brechen oder umschlagen können. Doch wir hatten ohnehin längs dem Ufer fast 8 Meilen fortzuwandern, bis wir zur neuen Linie kamen. Gegen 10 Uhr war die Wellenhöhe 1 Fuss 3 Zoll geworden; jetzt konnten wir der Mitte zusteuern, wenn auch nicht selten das schwache Holzgefüge in bedenklicher Weise knarrte und krachte.

Die Tiefe von 170 Fuss als Maximum ist für einen See von so grosser Flächenausdehnung und umgeben von so bedeutenden Bergen eine nur sehr geringe zu nennen. Haben doch unsere Alpenseen meist Tiefen über 400 Fuss. Hier in Tibet allerdings muss man in gewissem Sinne den Höhenunterschied zwischen dem gegenwärtigen Niveau und jenem, in welchem das Austrocknen begann, hinzurechnen, was für diesen See zur Zeit als sein Ausfluss aufhörte die Tiefe von 326 Fuss, nämlich um 156 Fuss grösser ergiebt. (Vergl. S. 146.)

Am folgenden Tage versuchte ich auch das Schwimmen; ich wählte dazu die Stunde vor dem Tiffin (oder zweiten Frühstück) 11 Uhr Vormittags bis gegen Mittag. Die Temperatur des Wassers, die ohnehin in der Tagesperiode nur sehr wenig sich ändert, war 11 Uhr 10 Minuten Morgens am Ufer $12{\cdot}1^0$ C., in geringer Entfernung davon $8{\cdot}2^0$ C., also immerhin sehr kühl; die Lufttemperatur im Schatten war $20{\cdot}4^0$ C.;

Besonnung sehr lebhaft. In ungewöhnlicher Weise hat sich wegen der Trockenheit der Luft, zum Theil auch wegen des niedrigen Barometerstandes eine fieberhafte Kälte während des Abtrocknens fühlbar gemacht. Ich war gegen 7 Minuten im Wasser geblieben.

Das Schwimmen hatte ich wie im Meere gefunden, durch den Salzgehalt etwas erleichtert, aber doch in geringerem Grade; hemmend trat hier nach kurzer Zeit, ähnlich wie beim Laufen in solcher Höhe, eine Erschwerung des Athmens ein, aber ohne bestimmte Form eines localisirten unangenehmen Gefühles. Der Luftdruck war nur 18 Zoll, dies mag für ungewohnte und starke Bewegungen ein hinlänglich störender Umstand gewesen sein. Im Gehen bei gewöhnlicher Schnelligkeit fühlte ich noch keine Affection in solcher Höhe. Meine Aufmerksamkeit war um so mehr erregt durch diese Art resultirender Erschwerung des Schwimmens im Tsomognalarí, da am vorhergehenden Tage bei etwa ungenügender Festigkeit unseres Fahrzeuges meine Bekleidung die Schwierigkeit noch sehr bedeutend vermehrt hätte.

Da der Góba für die Resultate meiner Sondirung sich sehr interessirte, liess ich ihm durch meinen Dolmetscher vom Hindostáni ins Tibetische einen kleinen Verticaldurchschnitt des Sees erläutern und mit den Zahlen versehen, welche die Messung ergeben hatte, und gab ihm eine gute Hanfschnur[27]) mit Bleiloth zum Sondiren. Als Maass erhielt er einen Holzstab von 2 Fuss Länge, und für den Fall, dass er diesen verlieren sollte, nahm ich das Maass seiner Grösse (5 Fuss $3^1/_4$ Zoll)[28]) und sagte, er möge dann dies als seine Einheit ansehen und in Halbe und Viertel theilen. Als Ausgangspunkte für Linien quer über den See, wo er im Winter von der Eisdecke hinab seine Schnur senken sollte, nannte ich Pangmíg, Man und Mírak für den nach Norden gerichteten Theil des unteren Sees, und Tákung für die Mitte; auch sollte er wo möglish noch zwei entsprechende Messungen auf dem ostwestlich gerichteten Theile des unteren Sees machen. Er erklärte sich sehr gern dazu bereit, und sagte selbst, in richtiger Weise nichts Unwahrscheinliches versprechend, dass er auf dem oberen See, der

27) Die in Tibet gebrauchten Schnüre sind aus Haaren des Yak gemacht.
28) Für Tibeter gute Mittelgrösse.

schon zu China gehöre, nichts machen könne. Leider habe ich nichts erfahren, hörte auch nicht, dass andern Europäern, etwa den in den folgenden Jahren dort mit Messungen beschäftigten Mitgliedern der Indischen Landesvermessung irgend Mittheilungen gemacht worden wären. In ähnlicher Weise, wie später aus diesen Gegenden von den zersprengten Begleitern meines armen Bruders Adolph Nachrichten an uns kamen, wenn auch auf ziemlich grossen Umwegen, ebenso hätte auch eine Mittheilung des Góba, über Le und Kashmír gesandt, sehr wohl erwartet werden hönnen.

Der Tsomoríri in Rúpchu bliebe auch sehr lange gefroren; Ende Oktober ist, nach Trebek, die Eisdecke meist geschlossen, und Mitte Mai noch soll man darüber gehen können. Schon dort hatte ich an Zurücklassen von Schnur und Senkblei gedacht. Da aber während des Winters in weitem Umkreise Niemand sich aufhält, wäre um so weniger die Ausführung irgend solcher Messung zu erwarten gewesen; auch hatte ich der guten, langen Schnüre, die dazu nöthig, nicht zu viel bei mir; die Eingebornen selbst haben nur Schnüre aus Yakshaaren, die ungleich dicker sein müssen, also zum Sondiren weit weniger gut angewandt werden könnten als die Hanfschnur: die Yaksschnur hat, wenn dünn, geringe Tragfähigkeit, wenn dick, kann sie nur unvollkommen gespannt werden; auch verkürzt sie sich viel mehr als Hanf, wenn durchnässt.

Sechs Meilen nordwestlich von Pangmíg fand ich das untere Ende des Sees und die Stelle des früheren Ausflusses. Wie bei den anderen Seen war auch beim Tsomognalarí die Höhe des Niveaus, bei welchem das Abfliessen aufhörte, da am besten zu beurtheilen, wo der Austritt einst stattgefunden hatte; längs der Ufer in grösserer Entfernung von der Austrittsstelle, sind zwar sehr häufig Niveaulinien zu erkennen: aber schwer lässt sich schon dort beurtheilen, ob es solche Linien sind, die noch während des Fortschreitens der Erosion entstanden sind, die also höher liegen als der Punkt, wo der Ausfluss aufzuhören begann, oder solche, die erst später während des Fortschreitens des Eintrocknens sich so gestaltet haben, die also tiefer liegen würden als jenes Niveau, in welchem der Ausfluss aufhörte.

Die totale, durch Erosion und Eintrocknen hervorgebrachte, Höhendifferenz zwischen dem früheren und dem gegenwärtigen Niveau fand

ich für den Tomognalarí gleich 244 Fuss. Vom gegenwärtigen Niveau des Sees bis 73 Fuss verticaler Höhe zieht sich eine ununterbrochene sanfte Fläche hinan, mit 12 bis 18° Neigung: sie reicht hier auch noch eine bedeutende Strecke weit in ähnlicher Weise unter den gegenwärtigen Wasserspiegel hinab.

Zwischen 73 und 156 Fuss verticaler Höhe ist das Ansteigen ein steileres. Bei 156 Fuss hatte der Ausfluss aufgehört; die Erosion des Baches reicht nicht weiter herab.

Von 156 bis 244 Fuss Höhe, aber dort deutlich endend, liess sich noch Seeablagerung — an flachen kleinen Terrassen der gleiche Sand wie noch jetzt unmittelbar am Wasser — auffinden.

Zur Zeit des höchsten Wasserstandes, der sich als einst bestehend erkennen lässt, muss also die Uferlinie des Sees, selbst wenn man die mittlere Neigung der Ufer zu 20 Grad annimmt, nach jeder Richtung hin um 713 Fuss hinausgerückt gewesen sein, was, bei der grossen Länge des Sees, auch die Oberfläche desselben nicht wenig vergrössert. Am unteren See fand ich bei einer mittleren Breite von 3 Meilen eine Vergrösserung um $^1/_{12}$ der horizontalen Oberfläche resultiren; am oberen See, welcher der längere und zugleich der weit schmälere ist, ist die relative Grösse der Zunahme eine noch bedeutendere.

Für die Zeit, in welcher der Ausfluss aufhörte und das Salzigwerden beginnt, ergiebt sich bei 156 Fuss Höhenunterschied — die Neigung zu 20 Grad genommen — ein Hinausrücken der Uferlinie am Seeboden um 456 Fuss.

Selbst unmittelbar an der früheren Ausflussstelle eines Salzsees ist meist die Höhe über dem gegenwärtigen Niveau um so schwerer zu bestimmen, je grösser die erreichte Höhendifferenz ist, ähnlich wie eine sehr tiefe Erosion eines Flussthales nicht sogleich als Wirkung des Stromes entgegentritt; man kann erst dann eine solche mit Bestimmtheit beurtheilen, nachdem man Gelegenheit hatte, die ganze Reihe der Einzelheiten, welche darüber entscheiden, kennen zu lernen.

Hier war die Messung unter anderem dadurch erleichtert, dass wegen der grossen Ausdehnung des Sees und wegen der nicht unbedeutenden Menge von Wasser, das einst hier Abfluss hatte, das

Gefälle in kurzer Entfernung vom See nach aussen ein steiles, aber gegen den See herein ein ziemlich flaches ist. Es hatte ja nach dieser Stelle hin zugleich mit dem Abflusse des Wassers so viel von Schlamm und Suspensionen sich hingeschoben und zum Theil durch Niedersinken dort sich angehäuft.

Der Thalweg des früheren Ausflusses führt über Mugláb nach Tánktse und ist, als gerade Linie entwickelt, 18 engl. Meilen lang. Obwohl aus dem See kein Wasser kömmt — auch hier lässt sich im Flussbett nicht eine Quelle finden, die ihrer Lage oder einem relativ grösseren Salzgehalt nach auf Filtration aus dem See bezogen werden könnte — beginnt doch ziemlich bald im Bette des Ausflusses Wasser sich zu zeigen, solches nämlich, das von den Abhängen, meist von den südlichen, zufliesst.

Bei Tánktse endet dieses Thal im Khárgyam-Thale, welches eines der grösseren südlichen Seitenthäler des Shayókflusses ist, und eine mit dem nordwestlichen Theile des Tsomognalarí ganz parallele Richtung hat. Der Khárgyam-Gipfel in dem Kamme zwischen der Thalsohle und dem See hat 22,076 Fuss Höhe.

Messungen und physikalische Beobachtungen.

Specifisches Gewicht und Temperatur. Aräometer und Thermometer. — Salzgehalt des Tsomognalarí. — Temperatur. Voluminometer. Dichtigkeitsmaximum. — Salzgehalt verglichen mit Quellen und Flüssen; mit Meeren.

Durchsichtigkeit und Farbe. Helle Flächen als Diaphanometer: Tsomognalarí. — Süsswasserseen der Alpen. — Suspensionen in Flüssen. — Messung in Meeren. — Bestimmung der Farbe: Apparate; Beobachtungen.

In unmittelbarem Anschlusse an die Niveauveränderungen, welche durch Verdunstung eingetreten sind — von so verschiedener Grösse bei den einzelnen Seen — bietet sich die Untersuchung des specifischen Gewichtes, welche ich hier, zum Vergleiche, auch mit Beobachtungen über Meereswasser und über Quellen zusammenstellen werde.

Experimente an Seen während der Reise hatte ich nur Zeit am Tsomognalarí auszuführen; ich hatte diesen gewählt, da er zugleich unter den grösseren Seen der bei weitem salzreichste ist.

Das specifische Gewicht, so wie es in den verschiedenen Seen gegenwärtig vorliegt, ist abhängig

a) von dem relativen Salzgehalte beim Beginn des Eintrocknens sowie von dem stetigen Salzzuflusse während der Fortdauer des Eintrocknens.

b) von dem Verhältnisse des Volumens beim Beginne des Eintrocknens zu jenem im gegenwärtigen Zustande.

Unter gleichen Umständen haben also Seen mit vorherrschendem Zuflusse von Gletscher- und Firn-Wasser, das keine Salze sondern nur Suspensionen enthält, weniger Wahrscheinlichkeit grossen Salzgehaltes als solche, deren Zufluss mehr aus Quellwasser besteht. Ferner, was das Volumen betrifft, ist zu berücksichtigen, um den Grad der Concentration, so wie er vorliegt, auch topographisch richtig zu beurtheilen, dass bei grossen aber flachen Seen die gleiche Höhendifferenz zwischen

früherem und gegenwärtigen Niveau mit ungleich mehr Salzanhäufung sich verbindet, als bei solchen Seen, deren Becken bei kleiner Oberfläche bedeutende Tiefe hat.

Das Aräometer, welches dieses mal von mir angewendet wurde, war das Instrument Nr. 3, von J. G. Greiner jun. in Berlin. Jenes, das wir bei den Beobachtungen auf unserer Seereise nach Bombay benützt hatten, war Aräometer Nro. 5, zur Zeit mit Adolph, der aber längs seiner mehr westlichen Route in Tíbet nur den kleinen nicht salzigen See Zérba Tso vorfand. Die relative Menge der Salze in süssem Wasser, d. h in solchem, das von dem gewöhnlichen Quell- und Flusswasser nur wenig abweicht und noch trinkbar ist, ist so gering — wie für diese später die Angabe der Salze nach Gewicht zeigen wird — dass die Grenze der Genauigkeit des Aräometers nicht genügt, sie zu bestimmen.

Die Details über die Anwendung der Instrumente während der Ueberlandreise nach Indien haben wir schon, mit den Beobachtungen zur See, in unserem „Official-Report" vor dem Aufbruche von Bombay nach dem Innern gegeben.[29])

Das specifische Gewicht lässt sich nur dann allgemein vergleichen, wenn die Messungen auf gleiche Temperatur reducirt sind. Unsere Instrumente waren so angefertigt worden, dass ihre Einheit, die Ablesung in destillirtem Wasser = 1·0000, bei 17·5° C. stand, nicht bei 4·0° C. als dem Dichtigkeitsmaximum destillirten Wassers. Als erste Ursache hatte mich dazu bestimmt, dass jene Temperatur in den Meeren mittlerer und suptropischer Breiten am häufigsten vorkömmt, und dass auch in den Tropen nur verhältnissmässig kleine Reductionen zu erwarten waren, ferner der Umstand, dass ohnehin ein geringer Salzgehalt hinreicht, die Temperatur, mit welcher das Dichtigkeitsmaximum zusammenfällt, sehr merkbar zu verändern.

Bei den Beobachtungen über die Salzseen, 2 Jahre nach Anfertigung der Instrumente, war zu berücksichtigen, ob etwa seit Sommer 1854 eine langsam erfolgende Contraction des Glases, wie bei dem Erhöhen des Nullpunktes in Thermometern, eingetreten sei; anderentheils hätte

29) First Report: On the observations made during the voyage from Southampton to Bombay. Bombay 1855, p. 5—9.

der veränderte Luftdruck in solcher Höhe im entgegengesetzten Sinne wirken können.

Die Beobachtungen machte ich zu Pangmíg, Höhe 14,146 Fuss, Barometerstand 17·88 engl. Zoll. Hier hatte ich einen Platz, der wenigstens zwischen Mauern gegen Wind geschützt war. Salzfreies, als destillirt zu gebrauchendes Wasser konnte ich mir hier genügend verschaffen, da zur Zeit, Ende Juni, nicht sehr ferne von dem See Tieffirne und selbst winterliche Eisreste in grösseren Stücken sich noch vorfanden. Ich benütze mit Vorliebe die letzteren, da man sie, ehe man sie schmelzen liess, leicht von aller äusseren Beimengung gelöster oder ungelöster fester Körper reinigen konnte.

Um sicher zu sein, dass das Aräometer die richtige Temperatur habe, nämlich genau jene des Wassers, in dem es schwebt, muss das Aräometer wenigstens 3 bis 4 Minuten aufgestellt sein, ehe man abliest.

Die Untersuchung des Instrumentes ergab deutlich, dass keine Abweichung von dem schon vor der Abreise bestimmten Stand, = 1·0000 in salzfreiem Wasser bei 17·5° C., sich erkennen liess. Da vorausgehende Beobachtungen an der Meeresküste — zu Bombay, 4 Monate nach der Anfertigung — gezeigt hatten, dass kein messbarer Einfluss auf das Glas durch Contraction ausgeübt war (was bei der Rückkehr nach Europa die spätere Prüfung der Instrumente zu Berlin gleichfalls ergab), konnte auch die Verminderung des Luftdruckes keinen expandirenden Effect hervorgebracht haben. Günstig war dabei gewesen, dass ich absichtlich das Glas bei der Anfertigung etwas dick nehmen liess. Frühere Beobachtungen in den Alpen hatten uns gezeigt, dass selbst bei Thermometern, wenn das Glas der Kugel zu dünn ist, in grossen Höhen durch den veränderten Luftdruck eine Expansion eintritt, die bei Siedethermometern zur Bestimmung der Höhe eine nicht unwichtige Fehlerquelle werden kann. Durch Vermeidung zu dünnen Glases lässt sich auch bei Thermometern der Einfluss des Luftdruckes noch leicht ausschliessen, wenn sie nicht, zu besonderen physikalischen Versuchen bestimmt, ungewöhnlich empfindlich sein müssen. Dagegen ist bei Thermometern fast immer der Fall, da diese doch viel dünneres Glasmaterial haben als Aräometer, dass als Funktion der Zeit ein Zusammenziehung der Kugel eintritt; auch langes Verweilen in sehr

warmen oder sehr kalten Medien kann das Volumen der Kugel und damit die Correction des Instrumentes verändern. Die Einzelheiten solcher Fehlerquellen habe ich in den metereologischen Untersuchungen der „Results" besprochen.[30] Die Correction der Instrumente ist hier, wie bei all meinen Zahlenangaben, schon angebracht.

	Spec. Gew. bei 17·5° C.
a) Wasser von der Oberfläche bei Mírak	1·0099
b) Wasser von 81 engl. Fuss unter der Oberfläche und $^1/_3$ Breite vom linken Ufer entfernt	1·0101
c) Wasser aus einer kleinen Grube, 3 Fuss vom Ufer; war durch den Sand gesickert (schien durch Bodensalze der Oberfläche etwas afficirt)	1·0100

Die durch Einkochen erhaltene Salzmenge ist 13·5 in 1000 Theilen.

Es ergiebt diess für die Salze im aufgelösten Zustande ein specifisches Gewicht, das um nahe $^1/_4$ geringer ist, als das specifische Gewicht im festen Zustande, da z. B. dasselbe für festes Kochsalz 2·01, für kohlensauren Kalk sogar 2·7 ist.

Dass die Salze des Tsomognalarí in ihrer aufgelösten Form so viel mehr Raum einnehmen als die gleiche Gewichtsmenge derselben in getrocknetem Zustande, war mir keineswegs unerwartet. Schon bei dem Eindampfen des Meereswassers, in Verbindung mit der Untersuchung seines specifischen Gewichtes, war die Aufmerksamkeit auf die Möglichkeit analoger Fälle auch bei anderen Lösungen gelenkt worden; ich fand solches allgemein sich wiederholen. Kochsalz, bei weitem der Hauptbestandtheil in den Salzen des Meereswassers, hat im trocknen Zustande ein specifisches Gewicht von 2·01; der Raum, den die Salze im Meereswasser in ihrem gelösten Zustande einnehmen, entspricht einem specifischen Gewichte von 1·4 bis 1·7, variirend je nach den Substanzen, die ausser dem Kochsalz gleichfalls noch darin gelöst sind; für den Tsomognalarí ist das specifische Gewicht seiner Salze im gelösten Zustande = 1·74. — Aehnliches zeigte die Untersuchung der hydrographischen Verhältnisse auch bei dem geringen Salzgehalte der Süsswasserquellen deutlich sich wiederholen.

30) „Results" vol. IV. p. 28.

Mit dem Uebergange eines Körpers aus dem festen in den flüssigen Zustand ist stets ein Verschwinden, ein Gebundenwerden von Wärme vereint. Auch in diesem Sinne bestätigt sich, dass die gelösten Salze im Wasser in einer Form enthalten sind, die weniger dicht ist als jene in ihrem trockenen Zustande, da sich bei der gleichzeitigen und durch mechanische Bewegung beschleunigten Auflösung einer hinreichenden Menge stets Temperaturerniedrigung beobachten lässt. Gewisse Combinationen von Salzen in Wasser gelöst, ebenso Salze mit Eis behandelt zeigen dies bekanntlich „als Kältemischung" am deutlichsten.

Die Temperatur des Tsomognalarí fand ich an der Oberfläche bei meiner Ueberfahrt von Man in den Mittagsstunden von 11 bis 1 Uhr, im Mittel 8·5 bis 8·1° C., ganz nahe am Ufer bei Man war sie 11·9° C. Schöne, starke Quellen, 200 Fuss oberhalb des Ufers liegend, Exposition N 15° O, welche an mehreren Stellen des Austretens die Temperatur bestimmen liessen, hatten 0·85° C. Dies ist kälter als die Temperatur mancher anderer Quellen in etwas weiterer Entfernung vom See und in einer günstigeren Exposition, aber dessen ungeachtet übertrifft diese Temperatur das Jahresmittel der Lufttemperatur berechnet nach Le mit Berücksichtigung der Temperaturabnahme mit der Höhe, um 1·2° C. Es war dies kein Ausnahmefall; hier, ebenso wie wir es früher in den Alpen als mittleres Resultat erhalten hatten, war die Abnahme der Quellentemperatur in grossen Höhen stets viel weniger rasch als jene der Lufttemperatur. Auf die Temperatur der Seen hat solches Quellenwasser, seiner geringen Menge wegen, wenig Einfluss. Wichtiger ist es, dass, im Sommer wenigstens, die Besonnung eine sehr kräftige Einwirkung auf Zuflüsse selbst von ziemlich bedeutender Wassermenge ausübt. In einem Gletscherbache von mittelstarkem Gefälle, der nahe jenen Quellen in den See einströmt, fand ich gleichzeitig die Temperatur 18·5° C.!

In grossen Tiefen muss hier, wie in den Süsswasserseen der Alpen die Temperatur abnehmen. Mein schlechtes Fahrzeug erlaubt mir nicht, den etwas schwereren Apparat eines „wenig empfindlichen Thermometers in Kohlencylinder", wie ich es bei vielen anderen Gelegenheiten, selbst in Meeren angewendet hatte, hier hinabzulassen. Auch dies wäre sehr schwierig gewesen, mit solchem Floss den Schwimmer, der das

Instrument an der Oberfläche markirt, wieder aufzufinden; ein träges Thermometer bleibt nämlich immer mehrere Stunden lang in jener Tiefe, für welche die Temperatur zu bestimmen ist, damit Sicherheit der Ablesung sich bietet.

Die Temperatur in der Tiefe hängt ab:

a) von Grösse und Form des wassererfüllten Beckens, da bei Abnahme der ganzen Masse sowie bei Abnahme der relativen Tiefe die Veränderungen nach Jahreszeit rascher und mit grösserem Effecte eintreten müssen;

b) von dem Salzgehalte des Wassers, da dieser vor allem den Grad und die Art der Erkaltung bis zum Gefrieren bedingt. Während destillirtes Wasser sein Dichtigkeitsmaximum bei 4^0 C. hat — genauer 3·96, wie ich im Mittel zahlreicher Reobachtungen erhielt —, genügt schon die kleine Menge der Salze in gewöhnlichem Süsswasser die Lage des Dichtigkeitsmaximums nicht unwesentlich zu verändern.

Zur Untersuchung auf Dichtigkeitsmaximum dienten mir „Voluminometer", die ich mir so construirt hatte, dass sie auch an Ort und Stelle während der Reise sich anwenden liessen; angefertigt bei J. G. Greiner jun. in Berlin. Ein solcher Apparat ist ein halbkugelförmiges Gefäss aus feinem Glase, an seinem oberen Ende mit einem abgeschliffenen conischen Halse versehen, in welchen ein Thermometer, genau schliessend, eingesteckt werden kann; seitlich steht noch mit dem halbkugelförmigen Gefässe eine capillare vertical gestellte Röhre in Verbindung, die in $^1/_{10000}$ des Cubikinhaltes, mit Berücksichtigung des vom Thermometer beanspruchten Raumes, getheilt ist; in dem hier gebrauchten Instrumente, unserem „Voluminometer 2", war das angesetzte Röhrchen so lang, dass die Ausdehnung destillirten Wassers vom Dichtigkeitsmaximum bis zu 30^0 C. abgelesen werden konnte.

Vor der Anwendung des Voluminometers wurde die Temperatur des Gefrierpunktes für das Wasser des Sees bestimmt in einem dünnen Metallgefäss, das in Kältemischung von Salz und Eis gestellt wurde. Die ersten Krystalle von Eis, die im Wasser schwammen, bildeten sich bei — $0·5^0$ C.; dann bedeckten sich rasch die Wände mit Süsswassereis, und die in der Mitte bleibende Lauge wurde von jetzt ab, mit dem Austreten des Süsswassers in fester Form, immer con-

centrirter und kälter. Solche Concentration ist für die Beurtheilung der Eisbildung auf dem See im Grossen unberücksichtigt zu lassen, da die relative Menge des Eises, das entsteht, in der Natur eine verschwindend geringe ist. Dies aber kann vorkommen, dass etwas Salz in der Eisdecke eingeschlossen wird, dann nämlich, wenn längs der Ufer eine Eisschicht bis zum Boden hinab reicht, oder wenn die Gestalt seichten Bodens die Circulation des Wassers in der Tiefe beschränkt. Schon in einem Gefässe von $^1/_4$ Liter war die obere Eisdecke, die entstand, ganz salzfrei; wenn aber in ganz kleinem Gefässe Wasser bis zur Eisbildung abgekühlt wurde, fand sich allerdings in den ersten Schichten etwas Salz im Eise.

Bei dem viel stärkeren Salzgehalte der Meereswasser tritt die Ausscheidung des reinen Wassers durch Gefrieren nicht so rasch ein. Nach Experimenten von Dr. Walker, sich trinkbares Wasser zu verschaffen, worüber Mac Clintok in „Seereise der Fox" berichtet, war die erste Eislage, die man erhielt, noch stark salzig. Diese auf's neue geschmolzen und dem Gefrieren ausgesetzt, lieferte schon Eis mit bedeutend weniger Salz; die nächste Wiederholung gleichen Verfahrens gab trinkbares Wasser, aus diesem erst schied das nochmalige Gefrierenlassen salzfreies Wasser ab.

Zur Bestimmung der Contraction des Wassers bis in die Nähe des Gefrierpunktes wurde zu Pangkóng das Voluminometer in ein Wasserbad gesetzt, das durch allmählige Beimischung von Eis und schliesslich etwas Salz langsam fortschreitende Abkühlung erhielt. Es zeigte sich ein stetiges Zusammenziehen, ohne Eintreten eines merkbar oberhalb des Gefrierpunktes liegenden Dichtigkeitsmaximums; die Abkühlung wurde dabei bis — $0{\cdot}1^0$ C. fortgesetzt. Noch stärkere Abkühlung hätte bei etwa zu rascher Wirkung Zersprengen des Gefässes durch Eintreten von Eisbildung befürchten lassen. (Deshalb auch war der Gefrierpunkt z u e r s t bestimmt worden.)

Reine Kochsalzlösungen zeigten im Voluminometer etwas länger noch ein Dichtigkeitsmaximum vor dem Gefrierpunkte als jene Wasser von gleichem specifischen Gewichte, in denen Auflösung von Kalk und Magnesia-Salzen das Vorherrschende ist.

Spätere Untersuchung des Dichtigkeitsmaximums von Wasser aus

Alpenseen, sowie der Temperaturvertheilung in verschiedenen Tiefen derselben — vorgelegt 1867 in der Februarsitzung der Münchener Akademie der Wissenschaften — haben mir ergeben, dass schon bei Temperaturverhältnissen wie in den Voralpen die Temperatur des Wassers so lange nach unten abnimmt, bis bei genügender Tiefe jene Temperatur erreicht ist, mit welcher zugleich für das Wasser der untersten Schichten, seinem etwas vermehrten Salzgehalte entsprechend, das Dichtigkeitsmaximum zusammenfällt. Es macht dies sehr wahrscheinlich, dass auch am Tsomognalarí die untersten Schichten das ganze Jahr hindurch eine nur wenig von dem Gefrierpunkte dieses Wassers abweichende Temperatur haben, und es ist dies um so leichter möglich, da die Bodentemperatur in solchen Höhen, wie nach den oben erwähnten Quellen zu schliessen, ohnehin eine so niedere ist. Die Temperatur der Quellen im Gebiete der Seen der Voralpen ist dagegen bei 1900 bis 2000 Fuss Höhe 9·1 bis 8·2° C.

Verglichen mit der Menge von fixen Bestandtheilen in Quellen, Flüssen und in Seen mit Zu- und Abfluss ist jene des Tsomognalarí eine sehr grosse zu nennen; gering ist sie gegenüber den Salzen der meisten Meere. Ich werde auch auf die Salzbestimmungen der Meereswasser hier näher eingehen; die allgemeinen topographischen Daten unserer Seefahrten, zugleich mit den Angaben über die Temperatur der Meere, ist schon früher besprochen worden.[31])

Das Wasser der gewöhnlichen Quellen enthält in 1000 Gewichtstheilen 0·25 bis 0·5 Theile, also im Kilogramm ¼ bis ½ Gramm unorganischer Bestandtheile aufgelöst.[32]) Im allgemeinen ist die Quantität der Lösung in Quellen, die krystallinischem oder thonigem Gestein entströmen, geringer als bei jenen in kalkhaltigem Boden. In den Alpen sind die meisten der Kalke, die vorkommen, etwas löslicher als jene in Tíbet, und die Quellen enthalten eine grössere Menge unorganischer

---

31) „Reisen" Bd. I, S. 7—36.
Sehr interessante Vergleiche für einzelne Gebiete zeigen die neuesten Untersuchungen von Herrn Professor Dr. v. Gorup-Besanez: „Ueber dolomitische Quellen des Frankenjura. Sitzungsberichte der physikalisch-medicinischen Societät zu Erlangen. 7. Juni 1871.

32) Als wichtige allgemeine Werke über diesen Gegenstand sind vor allem zu nennen: Prof. Ditterich, „Klinische Balneologie" Band I, 1861, und Prof. Ludwig, „Die natürlichen Wasser in ihren chemischen Beziehungen zu Luft und Gesteinen", 1862.

Bestandtheile, wenn nicht mit der Höhe Temperaturerniedrigung die Auflösung überwiegend beschränkt. Als eine an aufgelösten Salzen mehr als mittelstarke Quelle hatten wir die Quelle der Drau bei Innichen zu beobachten Gelegenheit gehabt; ihr Gehalt an Salzen ist 0·681 in 1000 Theilen; Höhe 4474 engl. Fuss, Temperatur der Quelle 5·3° C. In der Isarquelle am Haller Anger, obwohl petrographisch ähnlich gelegen, fanden wir nur 0·288 feste Bestandtheile; hier zeigt sich bei 6103 Fuss Höhe mit der niedrigeren Temperatur des Wassers, 3·4° C., auch viel geringerer Salzgehalt.

Flüsse haben weniger Salze als Quellen, und die relative Menge der aufgelösten unorganischen Bestandtheile mindert sich in denselben mit der Entfernung vom Quellengebiete, da den Flüssen stetig auch Wasser zuströmt, das nicht so lange mit den Bodenschichten in Berührung war als das viel langsamer austretende Quellwasser. Als ganz verschieden von den gewöhnlichen Quellen und Flüssen sind noch die Gletscherwasser anzuführen. Diese haben bei starker Trübung einen sehr geringen Gehalt aufgelöster Bestandtheile. Sie behalten ihren Charakter oft noch auf grosse Entfernung von den Gletscherenden. An der Austrittsstelle selbst sind gewöhnlich noch gar keine gelösten Salze im Wasser zu finden; dass solche auch weiter thalabwärts in Gletscherflüssen so langsam sich mehren, ist vor allem bedingt durch die relative Grösse ihrer Wassermenge gegenüber den seitlichen Zuflüssen; auch durch niederere Temperatur, welche unter sonst gleichen Umständen die Lösung verzögert.

Diese Verhältnisse,[1]) über die wir schon früher aus den Alpen zu berichten hatten, sind die gleichen im ganzen Hochasien; abweichend von dem Charakter der Flüsse in Enropa ist die bedeutende Verminderung des Salzgehaltes verbunden mit Vermehrung von Suspensionen in den Himálaya-Flüssen während der Regenzeit; des letzteren Umstandes werde ich noch bei der Besprechung der Durchsichtigkeit zu erwähnen haben.

Die Süsswasserseen mit Zu- und Abfluss haben bei entsprechender Grösse und Tiefe gewöhnlich an ihrer Oberfläche einen Salzgehalt, der

---

34) „Untersuchungen in den Alpen" Bd. I, S. 149

nur wenig von jenem des einströmenden Flusswassers sich unterscheidet, während in der Tiefe etwas grössere Salzanhäufung sich findet. Als Beispiel unter den Alpenseen sei der Chiemsee erwähnt; bei meinen Untersuchungen daselbst über die Temperaturvertheilung benützte ich nochmals die Senkapparate mit conischen Klappen, die wir zur See und in Indien angewandt hatten, um Wasser aus der Tiefe emporzuholen. Im Wasser von der Oberfläche fand ich eine Salzmenge von 0·17 in 1000 Theilen, in jenem am Grunde aber von 0·30; im Mittel also etwa $^1/_{60}$ des Salzgehaltes des Tsomognalarí. Die Quellen in den Umgebungen des Chiemsees haben gewöhnlich 0·26 bis 0·43 Theile in 1000.

Ausnahmsweise kommen in allen Zonen der Erde, und im Meeresniveau sowie in bedeutenden Höhen, Quellen mit sehr grosser Menge unorganischer Bestandtheile vor. Solche heissen Mineralquellen.

Eine ganz bestimmte Begrenzung dieser Bezeichnung lässt sich nicht feststellen.

Zu den am meisten charakteristischen Eigenschaften der Mineralquellen gehört, dass die gewöhnliche Menge der aufgelösten Salze überschritten ist, und dass in starken Mineralquellen fast immer die Salze, die man findet, von jenen, welche das Quellwasser sonst enthält, auch sehr verschieden sind. Auslaugen organischer Stoffe kömmt vor, ist aber verhältnissmässig selten. Bei den Thermen ist unabhängig vom Salzgehalte noch ihre hohe Temperatur, häufig auch die Entwicklung verschiedener Gasarten, von Bedeutung für die Art ihrer Entstehung sowohl, als für die Anwendung derselben als Heilmittel.

Mineralquellen mittlerer Stärke haben in 1000 Theilen 1 bis 5 Theile unorganischer Salze aufgelöst. Solche, wie zu Marienbad der Kreuzbrunnen mit 8·97 und der Ferdinandsbrunnen mit 10·29 stehen selbst unter Glaubersalzwassern vereinzelt. In den Bitterwassern, in denen die schwefelsaure Magnesia vorherrscht, zeigt sich aber eine neue Gruppe mit noch viel grösserem Gehalte an Salzen. Die stärkste dieser Quellen, die man bisher in Europa gefunden hat, ist Biemensdorf in der Schweiz, Höhe 5100 engl. Fuss; sie enthält in 1000 Theilen nach Bolley (1842) 31·1 Theile Salz; das bekannte Bitterwasser von Seidschütz in Böhmen hat nach Berzelius 23·26.

Doch bei weitem die grösste Menge von Salzen zeigt sich in jenen

Fällen, in welchen unter den aufgelösten Salzen Chlornatrium, das Kochsalz, das vorherrschende ist. In diese Gruppe gehören die Meereswasser und die Kochsalzquellen, aber nicht die tibetischen Salzseen; bei diesen ist der Salzgehalt nur quantitativ aber nicht qualitativ von jenem der gewöhnlichen Quellen verschieden; sie zeigen eine vorherrschende Menge von Kalksalzen, denen in ihrer relativen Menge Magnesia- und Eisenverbindungen sich anschliessen. Einzelne Kochsalzquellen haben eine 6 bis 7 mal grössere Salzmenge als das Meerwasser im Mittel. So hat die Edelquelle zu Reichenhall, von Prof. A. Buchner (1848) analysirt, im Kilogramm 233·79 Gramm fester Bestandtheile, wovon 224·35 Kochsalz sind. Etwas stärker noch sind die Quellen zu Hall in Tyrol, zu Dürrheim und Clemenshall in Baden und am stärksten unter den mir bekannten der Bernhardsbrunnen zu Salzungen, der 267·22 Gramm im Kilogramm enthält, davon 260·7 reines Kochsalz. Das Maximum von Kochsalz, was sich in Wasser von 12° C. auflösen kann, ist nach den neuesten Untersuchungen von Fehling 359 in 1000 Theilen Wasser.

Kochsalzquellen mögen an einzelnen Stellen auch in Tíbet vorkommen. Jedenfalls sind sie selten. Auf unseren Routen hatten sich solche erst jenseits des Karakorúmkammes gezeigt, während wir andere Mineralquellen, warme und kalte, auch in Tíbet fanden; meist etwas schwefelwasserstoffhaltig und mit vorherrschendem Absatze von Kalk und Eisenoxydhydrat. Nicht selten bildeten die Ablagerungen an der Ausflussstelle mächtige Hügel; wegen ihrer Glätte und wegen der zweifelhaften Dicke der festen Schicht am Rande des Wassers, konnten solche nur mit Vorsicht begangen werden.

Unter den Meereswassern sind als ähnlich dem Tsomognalarí in der Grösse des Salzgehaltes das Mittel der in den einzelnen Theilen sehr ungleich salzigen Ostsee ferner das Schwarze und das Azow'sche Meer zu nennen. Das Schwarze Meer hat 17·06 in 1000 Theilen; das Azow'sche nördlich davon, durch die Strasse von Kertschi mit dem Schwarzen Meere verbunden, hat nur 11·9 in 1000. Im Wasser des Schwarzen Meeres ist der Gehalt an kohlensaurem Kalk als solcher nicht unbedeutend, nämlich 0·36 in 1000; Gehalt an Kochsalz is hier „für ein Meer" gering, 14·0; letzterer ist im freien Atlantischen Ocean 30·5.

Im allgemeinen vermindert sich der relative Salzgehalt der Meere mit dem Herannahen gegen die Ufer bei Zuführen von Süsswasser durch die Flüsse; in hohen Breiten trägt auch das Vordringen der Eismassen in einzelnen Lagen viel dazu bei. Am wichtigsten sind aber die so verschiedenartige Gestaltung der Meeresbecken und die zahlreichen grossen Meeresströmungen, die durch die Temperaturvertheilung entstehen; sie bringen im Salzgehalte grosse Unterschiede an der Oberfläche sowohl als in verschiedenen Tiefen selbst bei geringen Entfernungen hervor.

Die Menge der Salze im Meereswasser beträgt meist 35 bis 37·5 in 1000 Theilen, wobei Kochsalz im Mittel $^3/_4$ des ganzen Salzgehaltes ausmacht.

Von den Beobachtungen während unserer Seereise nach Indien sind die Zahlenangaben in unsern „Official-Reports" enthalten.[33]) Die Fortsetzung derselben während verschiedener Küstenfahrten und während der Rückreise werde ich, wie oben erwähnt, in den „Results" allgemein zusammenstellen. Hier sei Folgendes zur Vergleichung angeführt.

Für specifisches Gewicht und Salzgehalt an der Oberfläche erhielten wir, auf 17·5° C. reducirt, die nachstehenden Werthe:

Im Atlantischen Ocean ist das specifische Gewicht 1·0275 bis 1·0283, und zwar auf dem Wege von Southampton nach Gibraltar; die Salzmenge in 1000 Theilen ist im Mittel 36·65. Für die centrale Region des Oceans zwischen Europa und Amerika hat mir Baron von Bibra 35·7 als die Menge des Salzgehaltes, die er fand, mitgetheilt.

Im Mittelländischen Meere ist das specifische Gewicht 1·0282 bis 1·0306, wobei vom Eintritte durch die Strasse von Gibraltar bis zu 2 Grad nördlich vom Hafen zu Alexandria das specifische Gewicht stetig zunimmt; Salzmenge nahe der Mitte 40·7 in 1000.

Im Rothen Meere ist in halber Länge zwischen Súez und Áden das specifische Gewicht 1·0300 bis 1·0311. Eine locale Salzanhäufung durch Verdunstung — an einer Stelle, wo weder Zufluss vom Lande noch regelmässige Meeresströmung die durch Verdunstung verlorene Wassermenge genügend ersetzen — findet sich im Golf von Súez, wo wir das specifische Gewicht = 1·0393 erhielten.

---

33) Report I, S. 8—16.

Von der Mitte des Rothen Meeres gegen die Meerenge bei Áden nimmt der Salzgehalt des Meerwassers wieder etwas ab, und das specifische Gewicht liegt, wie wir es später auch im Arabischen Meere und im Indischen Ocean fanden, zwischen 1·0278 und 1·0286.

Für locale Fragen ist auch das nicht reducirte specifische Gewicht zu berücksichtigen.

So zeigt sich bekanntlich in einigen Mineralquellen, dass stark salzhaltiges Wasser, wegen seiner constant hohen Temperatur in der Tiefe, das ganze Jahr hindurch bis an die Oberfläche sprudelnd ansteigt. In analoger Weise, aber mit entgegengesetztem Effecte kann es vorkommen, dass von zwei Meeresströmen, die gegen einander sich bewegen, der weniger salzhaltige doch der obere sein kann, wenn er zugleich bis zu entsprechendem Grade der kühlere ist. Einen ganz unerwarteten recht deutlichen Fall dieser Art hatten wir in der Meerenge von Gibraltar gefunden durch Anwendung von Senkapparaten zum Schöpfen aus verschiedener Tiefe und von Thermometern, welche, weil wenig empfindlich gemacht, die Temperatur in der Tiefe noch nach dem Aufwinden zeigen. Dort hatte sich nämlich ergeben, dass nicht nur vom atlantischen Ocean ein Strom in das mittelländische Meer einströmt, sondern dass auch unterhalb desselben ein Strom, obwohl er der wärmere ist, aus dem mittelländischen Meere ausströmt.[34]) Da vorher nur der obere bekannt war, glaubte man, der ganzen Menge permanent einströmenden Wassers müsse durch die Verdunstung allein das Gleichgewicht gehalten werden, während nun sich zeigte, dass auch das unten ausströmende Wasser nicht unbedeutend daran betheiligt ist.

Im Rothen Meere waren wir beide Male durch jenen Theil der Strasse von Bab-el-Mándeb gefahren, welcher östlich von der Périm-Insel liegt; dieser ist 140 bis 170 Fuss tief. Mit Anwendung derselben Apparate wie in der Meerenge von Gibraltar bot sich bis hinab zum Grunde Wasser gleich jenem, das den Golf von Áden ausfüllt und als einströmendes Wasser an der Oberfläche des Rothen Meeres ziemlich weit einwärts noch an der Temperatur und dem specifischen Gewichte sich erkennen liess. Im westlichen grösseren Arme der Strasse lässt

34) „Reisen" Bd. I, S. 8.

sich, etwa analog wie wir bei Gibraltar gefunden, eine untere compensirende Strömung in entgegengesetzter Richtung erwarten, da es hiess, auch dort fülle die ganze Breite an der Oberfläche ein in das Rothe Meer eintretender Strom. Bestimmte Daten konnte ich nicht erhalten. Jedenfalls ist hier die Bewegung überhaupt eine sehr schwache. Wie ich von Seeleuten erfuhr, wird bisweilen zwischen Juni und August, in der Zeit des Südwestmonsúns, ein Ausströmen bemerkbar, das bis an die Oberfläche reicht, und auch in der kleinen Strasse sich fühlbar macht. —

Die Grösse des Unterschiedes in der Durchsichtigkeit oder Diaphaneïtät der Gewässer war mir zuerst während der Bootfahrt von Bengalen nach Assám recht lebhaft aufgefallen, und veranlasste mich, einen Apparat zur Bestimmung der Durchsichtigkeit zu construiren, zu dessen Anwendung für meine Brüder sowohl als für mich noch vielfache Gelegenheit sich geboten hat. Die Beschränkung der Durchsichtigkeit ist zu prüfen auf Salze und Suspensionen, welche je nach Stromgebiet und Jahreszeit theils als constante, theils als veränderliche Bedingungen auftreten. Da früher numerische Bestimmungen nicht vorlagen, zeigten sich sehr bald, nachdem sich ein einfaches und doch hinlänglich präcises Verfahren gefunden hatte, Daten, die nicht nur für die Hydrographie, sondern auch für manche der geologischen Verhältnisse der gegenwärtigen Periode von Interesse sind.

Als Diaphanometer wählte ich flache Cylinder aus weissem Marmor. Ich fand in Calcutta ohne Schwierigkeit carrarischen Marmor und sah unerwartet viel; er wird ja für die Grabmäler der christlichen Kirchhöfe importirt in einem den Europäern so gefährlichen Klima.

Für Beobachtungen in Wasser mit geringer Durchsichtigkeit genügt eine Kreisfläche von 8 bis 10 Zoll Durchmesser, gewöhnlich aber wandte ich Cylinder an, welche Kreisflächen von $2\frac{1}{2}$ Fuss Durchmesser boten, Die Höhe des Cylinders, am besten z. B $\frac{3}{4}$ Fuss bei den grossen, bedingt die Spannung der auf die Kreisfläche rechtwinklig gestellten Schnur.

Da die Durchsichtigkeit des Wassers in allen Fällen eine so ungleich geringere ist als jene der nebelfreien Luft, ist es leicht zu vermeiden, dass der „Gesichtswinkel“ oder die Entfernung des Gegenstandes vom

Auge, bei den Beobachtungen mit einem solchen Diaphanometer von Einfluss werde. Schon eine Scheibe von nur $^1/_2$ Fuss Durchmesser verschwindet mir in der Luft, auch wenn wohl beschattet, an klaren Tagen erst bei 1000 bis 1100 Fuss Entfernung, während bei der Beurtheilung der Durchsichtigkeit des Wassers Tiefen grösser als 80 Fuss wohl niemals vorkommen werden. Eine Täuschung anderer Art könnte entstehen, wenn man während des Hinablassens das Verschwinden beobachtet; Reiz des Auges verzögert etwas die Anulirung des einmal empfangenen Bildes, und für die Dauer der Nachwirkung des Bildes sind die Augen der einzelnen Menschen unter sich sehr verschieden, weit mehr als „für den Eindruck, den das Wiedererscheinen des Bildes hervorbringt", nachdem der Stein vorher durch zu tiefes Hinablassen verschwunden ist, und beim Heraufziehen erst wieder sichtbar wird. Selbst dies ist bei letzterem Verfahren einer Schärfung der Beobachtung günstig, dass die gegenseitige Stellung des Steines und des Fahrzeuges, das auf dem Wasser schwimmt, mit grösster Wahrscheinlichkeit sich verändert; der Stein wird dadurch beim Heraufziehen an einer neuen Stelle sichtbar, und eine subjective Täuschung, wenn sie überhaupt bei zu raschem Verfahren noch existirte, müsste sich sogleich durch das Erscheinen von zwei solchen Bildern bemerkbar machen.[35])

Eine Veränderung der Tiefe von $^1/_2$ Fuss liess sich stets ganz deutlich als Begrenzung der Sichtbarkeit erkennen, auch wenn der Stein sehr weit hinabgelassen werden musste. Ja, wenn die Oberfläche des Wassers sehr ruhig ist, kann man auch kleinere Differenzen noch unterscheiden. Bei etwas lebhaftem Winde dagegen wirkt der Wellenschlag, auch die etwaige Abweichung der Schnur von der Verticalen durch eine pendelnde Bewegung, bisweilen störend; in Flüssen kann ein etwas stromaufwärts gerichteter Winkel vom Steine gegen die Oberfläche die Durchsichtigkeit scheinbar vergrössern. Letzteres kann dadurch sehr verringert werden, dass man dem Marmor, dessen specifisches Gewicht

35) Details über ähnlich ausgeführte und andere Bestimmungen der Durchsichtigkeit der Luft in Hochasien folgen in „Results" vol. V; die Beobachtungen, die ich mit Adolph vorher in den Alpen mit einem Diaphonometer gemacht hatte, sind gegeben in „Untersuchungen über die physikalische Geographie und die Geologie der Alpen" Band I, S. 435—441.

allerdings nur 2·64 ist, im Centrum seiner unteren Kreisfläche eine starke Bleieinlage giebt.

Zur allgemeinen Vergleichung wurden aus den Beobachtungen an den verschiedenen Orten nur solche gewählt, die bei unbewölkter Stellung der Sonne und zugleich in den Stunden zwischen 10 Uhr Vormittags und 3 Uhr Nachmittags gemacht wurden.

Physikalisch genauer liesse eine Bestimmung sich denken, bei welcher nicht die Grenze zwischen Sichtbarkeit und Verschwinden das zu beobachtende Element wäre, sondern bei welcher zum Beispiel auf der Oberfläche des Wassers ein bemaltes Holz schwämme, und die weisse Scheibe nur so tief hinabgelassen würde, bis sie mit diesem Holze gleiche Helligkeit habe. Ich hatte dies nicht unversucht gelassen, habe aber sogleich bemerkt, dass dann die Beleuchtung ausserhalb des Wassers durch seitlich reflectirtes Licht bei gleichem Sonnenstande eine so variable ist, dass sich ein directer Vergleich nicht vornehmen liess. Dazu kömmt, dass man jedenfalls die Schwimmer der Farbe wegen sehr oft wechseln müsste, da die Farbe des Wassers eine sehr verschiedene sein kann, und da das genaue Beurtheilen der Helligkeit zweier Gegenstände für das Auge auch davon abhängt, dass sie von gleicher Farbe sind. Parallel gestellte Röhren — eine mit destillirtem, die andere mit dem zu untersuchenden Wasser aufgefüllt, bis bei gleicher Oeffnung für den Lichtzugang am vorderen unteren Ende beide Räume gleich hell erscheinen — sind günstiger; aber sie liessen sich bei Trübung durch Suspensionen, wenn die festen Körper relativ gross sind, nicht anwenden, da diese dann bei ruhigem Wasser entweder an den Wänden adhäriren und aus dem Gesichtsfelde verschwinden oder sich etwas senken und so den Eintritt des Lichtes verändern.

Salze, die im festen Zustande weiss sind und die sich als Krystalle durchsichtig oder durchscheinend zeigen, werden, wenn aufgelöst, für Licht so permeabel, dass sich in der geringen Menge überhaupt, in der sie vorkommen, bei der Anwendung des Diaphanometers über ihren Einfluss auf Durchsichtigkeit nicht urtheilen liess. Es zeigen dies die so wenig sich unterscheidenden „Maxima“ in den besten Lagen der Süsswasserseen und der Meere. Farbige Salze allerdings und organische Extractivstoffe, solche wie sie in Wassern aus eisenhaltigem

Boden oder aus Mooren sich finden, machen bisweilen sehr dunkel. Doch dies sind locale vereinzelte Fälle.

Als die wesentlichste Bedingung des Unterschiedes in der Durchsichtigkeit sind die Suspensionen, die ungelöst schwebenden Körper, zu betrachten. Ausser ihrer Menge ist auch Form, Farbe und Grösse von Einfluss; meist lassen sie sich durch Papierfiltren trennen, und durch Wägung bestimmen; bei gleicher Quantität trüben die Körper weniger, wenn sie relativ gross sind.

Das Auftreten der Suspensionen, sowie Menge und Form derselben, hängt zusammen mit der Lage, mit der Beschaffenheit der Ufer, sowie mit der Bewegung des Wassers durch Strömung, Stürme und durch Ebbe und Fluth.

Unter den Salzseen hatte ich nur Gelegenheit, den Tsomognalarí zu untersuchen; es geschah dies mit dem grossen Cylinder, bei der zweiten Fahrt, von Mírak aus. Die Tiefe, in welcher er verschwand, war 40·5 Fuss; bei weitem die grösste, die mir bis dahin vorgekommen war. In Seen die ausser dem Zufluss auch den Ausfluss haben, fand ich die Klarheit niemals diesen Grad erreichen wie hier im Tsomognalarí In Tíbet hatte ich nicht Gelegenheit, dies direct zu untersuchen. Die wenigen der Seen mit Ausfluss waren nur sehr kleine und hätten nicht die Wahrscheinlichkeit einer entscheidenden Tiefe gehabt. In Kashmír, wo allein, ausser Tíbet und Turkistán, nach der Construction dieses Diaphanometers noch Seen während unserer Reisen vorkamen, hatte der Vúlar-See, den allerdings der ganze Jhilumfluss durchströmt, das Instrument schon bei 2 Fuss 4 Zoll unter Wasser unsichtbar gemacht; in dem schönen See von Srinăger, dessen ganzen Boden eine üppige Vegetation ziert, die hier wie unter einer Glasdecke zu Füssen liegt,[36]) ist nirgend die Tiefe gross genug, um mit der weissen Scheibe Messung vorzunehmen; hier verschwindet ja bei der mittleren Tiefe von 11 bis 12 Fuss nicht einmal das ungleich dunklere Grün der dem Seeboden entsprossenen Pflanzen. In den Alpen Europas aber, wo ich später auch das Diaphanometer beobachtete, liessen sich die Versuche in Masse wiederholen, da die Seen alle genug der grossen

36) „Reisen" Bd II, S. 410.

Tiefen haben. Aber ungeachtet der landschaftlichen Zierde, die sie dort für die Mittelregionen, sowie für die nördliche und für die südliche Vorstufe bilden, ist doch ihre Durchsichtigkeit meist ungleich geringer, als man erwarten könnte. In der östlichen Schweiz, in Tirol und in den bayerischen Voralpen, die ich untersuchte, fand ich nirgend Seen, die auf mehr als 25 bis 30 Fuss das Diaphanometer erkennen liessen. Zum irländischen Killarney-See, in einer durch schöne Formen wohlbekannten Gebirgsgegend gelegen, kamen wir Mitte September 1857; dort war die entsprechende Tiefe 11 Fuss. Im Lough Neagh bei Antrim-Hall in Irland, wo wir einige Zeit bei Lord Mazarin weilten, war sie nur 7 Fuss.

Die Jahreszeiten und die damit verbundenen Wärmeverhältnisse haben etwas Einfluss auf die periodischen Veränderungen der Durchsichtigkeit in den Seen; zusammenhängend mit der Trübung der Zuflüsse sowohl als mit der Erzeugung aufsteigender Ströme in den Seen, welche dazu beitragen, die Suspensionen schwebend zu erhalten. Am Starnberger-See z. B. fand ich gegen Mitte Juni, nachdem die Trübung durch seitlich zugeflossenes Schneewasser längst aufgehört hatte, die Tiefe in welcher das Diaphanometer verschwand, 27·5 engl. Fuss (Mittags, 19. Juni 1866), bei halber Breite zwischen Feldafing und Ammerland; die Temperatur an der Oberfläche war 17·2° C. Mit der fortschreitenden Erwärmung des Sees wird sein Wasser trüber, und zwar in der Art, dass in einiger Entfernung von den Ufern die Trübung vorzüglich an der Oberfläche sich anhäuft; schon 2 bis 3 Fus unter der Oberfläche pflegt das Wasser merklich klarer zu werden, wie sich ganz deutlich erkennen liess, wenn durch den Cylinder mit Klappen aus verschiedenen Tiefen Wasser herausgeholt und in Gläsern von hinreichender Grösse, gegen dunklen Hintergrund gestellt, verglichen wurde Trennung der Suspension durch Filtriren und Bestimmung der Menge durch Wägen hätte nicht genügt, den so geringen „Unterschied" hervortreten zu lassen.

Die Trübung beginnt längs der Ufer, wo wegen der geringen Tiefe des Wassers bei lebhafter Besonnung viel Wasser zugleich mit Schlammtheilchen des Bodens ansteigt und weit über die Oberfläche sich verbreitet. An den Ufern ist dabei die Trübung am deutlichsten.

Maxima der Durchsichtigkeit im Winter, ehe eine Eisdecke das Licht

beschränkt, sahen Fischer, die ich mit Fortsetzen der Beobachtungen beauftragte, 50 Fuss erreichen. Günstig ist für den Starnberger-See die bedeutende Grösse des Sees im Verhältnisse zum Zuflusse und der Umstand, dass der Zufluss mit wenig Gefäll einströmt.

Der Chiemsee sei hier gleichfalls noch besprochen, da dieser ein Beispiel von einer verhältnissmässig geringen Durchsichtigkeit bietet. Dieser erhält durch seinen Hauptfluss, die Alz, ungleich mehr Suspensionen zugeführt als der Starnberger-See durch die Würm; auch mehrere der kleineren Seitenzuflüsse haben ziemlich viel Gefäll und sind trübe. Die Wassermenge des Ausflusses, welche hier bei äusserst geringer Verdunstung verglichen mit Tíbet so wenig nur von der Summe der Zuflüsse sich unterscheidet, erhielt ich durch Messung der Alz am See-Ausflusse (11. Sept. 1866, 7^h 49^m a. m.), wie folgt:

> Breite 336 engl. Fuss; Tiefe 3·0 Fuss, mittlere Schnelligkeit in 1 Secunde: 1·25 Fuss; resultirende Wassermenge in 1 Secunde: 1260 engl. Cubic-Fuss.

Die hier vorliegende Wassermenge ist als mittleres Minimum zu betrachten, nach den Angaben meiner Begleiter über die Veränderungen des Wasserstandes. Bei starkem Regen steigt der Ausfluss sehr rasch bis zur doppelten Wassermenge und zwar ohne aus seinem Bette zu treten.

Das Diaphanometer verschwand 11 Uhr Morgens und ferne vom Ufer hinabgelassen (17. Sept. 1866), bei 15·8 engl. Fuss. Im Frühjahr soll, in Folge des Einschwemmens der Zuflüsse, im ganzen oberen Theile des Sees der Boden schon bei wenigen Fuss unter dem Wasser unsichtbar bleiben, während zur Zeit 8 bis 10 Fuss tief helle Stellen desselben zu erkennen waren.

Ueber die Periode des Maximums der Durchsichtigkeit — Spätherbst und Winter vor dem Entstehen der Eisdecke — konnte ich in Hochasien keine näheren Angaben erhalten. Jedenfalls muss auch in den tibetischen Salzseen, bei dem Aufhören fast allen Zuflusses aus den oberen Regionen mit der Abnahme der Temperatur, die Durchsichtigkeit verglichen mit jener im Sommer noch immer etwas vermehrt werden.

Fliessendes Wasser hat bei einer steten, oft lebhaften Bewegung eine ungleich stärkere Menge suspendirter fester Körper als Seen. Bewegung reisst ab und reisst mit fort; aber jene des Flusses allein

würde nicht genügend sein, die Suspensionen in der Menge und Form, wie sie sich zeigen, in das Flussbett zu bringen; diese werden vorzüglich von der Oberfläche oder aus den Lagen seichter Bodenwasser zugeführt, in grösster Menge dann, wenn der Zufluss im Steigen sich befindet. Für Quellen lässt es sich an einer ruhigen, immer gleichen Temperatur und an einer ebenfalls nur geringen Veränderlichkeit der Wassermenge erkennen, wenn sie aus grosser Tiefe kommen; solche sind meist „rein", nämlich ohne Trübung durch Suspensionen zu zeigen, wenn auch die Menge der gelösten unorganischen Körper in denselben in einzelnen Fällen eine sehr grosse wird.

Die Menge der Suspensionen in Flüssen wird am grössten in den Gebieten tropischer Regenzeit; diese bringt die Maxima hervor. Die Veränderung je nach Jahreszeit ist am deutlichsten im mittleren Theile, eines Stromlaufes. Im unteren Theile, wo die Suspensionen in sehr kleiner Form stets sich häufen, ist der Unterschied zwischen der Trübung bei hohem und jener bei niederem Wasserstande weit geringer; dagegen ist dort die absolute Menge permanent sehr gross. Auch in Europa ist ungeachtet des viel kleineren Stromgebietes und des viel kürzeren Laufes der Flüsse verglichen mit den Hauptströmen Indiens, die Trübung in den unteren Theilen während des ganzen Jahres ziemlich bedeutend, weit geringer allerdings als jene der indischen Flüsse; bei diesen trägt in ihrem unteren Theile noch Ebbe und Fluth sehr viel dazu bei, den Schlamm an allen etwas seichten Stellen, am meisten den Ufern entlang, aufzuwühlen und schwebend zu erhalten.

Das Maximum von Fluss-Trübung hat sich mir im Mătla gezeigt, im „Ost"-Flusse des Gangesdelta. Es ist dies jener Arm des Ganges in den Sănderbans, an welchem der neue Hafenplatz Ellengănj gelegen ist;[37]) dort war das Diaphanometer am 10. April 1857 bei lebhaftem Sonnenschein schon in einer Tiefe von $1^1/_2$ Zoll verschwunden, mitten im Flusse und zur Zeit der Ebbe, die etwas weniger trübt, als die stromaufwärts eindringende Fluth.

Ungeachtet der so bedeutend verminderten Durchsichtigkeit hatte sich die Quantität der suspendirten festen Körper bei directer Be-

37) „Reisen" Bd. I, S. 229.

stimmung durch Filtriren und Wägen selbst hier als eine sehr geringe gezeigt gegenüber der Quantität der gelösten Salze, die durch Eindampfen des filtrirten Wassers erhalten wurden. Das Gewicht der Suspensionen war 0·21 auf 1000 Theile des filtrirten Wassers, das Gewicht der Salze war 24·8 auf 1000 Theile; die Suspension also — stärker als in den meisten der Gletscherbäche — war doch wenig über $^1/_{5000}$ des Gesammtgewichtes und kleiner als $^1/_{100}$ des Gehaltes an aufgelösten Salzen des hier brakischen Flusswassers. Bei der Fluth wird auch der Salzgehalt durch das Eintreten von Meereswasser etwas grösser und kann durch Sturm oder Springfluth momentan fast jenem im angrenzenden nördlichen Theile der Bai von Bengalen gleich werden.

Aus grösseren Tiefen des Mătla, die mit dem Diaphanometer nicht mehr untersucht werden konnten, verschaffte ich mir, zur vergleichenden Bestimmung der Menge der Suspensionen, Wasser mit dem Klappen-Cylinder zum Schöpfen. In einzelnen Lagen ergab sich die Suspensionsmenge um mehr als die Hälfte vermehrt, während in den Seen in eigenthümlicher Weise die Suspensionen eine kleine Anhäufung an der Oberfläche zeigen.

Der Unterschied zwischen den verschiedenen Tiefen eines Flusses würde noch bedeutender und constanter sein, wenn nicht jede Krümmung im Flusse und jede locale Verminderung der Tiefe veranlasste, dass aus den unteren Schichten die Suspensionen emporgewirbelt werden.

An die grossen Flüsse in tropischer und subtropischer Lage reihen sich, was Menge der Suspensionen betrifft, unmittelbar die Ausflüsse aus den Gletschern. Bei diesen ist es die Reibung des Eises an seiner Unterlage, welche dem Schmelzwasser, das in zahllosen kleinen Zweigen unter dem Eise fortströmt, die festen Theilchen bietet. Da aber die Grösse derselben jene der Suspensionen im niedrigeren Laufe der Flüsse im Mittel übertrifft, ist die Menge, die das Wasser bewegt, hier eine geringere; auch die Durchsichtigkeit wird im Verhältnisse zum Gewicht der Suspensionen etwas weniger beschränkt. In 1000 Theilen Gletscherwassers, an der Austrittsstelle selbst, ist uns nicht über 0·15 an Suspensionen vorgekommen.

Zur Charakteristik des mittleren Zustandes indischer Flüsse in jenen Monaten, auf welche die so ungleichen Anschwellungen während

der Regenzeit nicht mehr direct einwirken, in der sich also die Flüsse unter sich und mit europäischen am besten vergleichen lassen, sei noch Folgendes aus dem Detail unserer Beobachtungen angeführt; es zeigt sich selbst für jene Monate eine noch immer sehr bedeutende Trübung.

Im Ganges bei Allahabád, ein wenig oberhalb des Eintrittes der Jámna, Höhe 272 Fuss, 5. April 1856, verschwand das Diaphanometer bei 15·2 Zoll Tiefe. Im Brahmapútra in Assám ergab sich in der kühlen Jahreszeit 1855—56 die Tiefe des Verschwindens meist = 18 bis 24 Zoll. Auch im Delta sind die grossen Zweige des Ganges, etwas weniger durchsichtig als jene des Brahmapútra, in den Hauptarmen des Ganges war die Tiefe des Verschwindens meist 10 Zoll bis 1 Fuss; in der Mégna, da wo sie sich vom Brahmapútra abzweigt, war die entsprechende Tiefe (21. Febr. 1856) sogar 4 Fuss 2·7 Zoll.

Von Flüssen in der westlichen Hälfte Indiens sind zum Vergleiche der Indus und der Sátlej zu nennen.

Im Indus ergab sich als entsprechende Tiefe bei Átak, Höhe über dem Meere 1049 Fuss, nach Adolph's Beobachtung, 2 Fuss 9 Zoll (16. Dec. 1856). Weiter stromabwärts, bei Sákker, Höhe 353 Fuss, nach Beobachtung von Robert, liess sich nur bis $2^1/_2$ Zoll hinabsehen (3. Febr. 1857). Im Sátlej fand ich, am 12. Januar 1857, das Verschwinden zu Filúr (gegenüber von Ludhiána, 893 Fuss hoch) bei 8·2 Zoll; bei der Vángtu-Brücke, Höhe 4932 Fuss, war es 5·2 Zoll. Dort war zur Zeit der Beobachtung, 6. Juni 1856, schon die für den westlichen Himálaya charakteristische „kleine Regenzeit" vorhergegangen; die regelmässige, auch weit stärkere Regenzeit beginnt dort im letzten Drittel des Juni.

Im Rheine bei Lorch, um auch eines europäischen Flusses zu erwähnen, erhielt ich im Beginn des Sommers, 3. Juni 1863, eine entsprechende Tiefe von 1 Fuss 3 Zoll.

In den verschiedenen Meereswassern, welche wir zu untersuchen Gelegenheit hatten, war die Durchsichtigkeit eine sehr ungleiche und zwar nicht einfach von der Entfernung vom Ufer abhängig, obwohl die Nähe der Ufer, auch ohne dass grössere Flüsse dabei einmünden,

38) Reisen Bd. II, S. 397 u. 457; „Results" vol. IV p. 489, etc.

die Suspensionen meist vermehrt. Häfen aber, wenn sonst begünstigt, z. B. durch niedere Ebbe und Fluth, durch lange Perioden geringer Windesstärke u. s. w., haben nicht selten Wasser von der grössten Durchsichtigkeit, die überhaupt vorkömmt; die geringe Bewegung des Wassers in denselben ist dabei das Wichtigste.

So war im Hafen von Corfù (6. Juni 1857) das Diaphanometer bei 51 Fuss erst verschwunden. Als Meeresgebiet grosser Durchsichtigkeit in den westlichen Tropen ist der Golf von Mexico zu nennen. Im Hafen von Vera Cruz z. B. kann man den dunkeln Anker bei 40 bis 45 Fuss Tiefe noch auf dem hellen Grunde sehen; an den Bahamabänken nördlich von Cuba, wie jüngst Capt. Probst aus Bremen mir mittheilte, kam ihm solches bei 70 Fuss Tiefe noch vor.

Da eine geringe absolute Menge von Suspension eine für das Auge merkliche Trübung hervorbringen kann, geschieht es, dass man in Meeresbecken da wo grosse Flüsse münden, z. B. längs des obenerwähnten Gangesdelta, 8 bis 10 englische Meilen weit vom Ufer ihre Suspensionen im Meereswasser noch bei solchen Messungen erkennt.

Die mittlere Tiefe, welche für das Verschwinden des Diaphanometers in der tropischen und den gemässigten Zonen angenommen werden kann, scheint 20 bis 30 Fuss zu sein; so hatte ich bei Trinkomalí im indischen Ocean (30. April 1857) 26′ 8″, im Hafen von Áden (13. Mai 1857) 27′ 3″ erhalten; später bei Brighton (wo wir nach der Rückkehr zugleich einige Experimente über das Verschwinden verschiedener Farben anstellten), war die entsprechende Tiefe für das weisse Diaphanometer (22. August 1857) 21 Fuss; im Nordcanal, zwischen Schottland und Irland 25 Fuss (10. September 1857).

Bedeutend geringer ist die Durchsichtigkeit, wo Land nicht sehr ferne, nach vorhergegangenen Stürmen. Die Trübung hält oft Tage lange an. Unter solchen Umständen war die Grenze der Sichtbarkeit an der Küste von Madrás (28. April 1857) 12′ 3″ Tiefe, nahe an Suez (20. Mai 1857) 11′ 11″ und im Hafen von Alexandria (2. Juni 1857) 10′ 0″.

Die Farbe untersuchte ich sowohl mit einem dreiseitigen Glasprisma als mit den Steinen, die als Diaphanometer dienten.

Das Glasprisma wird am besten ziemlich gross gewählt, z. B. mit

einem gleichseitigen Dreiecke von 2 Zoll Seite als Basis und einer Höhe ebenfalls von 2 Zoll; es bietet sich so zur Beobachtung 4 Quadratzoll Fläche, was bei der geringen Tiefe, die nöthig ist, ganz genügt. Das Prisma wird unter die Oberfläche des Wassers gehalten und so gedreht, dass es dem Beobachter die intensivste, die deutlichste Farbe zeigt.

Die Stellung, die das Prisma dabei erhält, ist nämlich jene, in welcher das Licht, das der Oberfläche des Wassers parallel auf das Prisma fällt, nach oben reflectirt wird. Die Benützung des Prismas hat den Vortheil, dass sich dasselbe auch in seichten Wassern anwenden lässt.[39])

Noch einfacher ist das Verfahren, die Färbung zu beobachten, welche der weisse Diaphanometerstein beim Hinabsinken annimmt. Die Farbe selbst ist die gleiche, wie jene, die sich bei der Benützung des Prismas ergiebt, aber am weissen Marmor beobachtet, kann die Farbe zu blass sich zeigen, wenn das Diaphanometer bei ungenügender Tiefe des Wassers nicht hinreichend gesenkt werden kann; die Intensität der Farbe ist die grössere bei Beobachtung mit dem Prisma, dagegen zeigt dieses genau beurtheilt nur die Farbe der Wasserschicht in jener Tiefe, in der das Prisma sich befindet, während der weisse Cylinder das Mittel der ganzen über ihm stehenden Schicht ergiebt.

Wo immer Gelegenheit sich bot, wandte ich beide Verfahren zum Vergleichen an; häufig konnte aber nur das Glasprisma allein benützt werden, da dieses auch in jenen Fällen sich einsetzen liess, in welchen das Wasser im allgemeinen seicht war oder an Stellen, wo Boote oder Flösse fehlten, um vom Ufer sich zu entfernen. — Ohne physikalische Apparate beurtheilt, ist die Farbe auf Seen am deutlichsten bei einem etwa 1 Fuss hohen Wellenschlage.

Die Seen, die Süsswasserseen sowie die Salzseen sind, wenn etwas gross, theils blau, theils grün. In den kleineren kommt Roth vor, dann meist mit geringer Durchsichtigkeit des Wassers und mit mehr als mittlerer Trübung durch Suspensionen zusammenfallend.

Das Wasser des Tomognalarí zeigte sich in einiger Entfernung

39) Ich hatte desshalb das Prisma schon bei dem Srinăger-See „Reisen", Band II, S. 411, zu erwähnen.

vom Ufer, schon an Stellen von 20 bis 30 Fuss Tiefe, ganz blau, sowohl wenn vertical auf das Diaphanometer hinabgesehen wurde, als bei Anwendung des Prismas. Nahe dem Ufer zeigte nur das Prisma das Blau deutlich, wenn so gedreht, dass es die Strahlen von der Mitte des Sees her bekam; die weisse Platte war hier, vertical angesehen, entschieden grün.

Ganz ähnlich war es am Tsomoríri, aber die Nüance des Blau selbst ist dort eine etwas andere, nämlich heller und mit einem Stich in das Violette.

Die Farbe der grösseren unter den Alpenseen ist meist grünlich und diese Farbe ist die gleiche auch in der Mitte, an den tiefsten Stellen. In Irland fand ich den grossen Lough Neagh bei Antrim grünlich mit rother Nüance. Der Killarney-See im südwestlichen Irland hatte unter allen Seen, die mir vorkamen, in seiner Farbe von Roth am meisten.

In Verbindung mit den Erscheinungen ungewöhnlicher Reinheit und Lebhaftigkeit der Farbe bei durchfallendem Lichte zeigte sich bei all den grösseren Salzseen auch ein sehr schönes Farbenspiel an ihrer Oberfläche in Reflexen. Dies trug nicht wenig dazu bei, ihre Wirkung als Theil des landschaftlichen Bildes zu erhöhen.

Der Tsomoríri war derjenige, dessen Lage — in einem ziemlich weiten, von Norden nach Süden gerichteten Thale — dabei am günstigsten war. Es genüge, die Einzelheiten für diesen zusammenzustellen.

In den Stunden der Morgenkühle bei glatter Oberfläche spiegelten sich Wolken sehr glänzend; wenn der Standpunkt des Beobachters tief genug, sah man die Reflexe[1]) der Bergkämme, aber diese, wegen des niederen Winkels, mit unruhigen Contouren.

Etwas vor 8½ a. m. beginnt am Tsomoríri im Sommer und Herbst meist ein Hauch, ähnlich einem „Gletscherwinde". Bei der nord-südlichen Richtung der Längenachse des Sees srömt dann die Luft mit ziemlicher Lebhaftigkeit über den ganzen See hinweg dem südlichen

---

40) Mangel an Reflexen oder ganz vereinzelte unbestimmte Formen derselben, selbst bei unbewegter Luft und vollkommen ruhig sich zeigender Oberfläche, hatte ich bei jenen „scheinbaren Seen", welche die Wüstenhitze hervorbringt, als des vor allem wichtigen Unterscheidungsmerkmales zu erwähnen. „Reisen" Band I, S. 23.

Ende zu, weil hier über einer breiten Sandfläche der aufsteigende Luftstrom nun merkbar begonnen hat. Sobald dieser Thalwind eintritt, sieht man plötzlich, inselartig über die Fläche vertheilt, dunklere Stellen, die in violetter Farbe perlmutterartig glänzen. (Am Tsomognalarí, als ich Gelegenheit hatte, Sondirungen vorzunehmen, fand ich, dass solche Stellen Orte von geringerer Tiefe waren.) Dieser Thalwind des Morgens währt nur wenige Stunden; sowohl die Erwärmung der Abhänge als auch, häufiger noch, das Eintreten allgemeineren stärkeren Windes unterbricht ihn. Auch solcher bedingte noch deutliche und zwar constante Unterschiede der Färbung zwischen einzelnen Theilen der Seeoberfläche; aber die vorherrschende Farbe war dann lebhaft blau und die inselartigen seichten Stellen traten als hellgrüne hervor; bei noch höherem Wellengange war die Oberfläche gleichmässig blau, und alle lokalen Unterschiede verschwanden.

In den Alpenseen hatte ich so bestimmtes Farbenspiel nie gesehen. Bei dem späteren Besuche der Alpenseen fand ich es am günstigsten, Oelskizzen der Seeoberflächen, nur auf Farbe und Vertheilung derselben bezogen, zu machen, und diese Skizzen dann vergleichend zusammenzustellen. Es ergab sich dabei, dass unter sonst ähnlichen Umständen, z. B. in Betreff der Seebodengestaltung und der relativen Höhe der Umgebung, mit der Durchsichtigkeit des Wassers die Farbeneffecte an der Oberfläche rasch zunehmen.

Die Farben der Flüsse sind unter sich viel verschiedener als jene der Seen. In Gebirgsströmen, vor allem bei so starkem Gefälle wie meist in Hochasien, hat die relative Menge von Suspensionen grossen Einfluss; Roth als integrirender Theil der Farbe kommt dann sehr viel vor; doch findet sich ähnliches Roth als Flussfarbe auch nicht selten bis weit hinab in die Ebene, und steigert sich aufs neue in den Deltas. Im Mátla z. B. in Bengalen war Roth das Vorherrschende. Die Hauptarme des Ganges aber sah ich Ende Februar (1856) an vielen Stellen entschieden gelblich.

In Europa ist gelbliche Farbe wohl am allgemeinsten in Spanien, wie mein Bruder Eduard mir berichtete, der nach Rückkehr vom Feldzuge in Marokko Spanien bereiste. Der Ebro, der Tajo, der Quadalquivir, sie alle haben in ihrem unteren Laufe deutlich diese Farbe.

Grüne Farbe des Wassers ist in Kalkgebirgen die häufigste, in jenen der Alpen sowohl als in sedimentären Kalken älterer geologischer Perioden.

Der Rhein, den ich bei Lorch auch auf die Farbe untersuchte, war grünlich mit rother Nüance.

Die Farbe in den Meeren liegt zwischen Blau und Grün und zeigt sich an einigen Stellen auch wechselnd. Auf offener See ist Blau in mittleren Breiten das Gewöhnlichere, aber in seiner Farbennüance, in seiner Klarheit, auch in seiner Helligkeit nach der Lage und nach der Jahreszeit verschieden. In hohen Breiten ist Grün das Häufigere; es kann zwar blaue Farbe vorkommen, aber das Grün ist vorherrschend. Noch allgemeiner ist das Grün längs der Ufer. So fand ich es z. B. bei Súez sowohl als auch bei Belfast, am Giants Causeway, im Norden von Irland.

Ein Cyclus

von

Determinanten - Gleichungen.

(Eine analytische Erweiterung des Pascal'schen Theoremes.)

Von

Otto Hesse.

Ein Cyclus von Determinanten-Gleichungen.

(Eine analytische Erweiterung des Pascal'schen Theoremes.)

Von

Otto Hesse.

I.

In den dreissiger Jahren hat Steiner eine Figur entdeckt, die wohl zu den elegantesten Erfindungen der neueren Geometrie gehört. Die Entdeckung hat er in seiner Geometrie p. 311 mit folgenden Worten ausgedrückt: „Irgend 6 Punkte eines Kegelschnittes bestimmen 60 einbeschriebene einfache Sechsecke; in jedem der letzteren liegen die drei Punkte, in welchen die gegenüberliegenden Seiten sich schneiden, in einer Geraden P, so dass 60 solcher Geraden P stattfinden; von diesen 60 Geraden gehen drei und drei durch irgend einen Punkt R, so dass 20 solcher Punkte R entstehen; und von diesen 20 Punkten R liegen 15 mal 4 in einer Geraden S, so dass jeder in drei solcher Geraden liegt. (Welche Beziehungen haben diese 15 Geraden S zu einander)."

Wenn man die Steiner'sche Figur ablöset von dem Kegelschnitte, auf welchen sie sich bezieht, so besteht dieselbe nur aus 15 geraden Linien S, welche sich zu dreien 20 mal in einem der 20 Punkte R schneiden. Der Charakter dieser complicirten Figur lässt sich, wie ich in Crelles Journal Bd. 42 p. 269 gezeigt habe, viel einfacher als durch eine Zeichnung in folgenden 20 linearen identischen Gleichungen darlegen:

$$\delta) \quad \varrho + \varrho' + \varrho'' = 0$$

$\alpha^0)$ $b - c = \varrho$	$\beta^0)$ $c - a = \varrho'$	$\gamma^0)$ $a - b = \varrho''$
$\alpha')$ $b' - c' = \varrho$	$\beta')$ $c' - a' = \varrho'$	$\gamma')$ $a' - b' = \varrho''$
$\alpha'')$ $b'' - c'' = \varrho$	$\beta'')$ $c'' - a'' = \varrho'$	$\gamma'')$ $a'' - b'' = \varrho''$

1) . . .

$\alpha_0)$ $a' - a'' = r$	$\alpha_,)$ $a'' - a = r'$	$\alpha_{,,})$ $a - a' = r''$
$\beta_0)$ $b' - b'' = r$	$\beta_,)$ $b'' - b = r'$	$\beta_{,,})$ $b - b' = r''$
$\gamma_0)$ $c' - c'' = r$	$\gamma_,)$ $c'' - c = r'$	$\gamma_{,,})$ $c - c' = r''$

$$d) \quad r + r' + r'' = 0$$

Die geometrische Deutung dieser 20 identischen Gleichungen, vorzugsweise die analytische Ausdehnung derselben Gleichungen, unter Beschränkungen die am Ende dieses Abschnittes dargelegt werden sollen, bilden den Gegenstand dieser Abhandlung.

Die Steiner'sche Figur geht von irgend drei geraden Linien ϱ, ϱ', ϱ'' aus, welche sich in einem beliebigen Punkte δ schneiden. Sind demnach $\varrho = 0$, $\varrho' = 0$, $\varrho'' = 0$ die Gleichungen dieser geraden Linien, so müssen sich dieselben mit constanten Factoren multipliciren lassen der Art, dass ihre Summe identisch verschwindet. Nimmt man aber an, dass die angegebenen Gleichungen schon diese Factoren haben, so ist die in 1) aufgeführte identische Gleichung δ) die Bedingung des Anfanges der weiter auszuführenden Steiner'schen Figur.

Den genannten drei geraden Linien ist irgend ein Dreieck einbeschrieben, dessen Ecken α^0, β^0, γ^0 der Reihe nach in den geraden Linien ϱ, ϱ', ϱ'' liegen. Sind nun $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$ die Gleichungen der den genannten Ecken gegenüberliegenden Seiten, so müssen sich sechs constante Factoren α, β, γ, α', β', γ' finden lassen der Art, dass man identisch hat:

$$\beta B - \gamma' C = \varrho \qquad \gamma C - \alpha' A = \varrho' \qquad \alpha A - \beta' B = \varrho''$$

und mit Rücksicht auf die identische Gleichung δ:

$$(\alpha - \alpha')\,A + (\beta - \beta')\,B + (\gamma - \gamma')\,C = 0\,.$$

Da diese identische Gleichung aber aussagt, dass die Seiten des Dreieckes durch einen und denselben Punkt gehen, was gegen die Voraussetzung ist, so muss $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$ sein. Setzt man nun $\alpha A = a$, $\beta B = b$, $\gamma C = c$, so sind $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$ die Gleichungen der Seiten des Dreieckes und die identischen Gleichungen $\alpha^0)$, $\beta^0)$, $\gamma^0)$ die Bedingungen, dass das Dreieck den drei geraden Linien ϱ wirklich einbeschrieben ist.

Beschreibt man den drei geraden Linien ϱ ein zweites Dreieck $\alpha'\beta'\gamma'$ ein, dessen Seiten in gleicher Weise durch die Gleichungen $a' = 0$, $b' = 0$, $c' = 0$ ausgedrückt seien und ein drittes Dreieck mit den Seiten $a'' = 0$, $b'' = 0$, $c'' = 0$, so lässt sich annehmen, dass diese Gleichungen bereits mit solchen constanten Factoren multiplicirt seien, dass man die identischen Gleichungen hat $\alpha') \beta') \gamma')$, $\alpha'') \beta'') \gamma'')$, welche die Bedingungen der bis dahin beschriebenen Steiner'schen Figur ausdrücken.

Definirt man nun die drei linearen Ausdrücke r, r', r'' durch die identischen Gleichungen $\alpha_0)$, $\alpha_,)$, $\alpha_{,,})$, so sieht man, dass alle übrigen Gleichungen 1) aus den besprochenen unmittelbare Folgen sind. Diese Gleichungen sind aber der Ausdruck für bemerkenswerthe Eigenschaften der beschriebenen Figur. Denn die identischen Gleichungen $\alpha_0)$, $\beta_0)$, $\gamma_0)$ beweisen, dass die correspondirenden Seiten des zweiten und dritten Dreieckes, welche den drei geraden Linien ϱ einbeschrieben wurden, sich in drei Punkten α_0, β_0, γ_0 schneiden, welche auf derselben geraden Linie $r = 0$ liegen. Combinirt man ebenso das dritte und erste den geraden Linien ϱ einbeschriebene Dreieck oder das erste und zweite, so erhält man die Schnittpunkte $\alpha_,$, $\beta_,$, $\gamma_,$ oder $\alpha_{,,}$, $\beta_{,,}$, $\gamma_{,,}$, welche respective auf den geraden Linien $r' = 0$ oder $r'' = 0$ liegen. Die letzte identische Gleichung 1) giebt den Beweis, dass auch die drei geraden Linien r sich in einem Punkte d schneiden.

Die beschriebene Figur ist die Steiner'sche. Sie besteht aus 15 geraden Linien S:

$$2) \ldots \quad \begin{matrix} \varrho & \varrho' & \varrho'' \\ r & r' & r'' \end{matrix} \qquad \begin{matrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{matrix}$$

und den 20 Punkten R:

$$3) \ldots \quad \begin{matrix} \delta & \alpha^0 \beta^0 \gamma^0 & \alpha' \beta' \gamma' & \alpha'' \beta'' \gamma'' \\ d & \alpha_0 \beta_0 \gamma_0 & \alpha_1 \beta_1 \gamma_1 & \alpha_2 \beta_2 \gamma_2 \end{matrix}$$

Die Steiner'sche Figur lässt sich bequem in folgendem Satze ausdrücken:

„Wenn man dreien geraden Linien ϱ, welche von demselben „Punkte δ ausgehen, drei Dreiecke einbeschreibt, so schneiden sich „die correspondirenden Seiten von je zwei dieser Dreiecke in drei „Punkten, welche in einer geraden Linie r liegen und die drei den „Dreieck-Paaren entsprechenden geraden Linien r schneiden sich „wieder in einem Punkte d."

Der Charakter der Figur spricht sich in diesem Satze aber nicht so deutlich aus als in den aufgestellten identischen Gleichungen 1). Denn aus dem Satze ist es nicht sogleich ersichtlich, wie man umgekehrt von den drei geraden Linien r ausgehend, welche sich in dem Punkte d schneiden, in umgekehrter Richtung ohne die Figur zu verlassen zu dem dem Punkte d entsprechenden Punkte δ gelangen muss.

Dass die Punkte δ und d in der Figur gleichberechtigt sind, ersieht man aus den identischen Gleichungen 1) sofort, wenn man die geometrische Interpretation derselben in umgekehrter Ordnung, von der letzten Gleichung ausgehend, unternimmt. Die Punkte δ und d sind deshalb conjugirte Punkte.

Ebenso wie die Punkte δ' und d in der Steiner'schen Figur einander entsprechen, so entsprechen einander auch je zwei von den 20 Punkten R, wie die Zusammenstellung derselben in 3) angiebt zum Beispiel die Punkte α^0 und α_0.

Um dieses leichter einzusehen, wiederholen wir nur die 20 identischen Gleichungen in veränderter Reihenfolge:

$$\alpha^0) \quad b - c - \varrho = 0$$

$\beta^0)$ $a + \varrho' = c$	$\gamma^0)$ $a - \varrho'' = b$	$\delta)$ $-\varrho' - \varrho'' = \varrho$
$\gamma_,)$ $c'' - r' = c$	$\beta_,)$ $b'' - r' = b$	$\alpha'')$ $b'' - c'' = \varrho$
$\gamma_{,,})$ $c' + r'' = c$	$\beta_{,,})$ $b' + r'' = b$	$\alpha')$ $b' - c' = \varrho$
$\gamma')$ $b' + \varrho'' = a'$	$\gamma'')$ $b'' + \varrho'' = a''$	$\beta_0)$ $b' - b'' = r$
$\beta')$ $c' - \varrho' = a'$	$\beta'')$ $c'' - \varrho' = a''$	$\gamma_0)$ $c' - c'' = r$
$\alpha_{,,})$ $a - r'' = a'$	$\alpha_,)$ $a + r' = a''$	$d)$ $-r' - r'' = r$

$$\alpha_0) \quad a' - a'' - r = 0$$

Denn die geometrische Interpretation dieser Gleichungen nach Art der Gleichungen 1) ergiebt, dass, wenn man von den drei geraden Linien b, c, ϱ ausgeht, welche sich in dem Punkte α^0 schneiden, man in der Steiner'schen Figur auf die geraden Linien a', a'', r geführt wird, welche sich in dem, dem Punkte α^0 entsprechenden, Punkte α_0 schneiden.

Es vereinfacht sich demnach die Anschauung der Steiner'schen Figur, wenn man die ältere Bezeichnung der 20 Steiner'schen Punkte aufgiebt und, wie von Schröter in seiner Geometrie p. 166 bereits geschehen, nunmehr von den 10 Steiner'schen Punktepaaren R und den 15 Steiner'schen geraden Linien S spricht.

Diese Bezeichnung wird sich mehr noch empfehlen, wenn man die Steiner'sche Figur nicht, wie hier, von ihrem Ursprunge, den 6 Punkten auf einem Kegelschnitte, trennt und es unternimmt nach Anleitung in

Crelles Journal Bd. 68 pag. 205 und mit Hülfe des Uebertragungs-Prinzipes in Schlömilchs Journal 11. Jahrgang p. 425 die Resolventen des 10. und 15. Grades von Lagrange, Traité de la résolution des équations numériques p. 260 einer algebraischen Gleichung des 6. Grades geometrisch zu construiren.

Die discutirte Steiner'sche Figur ging von drei geraden Linien ϱ aus, welchen irgend drei Dreiecke a b c, a' b' c', a'' b'' c'' einbeschrieben waren. Nimmt man aber Abstand von dem dritten einbeschriebenen Dreiecke und definirt die drei Ausdrücke a'' b'' c'' durch die identischen Gleichungen:

$$a'' + b + c' = 0 \quad , \quad b'' + c + a' = 0 \quad , \quad c'' + a + b' = 0$$

so sieht man, dass in 1) die Gleichungen $\alpha'')$ $\beta'')$ $\gamma'')$ aus den vorhergehenden und den die Ausdrücke a'' b'' c'' definirenden Gleichungen folgen. Es ist deshalb das Dreieck mit den Seiten $a'' = 0$, $b'' = 0$, $c'' = 0$ ebenfalls den drei geraden Linien ϱ einbeschrieben, jedoch nicht willkürlich, sondern bedingt durch die beiden ersten Dreiecke. Die Figur wird hierdurch eine specielle Steiner'sche und ihr Charakter drückt sich ebenfalls durch die 20 identischen Gleichungen 1) aus, aber mit Anschluss der identischen Gleichungen:

$$4) \ \ldots \quad \begin{array}{lll} a'' + b + c' = 0 & b'' + c + a' = 0 & c'' + a + b' = 0 \\ a'' + b' + c = 0 & b'' + c' + a = 0 & c'' + a' + b = 0 \end{array}$$

welche einfache Folgen aus den kurz vorhergehenden sind.

Die Gleichungen $\alpha_{,,})$ $\beta_{,,})$ $\gamma_{,,})$ beweisen, dass die geraden Linien aa', bb', cc' die gegenüberliegenden Seiten eines Pascal'schen Sechseckes sind, welche sich paarweise in drei Punkten der Pascal'schen Linie r'' schneiden. In diesem Sechsecke sind, wie die Gleichungen 4) darthun a'' b'' c'' die Diagonalen, welche die gegenüberliegenden Ecken des Sechseckes verbinden.

Geht man nun in der Beschreibung der speciellen Steiner'schen Figur, welche in den angegebenen 26 Gleichungen ihren analytischen Ausdruck hat, nicht von den drei geraden Linien ϱ aus, welchen drei Dreiecke einbeschrieben wurden, sondern von dem genannten Pascal'schen Sechsecke, so lässt sich dieselbe durch folgenden Satz ausdrücken:

„Wenn man in einem Pascal'schen Sechsecke die drei Dia-
„gonalen zieht, welche die gegenüberliegenden Ecken verbinden,
„so bilden die geraden Seiten des Sechseckes, die ungeraden Seiten
„und die drei Diagonalen drei Dreiecke, welche dreien von einem
„Punkte ausgehenden geraden Linien ϱ einbeschrieben sind. Die
„entsprechenden Seiten je zweier von diesen Dreiecken schneiden
„sich paarweise in einer geraden Linie r, und die drei geraden
„Linien r schneiden sich wieder in einem Punkte."

Die Erweiterung dieses Satzes oder, analytisch gefasst, die Erweiterung der 26 den Satz beweisenden identischen Gleichungen wird der Gegenstand des folgenden Abschnittes sein.

II.

Wenn R die Determinante bedeutet: $R = \sum \pm u_0^0 u_1^1 \ldots u_m^m$, so hat man bekanntlich:

$$\frac{d^2R}{du_\varkappa^\lambda du_{\varkappa'}^{\lambda'}} \cdot R = \frac{dR}{du_\varkappa^\lambda}\frac{dR}{du_{\varkappa'}^{\lambda'}} - \frac{dR}{du_\varkappa^{\lambda'}}\frac{dR}{du_{\varkappa'}^{\lambda}}.$$

Die Ausdrücke, aus welchen die Gleichung zusammengesetzt ist, sind sämmtlich Determinanten. Führt man die Bezeichnungen ein: $\triangle$, $[\alpha\gamma, \beta\delta]$, $[\alpha\beta]$ für die Determinanten:

$$5) \ldots\ \triangle = \begin{vmatrix} u_0^0 \ldots u_n^0 \\ \cdots\cdots \\ u_0^n \ldots u_n^n \end{vmatrix}, \quad [\alpha\gamma, \beta\delta] = \begin{vmatrix} u_0^0 \ldots u_n^0, \alpha_0, \gamma_0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ u_0^n \ldots u_n^n, \alpha_n, \gamma_n \\ \beta_0 \ldots \beta_n, 0, 0 \\ \delta_0 \ldots \delta_n, 0, 0 \end{vmatrix}, \quad [\alpha\beta] = \begin{vmatrix} u_0^0 \ldots u_n^0, \alpha_0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ u_0^n \ldots u_n^n, \alpha_n \\ \beta_0 \ldots \beta_n, 0 \end{vmatrix}.$$

so hat man auf Grund der angegebenen Gleichung:

$$6) \ldots . \qquad \triangle[\alpha\gamma, \beta\delta] = [\alpha\beta][\gamma\delta] - [\alpha\delta][\gamma\beta] .$$

Diese Gleichung unter der Bezeichnung 5) wird der Ausgangspunkt sein der nachfolgenden Entwickelungen. Sie lehrt, dass die Determinante $[\alpha\gamma, \beta\delta]$ nur ihr Vorzeichen ändert, wenn man die Buchstaben α und γ oder die Buchstaben β und δ mit einander vertauscht, was auch an der Determinante selber in 5) zu Tage tritt.

Wenn man in der Gleichung 6) die Buchstaben β und γ mit einander vertauscht und in der daraus hervorgehenden Gleichung wieder die Buchstaben β und δ mit einander vertauscht, so erhält man:

$$\begin{aligned} \triangle[\alpha\beta, \gamma\delta] &= [\alpha\gamma][\beta\delta] - [\alpha\delta][\beta\gamma] \\ \triangle[\alpha\delta, \gamma\beta] &= [\alpha\gamma][\delta\beta] - [\alpha\beta][\delta\gamma] . \end{aligned}$$

Die Differenz der beiden Gleichungen giebt unter der Voraussetzung dass $\mu_{\varkappa}^{\lambda} = \mu_{\lambda}^{\varkappa}$, dass also die Determinante $\triangle$ eine symmetrische sei, weil dann $[\beta\delta] = [\delta\beta]$ ist, mit Rücksicht auf 6) folgendes Resultat:

$$\begin{aligned} \triangle\{[\alpha\beta, \gamma\delta] - [\alpha\delta, \gamma\beta]\} &= [\alpha\beta][\gamma\delta] - [\alpha\delta][\gamma\beta] \\ &= \triangle[\alpha\gamma, \beta\delta] , \end{aligned}$$

und mit Unterdrückung des Factors $\triangle$ haben wir:

$$7^*) \ldots . \qquad [\alpha\beta, \gamma\delta] = [\alpha\gamma, \beta\delta] + [\alpha\delta, \gamma\beta] .$$

Von dieser Gleichung wird in dem Folgenden kein Gebrauch gemacht werden. Ich habe sie aber nicht unterdrücken wollen, weil sie beweiset, dass man, wie von dem Multiplications-Theorem der Determinanten, so

auch unter Beschränkungen von dem Additions-Theorem der Determinanten sprechen kann. Wie das Produkt zweier Determinanten sich wieder als eine Determinante darstellt, welche zusammengesetzt ist aus den Elementen der Factoren, so stellt sich hier die Summe zweier Determinanten dar als eine Determinante zusammengesetzt aus den Elementen der Summanden.

Eine zweite ähnlich gebildete Gleichung leitet man unter der gleichen Voraussetzung $\mu_{\varkappa}^{\lambda} = \mu_{\lambda}^{\varkappa}$ aus den beiden oben aus 6) hervorgegangenen Gleichungen ab, wenn man die erste mit $[\alpha\beta][\gamma\delta]$ multiplicirt und die zweite mit $[\alpha\delta][\gamma\beta]$ multiplicirte Gleichung abzieht. Dadurch erhält man mit Rücksicht auf 6):

$$\begin{aligned}\triangle\left\{[\alpha\beta,\gamma\delta][\alpha\beta][\gamma\delta] - [\alpha\delta,\gamma\beta][\alpha\delta][\gamma\beta]\right\} &= [\alpha\gamma][\beta\delta]\left\{[\alpha\beta][\gamma\delta] - [\alpha\delta][\gamma\beta]\right\} \\ &= \triangle[\alpha\gamma][\beta\delta][\alpha\gamma,\beta\delta] ,\end{aligned}$$

und mit Unterdrückung des Factors $\triangle$

8*) . . . . $[\alpha\beta,\gamma\delta][\alpha\beta][\gamma\delta] = [\alpha\gamma,\beta\delta][\alpha\gamma][\beta\delta] + [\alpha\delta,\gamma\beta][\alpha\delta][\gamma\beta]$,

eine Gleichung, welche wegen ihrer Beschränkung ebensowenig als die vorhergehende 7*) in die folgenden Entwickelungen einzugreifen berufen ist.

Um eine andere Art von Determinanten-Gleichungen abzuleiten, welche der eben gemachten Voraussetzung nicht bedürfen, setzen wir in 6) für die Buchstaben β und γ respective ζ und ε. Dadurch geht die genannte Gleichung über in:

$$\triangle[\alpha\varepsilon,\zeta\delta] = [\alpha\zeta][\varepsilon\delta] - [\alpha\delta][\varepsilon\zeta] .$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit $[\gamma\beta]$ und zieht sie von der mit $[\varepsilon\zeta]$ mltiplicirten Gleichung 6) ab, so erhält man:

$$\Delta\Big\{[\varepsilon\zeta][\alpha\gamma,\beta\delta]-[\gamma\beta][\alpha\varepsilon,\zeta\delta]\Big\} = [\alpha\beta][\gamma\delta][\varepsilon\zeta]-[\gamma\beta][\varepsilon\delta][\alpha\zeta].$$

Der linke Theil dieser identischen Gleichung ist das Product zweier Factoren, von welchen der erste Δ sich nicht ändert, wenn die Buchstaben $\alpha, \beta, \ldots \zeta$ verändert werden. Der andere Factor ϱ'':

$$\varrho'' = [\varepsilon\zeta][\alpha\gamma,\beta\delta]-[\gamma\beta][\alpha\varepsilon,\zeta\delta]$$

ändert sich jedoch zugleich mit den Buchstaben $\alpha, \beta \ldots \zeta$. Vertauscht man aber diese Buchstaben in der Weise, dass der rechte Theil der vorhergehenden identischen Gleichung ungeändert bleibt, so wird durch die gleiche Vertauschung auch ϱ'' ungeändert bleiben, wenn gleich die Form dieses Ausdruckes sich ändert.

Der rechte Theil der angegebenen identischen Gleichung bleibt aber ungeändert, wenn man für die Buchstaben $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta$ respective setzt $\gamma, \delta, \varepsilon, \zeta, \alpha, \beta$ oder $\varepsilon, \zeta, \alpha, \beta, \gamma, \delta$. Man hat daher:

9) . . . . $\quad \Delta\varrho'' = [\alpha\beta][\gamma\delta][\varepsilon\zeta] - [\gamma\beta][\varepsilon\delta][\alpha\zeta]$

10) . . . .
$$\begin{aligned}\varrho'' &= [\varepsilon\zeta][\alpha\gamma,\beta\delta]-[\gamma\beta][\alpha\varepsilon,\zeta\delta]\\ &= [\alpha\beta][\gamma\varepsilon,\delta\zeta]-[\varepsilon\delta][\gamma\alpha,\beta\zeta]\\ &= [\gamma\delta][\varepsilon\alpha,\zeta\beta]-[\alpha\zeta][\varepsilon\gamma,\delta\beta].\end{aligned}$$

Hieraus entspringt nun durch cyclische Vertauschung der Buchstaben $\alpha, \gamma, \varepsilon$ ein ganzes System identischer Gleichungen. Denn setzt man $\gamma, \varepsilon, \alpha$ für $\alpha, \gamma, \varepsilon$ so wird:

11) . . . . $\quad \Delta\varrho = [\gamma\beta][\varepsilon\delta][\alpha\zeta]-[\varepsilon\beta][\alpha\delta][\gamma\zeta]$

12) . . . .
$$\begin{aligned}\varrho &= [\alpha\zeta][\gamma\varepsilon,\beta\delta]-[\varepsilon\beta][\gamma\alpha,\zeta\delta]\\ &= [\gamma\beta][\varepsilon\alpha,\delta\zeta]-[\alpha\delta][\varepsilon\gamma,\beta\zeta]\\ &= [\varepsilon\delta][\alpha\gamma,\zeta\beta]-[\gamma\zeta][\alpha\varepsilon,\delta\beta].\end{aligned}$$

Setzt man $\varepsilon, \alpha, \gamma$ für $\alpha, \gamma, \varepsilon$, so gehen 9) und 10) über in:

13) . . . . $\quad \Delta\varrho' = [\varepsilon\beta][\alpha\delta][\gamma\zeta] - [\alpha\beta][\gamma\delta][\varepsilon\zeta]$

14) . . . . $\quad \begin{aligned} \varrho' &= [\gamma\zeta][\varepsilon\alpha, \beta\delta] - [\alpha\beta][\varepsilon\gamma, \zeta\delta] \\ &= [\varepsilon\beta][\alpha\gamma, \delta\zeta] - [\gamma\delta][\alpha\varepsilon, \beta\zeta] \\ &= [\alpha\delta][\gamma\varepsilon, \zeta\beta] - [\varepsilon\zeta][\gamma\alpha, \delta\beta] . \end{aligned}$

Addirt man endlich 9), 11), 13), so erhält man:

15) . . . . $\quad \varrho + \varrho' + \varrho'' = 0$

Hieraus entspringt nun ein zweites System identischer Gleichungen, wenn man die Buchstaben δ und ζ mit einander vertauscht. Bezeichnet man nämlich die Ausdrücke, in welche ϱ'', ϱ, ϱ' durch diese Vertauschungen übergehen respective mit r'', r', r, so erhält man aus 9) bis 15) folgendes System:

16) . . . . $\quad \Delta\mathrm{r}'' = [\alpha\beta][\gamma\zeta][\varepsilon\delta] - [\gamma\beta][\varepsilon\zeta][\alpha\delta]$

17) . . . . $\quad \begin{aligned} \mathrm{r}'' &= [\varepsilon\delta][\alpha\gamma, \beta\zeta] - [\gamma\beta][\alpha\varepsilon, \delta\zeta] \\ &= [\alpha\beta][\gamma\varepsilon, \zeta\delta] - [\varepsilon\zeta][\gamma\alpha, \beta\delta] \\ &= [\gamma\zeta][\varepsilon\alpha, \delta\beta] - [\alpha\delta][\varepsilon\gamma, \zeta\beta] \end{aligned}$

18) . . . . $\quad \Delta\mathrm{r}' = [\gamma\beta][\varepsilon\zeta][\alpha\delta] - [\varepsilon\beta][\alpha\zeta][\gamma\delta]$

19) . . . . $\quad \begin{aligned} \mathrm{r}' &= [\alpha\delta][\gamma\varepsilon, \beta\zeta] - [\varepsilon\beta][\gamma\alpha, \delta\zeta] \\ &= [\gamma\beta][\varepsilon\alpha, \zeta\delta] - [\alpha\zeta][\varepsilon\gamma, \beta\delta] \\ &= [\varepsilon\zeta][\alpha\gamma, \delta\beta] - [\gamma\delta][\alpha\varepsilon, \zeta\beta] \end{aligned}$

20) . . . . $\quad \Delta\mathrm{r} = [\varepsilon\beta][\alpha\zeta][\gamma\delta] - [\alpha\beta][\gamma\zeta][\varepsilon\delta]$

21) . . . . $\quad \begin{aligned} \mathrm{r} &= [\gamma\delta][\varepsilon\alpha, \beta\zeta] - [\alpha\beta][\varepsilon\gamma, \delta\zeta] \\ &= [\varepsilon\beta][\alpha\gamma, \zeta\delta] - [\gamma\zeta][\alpha\varepsilon, \beta\delta] \\ &= [\alpha\zeta][\gamma\varepsilon, \delta\beta] - [\varepsilon\delta][\gamma\alpha, \zeta\beta] \end{aligned}$

22) . . . . $$\mathrm{r} + \mathrm{r}' + \mathrm{r}'' = 0 .$$

Um über dieses Chaos von Gleichungen einen Ueberblick zu gewinnen, führen wir die Bezeichnungen ein:

23) . . . .
$$\begin{array}{lll} \mathrm{a} = [\varepsilon\zeta][\gamma\alpha, \delta\beta] & \mathrm{a}' = [\alpha\beta][\varepsilon\gamma, \zeta\delta] & \mathrm{a}'' = [\gamma\delta][\varepsilon\alpha, \zeta\beta] \\ \mathrm{b} = [\gamma\beta][\varepsilon\alpha, \delta\zeta] & \mathrm{b}' = [\varepsilon\delta][\alpha\gamma, \zeta\beta] & \mathrm{b}'' = [\alpha\zeta][\varepsilon\gamma, \delta\beta] \\ \mathrm{c} = [\alpha\delta][\varepsilon\gamma, \beta\zeta] & \mathrm{c}' = [\gamma\zeta][\alpha\varepsilon, \delta\beta] & \mathrm{c}'' = [\varepsilon\beta][\alpha\gamma, \delta\zeta] . \end{array}$$

Hierdurch kommen nämlich alle Gleichungen 9) bis 22) zurück auf die 20 Gleichungen 1) mit Ausschluss der 6 folgenden Gleichungen, welche die 6 Ausdrücke ϱ und r definiren:

24) . . . .
$$\begin{array}{l} \underline{\wedge}\varrho = [\gamma\beta][\varepsilon\delta][\alpha\zeta] - [\varepsilon\beta][\alpha\delta][\gamma\zeta] \\ \underline{\wedge}\varrho' = [\varepsilon\beta][\alpha\delta][\gamma\zeta] - [\alpha\beta][\gamma\delta][\varepsilon\zeta] \\ \underline{\wedge}\varrho'' = [\alpha\beta][\gamma\delta][\varepsilon\zeta] - [\gamma\beta][\varepsilon\delta][\alpha\zeta] \\ \\ \underline{\wedge}\mathrm{r} = [\varepsilon\beta][\alpha\zeta][\gamma\delta] - [\alpha\beta][\gamma\zeta][\varepsilon\delta] \\ \underline{\wedge}\mathrm{r}' = [\gamma\beta][\varepsilon\zeta][\alpha\delta] - [\varepsilon\beta][\alpha\zeta][\gamma\delta] \\ \underline{\wedge}\mathrm{r}'' = [\alpha\beta][\gamma\zeta][\varepsilon\delta] - [\gamma\beta][\varepsilon\zeta][\alpha\delta] . \end{array}$$

An den 9 Determinanten-Ausdrücken 23) kann man die Bemerkung machen, dass dieselben in einander übergehen aber das entgegengesetzte Vorzeichen annehmen, wenn man entweder irgend zwei von den Buchstaben α, γ, ε oder irgend zwei von den Buchstaben β, δ, ζ mit einander vertauscht.

Von diesen Eigenschaften der 9 Determinanten-Ausdrücke 23) werden wir Gebrauch machen zur Entscheidung der Frage, ob dieselben so allgemein sind, dass sie nur den 20 Gleichungen 1) genügen, oder ob sie auch den Bedingungen 4) oder ähnlichen Bedingungen unterworfen sind. Das letztere trifft zu, und es wird unsere Aufgabe sein, dieses nachzuweisen.

Nehmen wir zu diesem Zwecke irgend einen der Ausdrücke, welche nach 4) verschwinden, zum Beispiel den Ausdruck E:

25) . . . . $$E = a + b' + c'',$$

so stellt sich derselbe nach 23) so dar:

26) . . . . $$E = [\varepsilon\zeta][\alpha\gamma, \beta\delta] + [\varepsilon\delta][\alpha\gamma, \zeta\beta] + [\varepsilon\beta][\alpha\gamma, \delta\zeta].$$

Man hat aber nach 6) und mit Vertauschung der Buchstaben in dieser Gleichung:

$$\begin{aligned} \triangle[\alpha\gamma, \beta\delta] &= [\alpha\beta][\gamma\delta] - [\alpha\delta][\gamma\beta] \\ \triangle[\alpha\gamma, \zeta\beta] &= [\alpha\zeta][\gamma\beta] - [\alpha\beta][\gamma\zeta] \\ \triangle[\alpha\gamma, \delta\zeta] &= [\alpha\delta][\gamma\zeta] - [\alpha\zeta][\gamma\delta]. \end{aligned}$$

Multiplicirt man demnach die Gleichung 26) mit $\triangle$, so stellt sich der rechte Theil der Gleichung als eine Determinante dar wie folgt:

27) . . . . $$\triangle E = \begin{vmatrix} [\alpha\beta], & [\alpha\delta], & [\alpha\zeta] \\ [\gamma\beta], & [\gamma\delta], & [\gamma\zeta] \\ [\varepsilon\beta], & [\varepsilon\delta], & [\varepsilon\zeta] \end{vmatrix}$$

welche beweiset, dass E nur sein Vorzeichen ändert, wenn man irgend zwei Buchstaben α, γ, ε oder irgend zwei Buchstaben β, δ, ζ mit einander vertauscht.

Diese Vertauschungen lassen nun aus 25) folgende 6 identische Gleichungen hervorgehen:

28) . . . . $$\begin{aligned} a'' + b + c' &= E \quad & b'' + c + a' &= E \quad & c'' + a + b' &= E \\ a'' + b' + c &= E \quad & b'' + c' + a &= E \quad & c'' + a' + b &= E. \end{aligned}$$

Gleichungen, welche in die Gleichungen 4) vollständig übergehen, wenn E verschwindet. Dieses trifft aber wohl nur zu wenn $n = 1$, wie nachgewiesen werden soll.

Denkt man sich die Determinante $\triangle E$ entwickelt, so wird ein beliebiges Glied der Entwickelung nur die Form haben können:

$$C\alpha_a\gamma_c\varepsilon_e \cdot \beta_b\delta_d\zeta_f .$$

Dieses eine Glied bedingt, weil die Determinante auch zwischen den Buchstaben β, δ, ζ alternirt, andere Glieder mit abwechselnden Vorzeichen, deren Summe ist:

$$C\alpha_a\gamma_c\varepsilon_e \cdot \sum \pm\beta_b\delta_d\zeta_f$$

und diese Summe als ein Glied der Entwickelung aufgefasst, bedingt, weil die Determinante auch zwischen den Buchstaben α, γ, ε alternirt, wieder Glieder, deren Summe ist:

$$C\sum \pm\alpha_a\gamma_c\varepsilon_e \cdot \sum \pm\beta_b\delta_d\zeta_f .$$

Da nun im Falle $n = 1$ die Indices a, c, e und die Indices b, d, f nur die Zahlen 0 und 1 bedeuten können, in welchem Falle sowohl der erste als der zweite Factor neben C verschwindet, so sieht man, dass das aus der Entwickelung der Determinante $\triangle E$ hervorgehobene Glied nicht vorkommen kann, dass also die Determinante selber verschwindet. Der in 5) definirte Ausdruck $\triangle$ verschwindet nicht. Es muss desshalb E verschwinden. Dadurch gehen nun die Gleichungen 28) über in die Gleichungen 4).

In dem allgemeinen Falle, wenn $n > 1$, lässt sich für das Verschwinden von E ein gleicher Beweis nicht führen und wir müssen an Stelle der Gleichungen 4) die Gleichungen 28) gelten lassen.

Zum Schlusse führen wir noch ein System Gleichungen vor, welches sich aus 16) und 17) ergiebt, wenn man die Buchstaben $\varepsilon\ \zeta\ \gamma\ \beta\ \alpha\ \delta$ der Reihe nach verändert in $\varepsilon\ \zeta\ \beta\ \gamma\ \delta\ \alpha$ oder in $\beta\ \zeta\ \gamma\ \delta\ \varepsilon\ \alpha$, und annimmt, dass r'' durch diese Veränderung übergeht in $-r_0$ oder in $-r_1$.

29) . . . . $$\underline{\Delta} r'' = [\alpha\beta][\gamma\zeta][\varepsilon\delta] - [\gamma\beta][\varepsilon\zeta][\alpha\delta]$$

30) . . . . $$\begin{aligned} r'' &= [\varepsilon\delta][\alpha\gamma, \beta\zeta] - [\gamma\beta][\alpha\varepsilon, \delta\zeta] \\ &= [\alpha\beta][\gamma\varepsilon, \zeta\delta] - [\varepsilon\zeta][\gamma\alpha, \beta\delta] \\ &= [\gamma\zeta][\varepsilon\alpha, \delta\beta] - [\alpha\delta][\varepsilon\gamma, \zeta\beta] \end{aligned}$$

31) . . . . $$-\underline{\Delta} r_0 = [\delta\gamma][\beta\zeta][\varepsilon\alpha] - [\beta\gamma][\varepsilon\zeta][\delta\alpha]$$

32) . . . . $$\begin{aligned} -r_0 &= [\varepsilon\alpha][\delta\beta, \gamma\zeta] - [\beta\gamma][\delta\varepsilon, \alpha\zeta] \\ &= [\delta\gamma][\beta\varepsilon, \zeta\alpha] - [\varepsilon\zeta][\beta\delta, \gamma\alpha] \\ &= [\beta\zeta][\varepsilon\delta, \alpha\gamma] - [\delta\alpha][\varepsilon\beta, \zeta\gamma] \end{aligned}$$

33) . . . . $$-\underline{\Delta} r_1 = [\varepsilon\delta][\gamma\zeta][\beta\alpha] - [\gamma\delta][\beta\zeta][\varepsilon\alpha]$$

34) . . . . $$\begin{aligned} -r_1 &= [\beta\alpha][\varepsilon\gamma, \delta\zeta] - [\gamma\delta][\varepsilon\beta, \alpha\zeta] \\ &= [\varepsilon\delta][\gamma\beta, \zeta\alpha] - [\beta\zeta][\gamma\varepsilon, \delta\alpha] \\ &= [\gamma\zeta][\beta\varepsilon, \alpha\delta] - [\varepsilon\alpha][\beta\gamma, \zeta\delta] \end{aligned}$$

Unter der ausdrücklichen Annahme, dass $\underline{\Delta}$ eine symmetrische Determinante sei, geht dann aus 29), 31), 33) die einfache Gleichung hervor:

35*) . . . . $$r_0 + r_1 + r'' = 0\,.$$

Die aufgeführten identischen Determinanten-Gleichungen sind vielfacher geometrischer Deutungen fähig, von welchen wir nur eine hervorheben wollen. Setzen wir zu diesem Zwecke $n = 1$ und lassen die Grössen u lineare Ausdrücke der Coordinaten eines variabeln Punktes bedeuten,

so werden Determinanten-Ausdrücke von der Form $[\alpha\beta]$ die Repräsentanten von geraden Linien sein, welche irgend 6 auf dem Kegelschnitte $\triangle = 0$ gelegene Punkte $\varepsilon\ \zeta\ \gamma\ \beta\ \alpha\ \delta$ paarweise verbinden, denn nach 6) verschwindet $\triangle$, wenn $[\alpha\beta]$ und $[\alpha\delta]$ verschwinden oder $[\alpha\beta]$ und $[\gamma\beta]$. Es ist also $[\alpha\beta] = 0$ die Gleichung der geraden Linie, welche die Punkte α und β des Kegelschnittes verbindet. Geht man nun von dem, dem Kegelschnitte einbeschriebenen, Sechsecke $\varepsilon\ \zeta\ \gamma\ \beta\ \alpha\ \delta$ aus, so beweisen die aufgeführten Determinanten-Gleichungen bis 28) den am Ende des vorhergehenden Abschnittes angegebenen Satz. Unter derselben Annahme $n = 1$ und unter der Beschränkung, dass $\triangle$ eine symmetrische Determinante sei, welche Beschränkung jeder Kegelschnitt gestattet, beweisen die mit 29) anhebenden Gleichungen, dass dem Kegelschnitte drei Sechsecke $\varepsilon\ \zeta\ \gamma\ \beta\ \alpha\ \delta$, $\varepsilon\ \zeta\ \beta\ \gamma\ \delta\ \alpha$, $\beta\ \zeta\ \gamma\ \delta\ \varepsilon\ \alpha$ einbeschrieben sind, deren Pascal'sche Linien $r''\ r_0\ r$, sich in einem Kirkman'schen Punkte schneiden.

München, im Februar 1872.

Die Mineraliensammlung

des

Bayerischen Staates.

Von

Franz von Kobell.

Die Mineraliensammlung

des

Bayerischen Staates.

Von

Franz von Kobell.

Die Mineraliensammlung des Bayerischen Staates, wie sie gegenwärtig hier aufgestellt ist wurde zu Ende des vorigen und Anfang dieses Jahrhunderts gegründet, theils durch Ankauf von Sammlungen und Vermehrung aus dem kurfürstlichen Naturalien-Kabinet in Mannheim (1802), theils durch Erwerbungen gelegenheitlich der Auflösung der bayerischen Klöster im Jahre 1802 und[1]) durch Geschenke des Königs Maximilian I. aus den 1812 angekauften Sammlungen des Präsidenten v. Schreber in Erlangen, sowie durch ein Geschenk des damaligen Kronprinzen, nachmaligem König Ludwig I., aus der Cobres'schen Sammlung.

Zu jener Zeit war, seitdem Cronstedt, Wallerius und Bergmann eine Kritik der Kennzeichen der Mineralien entwickelt und dem Studium derselben eine bestimmtere Richtung gegeben hatten, für die

1) Eine akademische Rede des Freiherrn von Schütz „Von den Vorschritten und dem Nutzen des Studiums der Mineralogie etc." von 1797 zeigt, dass damals eine Mineraliensammlung bei Vielen als von sehr geringem Werthe angesehen wurde. „Es gibt, sagt er, bei uns in Bayern noch Männer, — welche die Sammlung eines unterrichtenden Mineralien-Kabinets als eine blosse Tändelei und Spielwerk, ja bloss dafür ansehen, dass das Aug an den Farben und mancherlei Krystallisationen, wie ein Kind an ihrer Puppe, einige Unterhaltung finde, welche junge Leute von diesem Studium (der Mineralogie) sogar abrathen und sie lieber auf die Grabstätte alter handfester Ritter hinführen wollen, um daselbst Inschriften und nichts bedeutende Titeln abzuschreiben etc."

Wissenschaft durch Romé de l'Isle, Werner und Hauy ein Fundament geschaffen worden, welches den Fortbau vielseitig ermöglichte, und es begann allmälig die Lösung von Aufgaben, an welchen sich frühere Forscher vergeblich versucht hatten. Es ist klar, dass die Mineraliensammlungen, quae delectando docent et docendo delectant, sagt von ihnen Wallerius, dass diese andere Gestalt gewannen, je nachdem von den Sammlern der jeweilige Stand der Wissenschaft gekannt war und berücksichtigt wurde. Zunächst waren die Mineralsysteme für die Sammler massgebend, und so geschah es, dass bei Uebernahme älterer Sammlungen eine Menge von Dingen sich eingereiht fanden, welche die spätere Kritik ausschloss. In den älteren Systemen nahmen die Erden eine wichtige Stelle ein, ebenso die Stalaktiten und Versteinerungen, die Steinspiele (Lapides figurati) und die Steinähnlichkeiten (calculi), die sich in Pflanzen und Thieren finden. Auf die Steinspiele wurde besonders viel gehalten, man bewahrte Steine mit Bildern von menschlichen Figuren, von Thieren und Pflanzen, man hatte nach den Zeichnungen musikalische, geographische und mathematische Steine; dazu kommen Perlen und Korallen und die mannigfaltigsten Arten von Concretionen, welche sich in Thierkörpern fanden. Es war natürlich, dass man mit unkritischer Beachtung der Form, in der ein Mineral erschien, mit den physischen Kennzeichen von Farbe, Härte und specifischem Gewicht allein, eine Menge Verschiedenheiten für wesentlich hielt, die es nicht waren, und dass die Sammlungen um so mehr solche Vorkommnisse aufstellten, als sie besonders in die Augen fielen und konnte hier ein sicherer Blick in ihr Wesen erst gewonnen werden, als die Chemie sie zum Gegenstand der Forschung machte.

Es war vorzüglich der schwedische Berghauptmann Axel von Cronstedt, welcher eine Purification vornahm und Anlass gab, dass das Sammeln und Aufstellen von Sandarten und Erden, von Schiefern und Naturspielen, die man nach Wallerius statt Lusus naturae besser Lusus Lithophilorum nennen könnte, nicht mehr so ausgedehnt betrieben wurde wie früher, und dass man das Wesentliche daran von dem Zufälligen unterscheiden lernte. In jener Zeit war denn auch der Begriff von Mineral nicht der heutige, welcher, enger gefasst, nur einfache Species, nicht aber deren Gemenge, wie sie in den Felsarten vorkommen,

bezeichnet, es war die Gränze zwischen Mineralogie, Geognosie und Petrographie nicht bestimmt gezogen und die Geognosie erst im Entstehen. Sowie diese mehr und mehr sich ausbildete, wurden Felsarten und Petrefacten aus den eigentlichen Mineraliensammlungen ausgeschieden oder kamen letztere nur der Substanz nach als Pseudomorphosen in Betracht, die Felsarten aber nur, insoferne es die Angabe des Vorkommens der Mineralspecies verlangte.

Die Münchner Sammlung war denn auch in der ersten Zeit ihres Bestehens ein Conglomerat sehr ungleichartiger Gegenstände und erst allmälig wurden Gruppen und untergeordnete Sammlungen daraus gebildet, welche Zusammengehöriges umfassten. Im Jahre 1812 wurde das Mineralien-Kabinet des Berg-Eleven-Instituts mit den betreffenden Staatssammlungen, oder wie sie damals hiessen, mit den Mineraliensammlungen der königl. Akademie der Wissenschaften vereinigt und war dem Conservator, Commenthur Jos. Petzl, die Aufstellung und der Unterricht in der Mineralogie für die Berg-Eleven übertragen.

Die Sammlungen umfassten: eine systematisch oryktognostische, eine systematisch geognostische, eine inländische und eine ausländische Revier-Suiten-Sammlung, dann eine Petrefactensammlung. Es wurden davon nur die Pracht- und Schaustücke, grösstentheils aus dem Herzoglich-Zweibrück'schen Kabinet stammend, in die Mineraliensammlung des Staates eingereiht. Die Vermehrung einer Sammlung in solcher Weise, dass andere Sammlungen derselben Art neben ihr aufgestellt werden, hat mancherlei Nachtheile; man muss Zusammengehöriges an verschiedenen Orten suchen und die Zahl der Doubletten, natürlich der wenig interessanten am meisten, wird ohne Nutzen vervielfältigt, wenn man nicht zu Gunsten anderer Institute oder Lehranstalten darüber verfügen darf. Da es auch nicht möglich ist, eine dergleichen Nebensammlung wie die Hauptsammlung mit neuen Vorkommnissen zu vermehren, so wird ihr Werth allmälig geringer und oft beschränkt sie den wünschenswerthen Raum für die Hauptsammlung.

Andere, früher angekaufte oder als Geschenk erhaltene Sammlungen standen vielfach ausser Zusammenhang mit der eigentlichen Mineraliensammlung, so eine Suitensammlung der Steinkohlenformation von Häring in Tyrol, vom Director von Flurl geschenkt, eine Sammlung fürsten-

bergischer Gebirgsarten von Freiherrn von Moll, eine dergleichen aus Vorarlberg von Herrn von Lupin, eine Lavensammlung von dem damaligen Kronprinzen Ludwig I. und eine Sammlung meist vulkanischer Gesteine von Dolomieu.

Mit der Ausbildung der Wissenschaft und mit der Vergrösserung der Sammlungen zeigte sich auch desswegen eine Trennung derselben nothwendig, weil man wohl früher einem Conservator die erforderlichen Kenntnisse zumuthen konnte, einfache Mineralien, gemengte Felsarten und die Petrefacte zu bestimmen, und zu wissenschaftlichem Gewinn zu gebrauchen, später aber dieses nicht mehr möglich war. Es musste ein Specialstudium eintreten, bis sich wieder Resultate erreichen liessen, welche eine Periode der Wissenschaft befriedigend abschlossen, man musste mitbauen und konnte nicht in ein gebautes Haus einziehen, wie es später wieder möglich wurde.

Obwohl durch Hauy die Krystallographie eine bewundernswerthe Ausbildung erlangt hatte, wurden die Werner'schen so leicht zugänglichen und ohne Mathematik verständlichen Beschreibungen vielfach vorgezogen. Der wissenschaftliche Werth der Krystalle konnte daher von den Sammlern nicht erkannt werden, glänzende Drusen wurden am meisten beachtet, wenn sie auch bei weitem nicht die interessanten Formen aufzuweisen hatten als oft unscheinbare Vorkommnisse kleiner Krystalle; die Hilfsmittel des Messens beschränkten sich auf das Anleggoniometer oder man begnügte sich mit annähernder Abschätzung der Winkel. Dieses dauerte auch noch fort, als Weiss und Mohs die Krystallographie präciser mit Rücksicht auf die Axenverhältnisse behandelten, und um das Jahr 1820 war ein Einfluss auf die Wahl der Erwerbnisse für die Staatssammlung noch wenig bemerkbar. Um das Studium der Krystalle zu erleichtern, wurde 1821 unter Hofrath von Nau eine Sammlung von Krystallmodellen, von Leonhard und Pezhold gefertigt, angekauft (für 110 fl.) und der Antrag auf Erwerbung eines Wollaston'schen Goniometers gestellt. Auch ein Nicholson'sches Areometer wurde beantragt.

Mit chemischen Versuchen beschäftigten sich die damaligen Mineralogen im Allgemeinen sehr wenig oder gar nicht, denn obwohl Werner schon in seiner ersten Abhandlnng „Von den äusserlichen Kennzeichen

der Fossilien (1774) in Beziehung auf das Mineralsystem sich äusserte „Meine Meinung ist: die Fossilien müssen bis auf ihre Gattungen herunter nach ihrer Mischung eingetheilt werden", so erwähnt er doch nur des Gebrauches des Scheidewassers, um durch erfolgendes Aufbrausen, wie es beim Malachit, bei der Kupferlasur und den Kalkarten geschehe, ein Kennzeichen zu gewinnen, ebenso des Ammoniaks, um durch dessen blaue Färbung einen Kupfergehalt zu entdecken und dass man, um Blei aufzufinden, die Probe mit destillirtem Essig digeriren soll und mit Vorsicht kosten, ob solcher einen süsslichen Geschmack davon bekommt, wie bei Bleierzen zu geschehen pflegt. — Auch noch im Jahre 1811 sagt Hofmann, der vorzüglichste Bearbeiter der Werner'schen Mineralogie, hierüber: Diese chemischen Kennzeichen stehen zwar überhaupt den äusseren Kennzeichen in Hinsicht ihrer Brauchbarkeit in vielen Stücken nach, sind aber doch zuweilen als subsidiarisches Hülfsmittel, besonders bei der Classification der Fossilien nicht ganz ohne Nutzen und dürfen also nicht gänzlich vernachlässigt werden." Ein Einwurf gegen diese Kennzeichen bestand vorzüglich darin, dass sie, wie gesagt wurde, grosse Zurüstungen und Apparate, weitläufige Operationen und viel Zeit erfordern, und man könne daher nur auf solche eingehen, welche sich schnell, leicht und mittelst kleiner Vorrichtung auffinden lassen. Man sollte glauben, es sei immer dringend nothwendig gewesen, ein Mineral so schleunig wie möglich zu bestimmen, daher Werner auch die Mittel der Physiker zur Bestimmung des spec. Gewichtes in der Mineralogie für unbrauchbar erkannte. „Denn, wie ist es möglich, sagt er, die dazu nöthigen Werkzeuge und Vorrichtungen allemal gleich bei der Hand zu haben? Und in welchem Cabinette würde es einem Mineralogen erlaubt sein, mit Stufen dergleichen Versuche anzustellen? Zudem, so wird auch zu jedesmaliger Anstellung derselben sehr viel Zeit erfordert, anderer Schwierigkeiten nicht zu gedenken." Es wurde also nach dem Gefühl taxirt, wie sich das Gewicht etwa zum Volumen verhalte. — Dieses Vermeiden strengerer Untersuchungen und mancherlei Beispiele, dass man ohne solche auch mit Erfolg bestimmen und unterscheiden könne, gewann begreiflicherweise zahlreiche Anhänger; man wusste nicht, wie viel dabei übersehen und falsch gedeutet wurde, wenn eben das Material keine auffallenden Eigen-

schaften bot, die wenigstens anzeigten, dass etwas Eigenthümliches vorliege. So geschah es, dass bei krystallinischen, stänglichen und faserigen Aggregaten oft die verschiedensten Mineralien in den Sammlungen beieinander lagen, und wenn eine neue Species bekannt wurde, so beschränkte sich der Antheil der Mineralogen meistens auf eine minutiöse Beschreibung des Aussehens, wobei Farbe, Glanz, Durchsichtigkeit etc. besonders berücksichtigt wurden, namentlich die Farbe, vor deren Trüglichkeit schon Bergmann u. a. gewarnt hatten. Man muss sich in der That wundern, wenn Chemiker wie Klaproth und Gehlen derlei Beschreibungen, die sie selbst leicht machen konnten, den sogenannten Mineralogen überliessen, denn von einer tiefer gehenden physikalischen Charakteristik war darin nichts zu finden. Im Jahre 1821 wurde erst am Conservatorium ein Löthrohr angeschafft, doch klagte der damalige Conservator, dass er mit diesem Löthrohrblasen nicht zurechtkommen könne.

Es war daher für das Mineralogische Conservatorium des Staates ein folgenreiches Ereigniss, als im Jahr 1823 J. N. Fuchs, bis dahin seit 1805 als Professor der Chemie und Mineralogie an der Universität Landshut thätig, dem Rufe nach München folgte und das Conservatorium übernahm. Wie er es zu führen gedachte, ging schon aus seinen früheren die Mineralogie betreffenden Arbeiten hervor und besonders aus der zur Stiftungsfeier der Akademie 1824 gehaltenen Rede „Ueber den gegenseitigen Einfluss der Chemie und Mineralogie.“ Fuchs hatte an mehreren Beispielen gezeigt, wie wenig ausreichend die Mittel der Werner'schen und selbst der Hauy'schen Mineralogie in jenen Fällen seien, wo der physikalische Charakter des Individuums durch die Aggregation verhüllt und theilweise ganz unkenntlich gemacht werde. So lagen in den Sammlungen sehr verschiedene Dinge als gleicher Art bei den sog. Zeoliten und Mesotypen, welche nun durch die chemische Analyse getrennt wurden, das Phosphat des Lazuliths war der ähnlichen Farbe wegen dem Silicat des Lasursteines eingereiht worden, es wurde nun ihre Verschiedenheit gezeigt, der Wagnerit konnte nicht mehr für Topas angesprochen werden, eine Menge unrichtig bestimmter Species wurden nun an die richtige Stelle gebracht. Das Conservatorium erhielt für seine Zwecke ein chemisches Laboratorium, die geognostische und

paläontologische Sammlung wurden von der mineralogischen getrennt, die speciell bayerischen Sammlungen an die Bergwerks-Administration zurückgegeben. Die Mineraliensammlung erhielt eine neue Aufstellung. Der Diamant konnte nicht länger an der Spitze der erdigen Fossilien stehen, der Saphir und Spinell nicht im Kieselgeschlecht eingereiht werden. Die Wahl eines Systems für die Aufstellung einer mineralogischen Sammlung hatte von jeher mancherlei Schwierigkeiten. Eine zeitlang dominirte das Werner'sche System über alle andern und neue Systeme, welche folgten, machten Aufsehen, denn man legte dem System im Allgemeinen einen hohen Werth bei, obwohl schon Emmerling zu Ende des vorigen Jahrhunderts sich darüber in folgender Weise äusserte: „Wir müssen uns die natürliche Verwandtschaft der Fossilien keineswegs als eine gerade Linie oder als eine ununterbrochen fortlaufende Kette, wo immer ein Glied sich nur an das vorhergehende oder nachfolgende anschliesst, auch nicht als ein regelmässiges, sondern als ein verworrenes, nach allen Seiten ausgedehntes Netz denken, in welchem einige Glieder an mehrere zugleich und gleich stark, andere hingegen nur an wenige oder nur an ein einziges und diess oft nur schwach, sich anschliessen."

Fuchs entwarf ein System, welches wesentlich eine praktische Charakteristik der höheren Classificationsstufen gewährte und wenn er bei den nichtmetallischen Mineralien dazu die Mischungstheile hervorhob, welche die Säure repräsentiren, bei den metallischen aber die Basen, so war das Princip der Classification an sich zwar kein einheitliches, mit Rücksicht auf seinen Zweck aber ein genügendes, und mit andern Systemen verglichen zeigte sich, dass die Unvollkommenheiten auf beiden Seiten nicht erheblich differirten. Wenn in andern Systemen die Species der Erze an den verschiedensten, weit auseinander liegenden Stellen aufgesucht werden müssen, so vereinigt sie obiges System in Gruppen und der Laie, der Bergmann und Metallurge haben an solcher Einigung mehr Interesse, als an den bei andern Anordnungen sich ergebenden Aehnlichkeiten und Beziehungen, die Fachgelehrten aber befriedigt ein allgemeines System überhaupt nicht und doch ist es ein Bedürfniss. Die Staatssammlung ist zur Zeit noch nach dem genann-

ten Princip, welches wesentlich auch bei Aufstellung des mineralogischen Museums in Dresden gedient hat, geordnet.

Mit der Uebernahme des Conservatoriums durch Fuchs, welchem ich als Adjunkt beigegeben zu werden das Glück hatte, begann zunächst eine Durchsicht der älteren Mineralbestimmungen und wurden dabei auch interessante neue Species entdeckt, welche nur durch chemische Analyse sich enthüllten. Bei der nun mehr wissenschaftlichen Kritik verlor manches früher hochgehaltene Stück den zuerkannten Werth. Ein sog. elastisch biegsamer Quarz, Gelenkquarz (ein Sandstein) von Villaricca in Brasilien konnte die Aufmerksamkeit nicht mehr erregen, welche ihm unter dem Comentur Petzl zu Theil geworden war. Dieser Sandstein, eine Platte von 64 Ctm. Länge, 15 Breite und $2^1/_4$ dick, über welchen Collini 1805 eine eigene Abhandlung geschrieben, war aus dem Mannheimer Cabinet an das Oberstbergamt abgegeben worden. Im Jahre 1808 wurde das Exemplar für die Staatssammlung erbeten, da die Sammlung des Oberbergamts mehr für praktische Instruction in der vaterländischen Mineralkunde bestimmt und folglich weniger zur Aufbewahrung von dergleichen Prachtstücken[1]) geeignet sei, welche in der akademischen Sammlung von viel mehreren, theils Einheimischen, theils Fremden gesehen und bewundert würden. Dagegen protestirte das Oberbergamt, da dieser Sandstein eines seiner vorzüglichsten Schaustücke sei, endlich kam er aber doch an die akademische Sammlung. Aehnliche Schaustücke von ebenso geringem Werthe wie dieser Sandstein, waren früher mehrere erworben worden, so ein durch Grösse, aber nicht durch Farbe auffallendes Stück Chrysopras, wofür 220 Gulden bezahlt wurden, und wenn Petzl von einem derselben schrieb, „Alles Merkwürdige unter den brennlichen Fossilien lässt ein stumpfeckiges Stück weingelber Bernstein von seltener Grösse und Reinheit weit hinter sich zurück", so zeigte sich bei chemischer Prüfung, dass diese Merkwürdigkeit gar kein Bernstein war, sondern Copal.

Es bewahrt übrigens die Sammlung aus älterer Zeit manches Schaustück, welches gegenwärtig viel mehr werth ist, als es damals war, weil das betreffende Vorkommen mit solcher Ausbildung oder

1) Um 1810 wurden Platten dieses Sandsteins von 12″ Länge, $1^3/_4$″ Breite und $^1/_3$″ dick, von dem Mineralienhändler Geisler in Leipzig für 50 Thlr. ausgeboten.

Eigenthümlichkeit der Individuen aufgehört hat. Es trifft dieses oft die schönsten und interessantesten Varietäten einer Species. So sind die sehr mannigfaltig krystallisirten Calcite des Harzes grösstentheils ausgebeutet und kommen viele derselben anderweitig nicht vor, so ist es mit den schönen Drusen des Mimetesit von Johann-Georgenstadt, mit den blauen Berillen von Gastein, mit den grossen Turmalinkrystallen und mit den Cordieriten von Bodenmais im bayer. Wald, mit den im Anhang näher beschriebenen Steinsalzkrystallen von Berchtesgaden, mit den grossen Fahlerzkrystallen von Schwaz, den Ural'schen Uwarowiten, den Manganiten von Ilfeld, den Aragoniten von Leogang und vielen andern. In keinem andern Naturreiche besteht ein ähnliches Verhältniss. Ein normal gebildetes Individuum ist für eine Thier- oder Pflanzenspecies, wenn man nicht gleichsam eine ideale Vollkommenheit anspricht, keine Seltenheit, bei den Krystallen aber ist oft unter tausend Individuen kein einziges, an welchem die gleichartigen Flächen die normale gleiche Grösse zeigen, und die Vollkommenheit eines Krystalls ist von so vielen Bedingungen abhängig, dass man von manchem wohl sagen kann, er sei ein Unicum auf der Welt. Sammler haben diese Verhältnisse wohl zu berücksichtigen.

Unter Fuchs wurde die Sammlung in mancher Hinsicht gegen früher begünstigt, der Etat derselben auf 700 fl. erhöht und die nöthige Freiheit zum Ankauf gegeben, denn noch im Jahre 1821 konnte der Conservator nur über 10 fl. disponiren und darüber hinaus musste Bericht erstattet und Erlaubniss eingeholt werden, wobei die Gelegenheit zu einem Ankauf, wie der Conservator v. Nau klagte, meistens versäumt wurde. Es war auch mehrmals Klage geführt worden, dass von der Bergadministration bayerische Vorkommnisse an die Sammlung nicht mitgetheilt wurden und erfolgte 1848 ein Erlass desshalb, in Folge dessen einige werthvolle Stufen von Bodenmais und Berchtesgaden erworben wurden. Es bot sich ausserdem manche günstige Gelegenheit zur Bereicherung und Completirung der Sammlung. So wurden aus dem Nachlasse des Baron von Gohren reiche Tellurerze und schöne Stufen edlen Opals angekauft, durch Consul v. Hagedorn wurden amerikanische Vorkommnisse eingeschickt, die österreichische Regierung überliess der Sammlung die zum Theil sehr ausgezeichneten Schaustücke,

welche in der Industrieausstellung im Jahre 1854 ausgestellt waren [1]) Die glänzendste Bereicherung erfolgte aber im Jahre 1858 durch den Erwerb der Sammlung des Herzogs Maximilian von Leuchtenberg, welche bei dem Kaufe von dessen Besitzungen in Eichstätt an den Staat überging. Diese Sammlung, an 10,000 Stücke zählend, übertraf an Gehalt bei weitem die bereits vorhandene. Die interessantesten und schönsten Vorkommnisse Russlands waren von dem edlen Herzog, welcher selbst mit mineralogischen Studien sich beschäftigte, in seinem Palais in Eichstädt anfgestellt worden und wurde unter Conservator Dr. Frischmann diese Sammlung mehr und mehr vervollständigt, zuletzt noch im Jahre 1852 durch den Ankauf der v. Ringseis'schen Sammlung (für 6000 fl.), welche namentlich an sicilianischem Schwefel und Cölestin in zahlreichen Varietäten mit prachtvollen Stufen ausgestattet war.

Von den russischen Schätzen, die uns damit zu Theil wurden, seien hier nur einige genannt, die Beilage gibt eine weitere Uebersicht.

Die Berille des Ural und des Gebietes von Nertschinsk, aufgefunden im Jahre 1723, waren in den meisten Sammlungen vorhanden, aber seltener die erst im Jahre 1830 im Katharinenburg'schen entdeckten Smaragde. Von diesen ist eine Stufe mit bis 4 Zoll langen und 2 Zoll breiten Krystallen, in Glimmerschiefer eingewachsen, hervorzuheben, welche von Mineralienhändlern auf 10 Tausend Gulden geschätzt

1) Unter den Freunden der Wissenschaft, welche die Sammlung mit Geschenken bedacht haben, sind die bayerischen Landesherrn, Maximilian I. (unter anderm mit den mineralogischen Erwerbungen von Spix und Martius in Brasilien), Ludwig I., Maximilian II., Ludwig II. zu nennen, ferner: Prinz Adalbert von Bayern (mit spanischen Vorkommnissen, Brogniartin, Apatit etc.), Kaufmann Bachmaier, v. Barth in Kalw, Professor B. v. Cotta, Prof. Eichwald in St. Petersburg, Apotheker Fauser in Pest, Conservator Dr. Frischmann, Oberbergrath Gümbel, v. Hörnes, vormaliger Director des Hofmineralien-Cabinets in Wien, Oberappellrath v. Hofstetten, Hauptmann Horn, k. k. Oberbergrath v. Kantz, Freiherr v. Karwinsky (mexikanische Vorkommnisse), Geheimerath v. Kleinschrod, Prof. v. Klipstein, Dr. Leybold in San Jago in Chile, Freiherr v. Liebig, A. Lipp, Vorstand der Abthl. für commerciellen Verkehr der k. k. Carl-Ludwig-Bahn (mit Vorkommnissen aus Galizien, Ungarn und Böhmen), Prof. v. Martius, Dr. Mayer, Director der chem. Fabrik in Heufeld (Cölestine und Schwefeldrusen aus Sizilien), Prof. Merklein in Schaffhausen, Herr Neumeyer in Melbourn, Prof. Palmieri in Neapel (Sublimate der Eruption des Vesuvs von 1871), Prof. Rumpf, Prof. Fr. Sandberger, Prof. Scheerer in Freiberg, Prof. v. Siebold, Oberbergrath Weisshaupt, Prof. Wirth in Hof, Prof. Zittel und der Verfasser der gegenwärtigen Schrift.

ist, ein Preis, wie er in England nnd in Russland für dergleichen Stufen giltig. Eine andere Smaragdstufe ist auf 800 fl. taxirt.

Prachtvoll sind die Stufen und Krystalle von Rubellit und ein Aggregat von der chinesischen Grenze wurde für 3000 Silberrubel (5600 fl.) angekauft. Die Topase von Mursinsk (darunter Krystalle bis zu 400 fl. an Werth), die Phenakite, Zirkone, Chrysoberille und Korunde des Ural sind in trefflichen Krystallen vorhanden, ebenso die Almandine, Uwarowite, Grossulare und Vesuviane von daher. Gleiches gilt von dem grünen Orthoklas (Amazonenstein), von den Muscowiten und Amethysten. Aus der Klasse der metallischen Mineralien sind zunächst zu erwähnen mehrere Stücke gediegenes Gold, darunter eines im Werthe von 427 fl., dergl. von Platin, dabei ein Stück von 3,4 Kilogramm, Seltenheiten wie Altait, Brochantit und in reichen Stufen Dioptas und Malachit, Krokoit und andere Bleierze und eine gewählte Sammlung von Pyrit, Mänakan, Aeschinit, Pyrochlor etc.

Ein Geschenk vom Jahre 1860, von Seite des Bergcorps in St. Petersburg unter Generalmajor Tamarski und Oberstlieutenant v. Kokscharow vermehrte und ergänzte noch die Erwerbnisse der Leuchtenberg'schen Sammlung. Das Conservatorium erhielt aber mit dieser Sammlung auch werthvolle Instrumente, ein Frauenhofer'sches Mikroskop, auf 400 fl. geschätzt, eine feine Analysirwage, Decimalwage, Wollaston'sches Goniometer und Polarisationsapparat, nebst einer Reihe mineralogischer Schriften.

Fuchs war 1856 dahingegangen und es wurde mir das Conservatorium anvertraut. Es begann eine dem Fachmann mannigfaltigen Genuss bietende Arbeit mit Ordnen und Zusammenstellen der neuen Sammlung mit der vorhandenen. Das Bestimmen zweifelhafter Species wurde mit analytischen Untersuchungen eifrig in Angriff genommen, das Etikettiren und Katalogisiren von dem 1860 angestellten II. Conservator Dr. Frischman durchgeführt.

Natürlich wuchs mit solcher Vergrösserung der Hauptsammlung [1]) auch die Zahl der Doubletten und der Anhang, zum Theil nur zu chemischen Versuchen verwendbarer Stücke. Dergleichen wurden mit Genehmigung des Ministeriums an verschiedene Lehranstalten des Lan-

1) Sie zählt gegenwärtig gegen 15000 Stück.

des abgegeben, so an die landwirthschaftliche und Gewerbsschule in Freising und an das Lyceum daselbst, an das kgl. Cadetten-Corps, an das Lyceum in Regensburg, an die Landwirthschafts- und Gewerbsschule in Landshut, die technische Lehranstalt in Ingolstadt, an die Forstschule in Aschaffenburg, an die Gewerbsschule zu Nürnberg, Gewerbs- und Handelsschule zu Speier, an die Universitäten zu Erlangen und München etc.

In der Sammlung sind auch Eisen- und Stein-Meteorite, letztere als die das gediegene Eisen führenden Felsarten aufgenommen und sind einige ausgezeichnete Exemplare vorhanden. Ausser einem Stück von der Pallas'schen Masse mit Chrysolith im Gewicht von 239 Grammen, einem Stück der Eisenmasse von Bendego in Brasilien von 3115 Grm. (von v. Martius mitgebracht), einer Masse von Xiquipilco in Mexiko von 1264 Grm. (Geschenk des Herrn Prof. v. Cotta), einem Funde von Cranburne in Australien von 17 Grm. (Geschenk des Hrn. Neumayer) und anderer von Arva, Braunau, Zacatecas etc. enthält die Sammlung an Stein-Meteoriten einen Block von Mauerkirchen im Innviertel von 8802 Grm. und als ein Unicum den 1846 zu Schönenberg im Mindelthal in Schwaben gefallenen Stein von 8015 Grm. Dieser Stein ist ein Geschenk des Königs Ludwig I. von Bayern, welcher ihn für 600 fl. gekauft und 1847 mit der Bestimmung übergeben liess, dass er in seinem ganzen Umfang erhalten werde. Es ist ferner hervorzuheben der Stein von Turuma in Ostafrika von 577 Grm., welchen Herr Dr. Barth in Kalw als Andenken an die Säcularfeier der hiesigen Akademie der Wissenschaften im Jahre 1859 zum Geschenk machte. Einen unerwarteten Zuwachs erhielt die Meteoriten-Sammlung auch, als 1869 Seine Majestät der König Ludwig II. eine Reihe von kleinen Mineralsammlungen aus dem Nachlass des Königs Ludwig I. dem Conservator zur Verfügung stellte, um Geeignetes davon der Sammlung des Staates einzuverleiben und anderes an die Universität, Polytechnicum etc. abzugeben. Unter den nicht geordneten und nicht etikettirten Stücken wurden 4 Meteorite erkannt und zwar als der Steinmasse von Mauerkirchen angehörig. Das grösste dieser Stücke hat ein Gewicht von 353 Grm., die kleineren wogen 306 Grm. Damit ist die Samm-

lung auch im Besitze des zweitgrössten bekannten Stückes dieses Steins. [1])

Eine Sammlung von Krystallmodellen, welche die Formen der wichtigsten Species mit Rücksicht auf die speciellen Winkelverhältnisse darstellen und woran die Flächen die Naumann'schen Zeichen tragen, ist vom Conservator Dr. Frischmann angefertigt und für die Sammlung erworben worden. Es besteht anderwärts keine ähnliche Sammlung von so genauer Arbeit.

Die Mineraliensammlung des Staates hat nicht nur den Zweck, die Wunder der Natur in diesen Produkten zur Anschauung zu bringen und die Belegstücke für den Fortschritt der Wissenschaft zu bewahren, sie soll auch das Material bieten, schwebende Untersuchungen weiterzuführen, unvollkommene Bestimmungen zu berichtigen und so der Wissenschaft zu dienen. Es sind daher auch vom Conservatorium die dazu nöthigen Hilfsmittel, Apparate und Instrumente zu berücksichtigen und anzuschaffen und mehren sich diese mit der Erweiterung der einschlägigen Wissenschaften der Chemie und Physik. Ein Polarisationsmikroskop, ein Stauroskop, Spektroskop, verbessertes Reflexionsgoniometer, eine feine Analysirwage, Jolly'sche Wage u. a. wurden angeschafft. — Wenn bei gutem Haushalt der zugemessene Etat im Allgemeinen genügt, so wäre doch im Interesse des Instituts wünschenswerth, dass bei Gelegenheit die Mittel zum Ankauf geeigneter alter Sammlungen gewährt würden, denn solche bewahren oft sehr interessante Vorkommnisse, welche sich nicht mehr finden und vielleicht niemals mehr finden werden, wie darauf schon oben hingewiesen wurde.

Einzelnheiten über die bayer. Staatssammlung.

Die Sammlung ist in 2 grossen Sälen und einem langen Corridor aufgestellt, soll aber ein erweitertes Lokal erhalten, da die Stücke zu

---

1) Die Meteorsteine zusammen wiegen 20019,1 Grm., die Meteoreisenmassen 7844,8 Grm. Das Gesammtgewicht der Meteorite ist daher 27863,9 Grm.

gedrängt liegen und bei der an vielen Kästen bestehenden Eintheilung der Schubladen nicht hinreichend gesehen werden können. Die Stücke sind mit gedruckten Etiketten versehen, welche Namen und Fundort angeben und auf keilförmigen Hölzern an den Schachteln befestigt sind.

Die Mineralien mit russischen Fundorten stammen zum grössten Theil aus der Herzogl. Leuchtenberg'schen Sammlung.

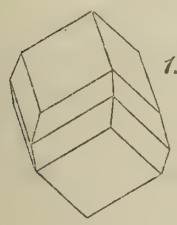
Die Aufstellung der nichtmetallischen Mineralien beginnt mit den Fluoriden und ist darunter die Species Liparit (Flussspath) in zahlreichen Exemplaren (253) von 40 verschiedenen Fundorten vertreten. Unter den Schaustücken ist eine Druse von der Derbyshire hervorzuheben, deren würflige Krystalle 2—3 Zoll messen, sie sind graulichgelb und violett fleckig gefärbt; eine andere mit weingelben Krystallen von Gersdorf in Sachsen, eine dergl., die Krystalle gelbgrau mit violetten Ecken, mit braunen Sphalerit von Durham in Devonshire. Besondere Farbenvertheilung zeigen Drusen und Gruppen zollgrosser Krystalle $\infty O \infty . O$. von Stollberg am Harz; die Krystalle sind aussen farblos, im Innern zeigen sie blassröthliche und bläuliche Lagen parallel den Würfelflächen. Eine Druse kleiner Würfel von Schlaggenwald in Böhmen zeigt die Krystalle innen violett, nach aussen farblos. Ziemlich grosse Krystalle $O . \infty O . \infty O \infty$ von Adun-Tschilon (Irkutzk) zeigen blassgrünliche Farbe, die Flächen von ∞O sind aber violett in dünner Lage (wie mit dem Pinsel angestrichen). Diese Krystalle, mit Topas- und Quarzkrystallen vorkommend, sind die ausgezeichnetsten Chlorophane; das smaragdgrüne Licht, welches sie beim Erwärmen ausstrahlen, ist sogar beim Tage bemerkbar. — Eine Druse kleiner Krystalle $\infty O \infty , \infty O$ von Wölsendorf in der Oberpfalz zeigt die sehr schmalen Flächen von ∞O ebenfalls violett, während die Krystalle sonst weiss sind.

Drusen und Gruppen blau und grün fluorescirender Zwillingkrystalle von Durham und Cumberland, dergl. $O . \infty O . \infty O \infty$ z. Thl. farblos und rosenroth fluorescirend vom Gallenstock am Rhonegletscher in Oberwallis. Zollgrosse Oktaeder von rosenrother Farbe, von der Göschener-Alpe im Kanton Uri.

Schöne Drusen von O sind von Giebelbach im Kanton Wallis und von Moldawa im Bannat. Drusen von $\infty O \infty . \infty O_3$ und ∞O_3 aus Corn-

wallis, von $\infty O\infty . 4O2$ von Weisseck in Lungau (Salzburg) und von St. Rupert und Münsterthal im Breisgau.

Eine ausgezeichnet schöne Druse von $\infty O\infty . \infty O$ stammt von Obernberg in Tyrol.



1.

2.

Unter den Chloriden ist eine Reihe loser wasserheller Krystalle von Steinsalz hervorzuheben, (30 Krystalle) welche die Combination $\infty O\infty . \infty O2$ in eigenthümlicher Weise halbflächig zeigen, so dass sie hexagonale Comb. nachahmen und als solche angesehen R. $R3$ zu bezeichnen wären. Fig. 1. 2. Diese Krystalle sind von Berchtesgaden und bis jetzt dergleichen nirgend anderswo vorgekommen. Die Vorkommnisse mit Gyps von Hall und Berchtesgaden sind sehr reich vertreten. Ausgezeichnet saphirblaue Varietäten sind von Hallstadt und von Kalucz in Galizien, ein Spaltungsstück von röthlich violetter Farbe von Berchtesgaden. Ein klares Spaltungsstück mit eingeschlossenen Flüssigkeits-Tropfen von Varangeville St. Nicolas bei Nancy.

Schöne Druse von Sylvin, $\infty O\infty$, O von Stassfurt bei Magdeburg und $\infty O\infty$ vom Aetna.

Die Reihe der Carbonate beginnt mit dem Aragonit. Es sind die Krystalle von Kosel in Böhmen $\infty P . \infty \breve{P}\infty . \breve{P}\infty$, auch mit $\frac{1}{2}\breve{P}\infty$ und mit $P . \breve{P}2 . 2\breve{P}2 . 2P\infty$ in schönen bis über 2″ langen Exemplaren von blassgelber Farbe vorhanden und deren Hemitropieen, Drehfl. ∞P. Schöne Drusen der Zwillinge und Drillinge von Herrengrund bei Neusohl in Ungarn und von Leogang im Salzburg'schen, letztere nicht mehr vorkommend. Eine Druse spiessiger Krystalle von Roupton Gill Cumberland N. Am. zeigt $6\breve{P}4/3 . 6\breve{P}\infty . \breve{P}\infty$. Die Krystalle von Molina und Bastennes etc. Von Witherit sind schöne Drusen, $P . 2\breve{P}\infty$, von Hexham und Alston in Cumberland vorhanden; von Strontianit unter andern Krystalle, $\infty P . \infty \breve{P}\infty . 0P$ in radialstängliche Aggregate verlaufend von Leogang im Salzburg'schen. Die Species Calcit zählt über 700 Exemplare.

Es sind hieraus hervorzuheben:

Drusen von R aus der Kadainsky'schen Grube von Nertschinsk.

Druse von $_4$R.R$_3$ von Matlok in der Derbyshire.

Druse schöner zollgrosser Krystalle — $^1/_2$R, auf violettem Liparit von Alston in Cumberland und dergl. von Andreasberg und Freyberg.

Druse R.—$^1/_2$R vom Münsterthal in Baden.

Druse von $^5/_4$R, mit Apophyllit von Faroë.

Zerstreut aufgewachsene Krystalle —$^1/_2$R.∞R auf Quarz mit Galenit von Neudorf am Harz und ein schöner Krystall dieser Art von Schneeberg in Sachsen.

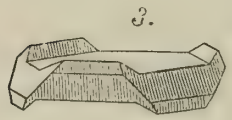
Druse durchsichtiger farbloser Krystalle —$_2$R, von Hüttenberg in Kärnthen.

Gegen 1$^1/_2$ Zoll grosse Krystalle R$_3$.R.—$^1/_2$R.—$_2$R von Pfitsch in Tyrol.

Druse grosser Krystalle R$_3$ von Derbyshire.

Prachtvolle Druse blassgelber Krystalle R$_3$.∞R von Derbyshire.

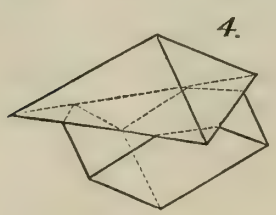
Ein vollständig ausgebildeter Krystall, 2″ lang und über 1$^1/_2$″ dick, R$_3$.∞R.$^1/_4$R$_3$.—$^1/_2$R.—$^5/_4$R auf dichtem Calcit von Berchtesgaden und mehrere ähnliche von daher.


3.

Druse tafelförmiger Krystalle, $_0$R.—$_2$R.∞R, sehr eigenthümlich gebildet. Die $_0$R Fläche wird am Rande überragt abwechselnd nach oben und unten von Krystalltheilen mit den kleineren Flächen ∞R u.—$_2$R. Von Andreasberg am Harz. S. Fig. 3.

Druse grosser Krystalle R$_3$.R auf klaren Quarzkrystallen aus Dauphiné.

Aggregat kreisförmig gestellter und verwachsener Krystalle R.$^2/_5$R$_2$.—$^1/_2$R, farblos und durchsichtig, an einem Axenende der Krystalle $_0$R mit Glasglanz und Furchung regulärer Dreiecke; ein flaches 4—5″ grosses Stück von Ahren in Tyrol.


4.

Druse von R$_3$.∞R auf Quarz und von R$_3$.∞R.—$^1/_2$R auf Liparit von Cumberland.

Tafelförmige Krystalle $_0$R.R; an einigen liegen zwei Rhomboederhälften von ungleicher Grösse mit $_0$R verbunden aufeinander (Fig. 4.) an anderen sitzt eine solche Hälfte auf der

grösseren basischen Fläche. Diese Krystalle, auf Quarz aufgewachsen, sind von Ahren. — Grosse Krystalle, z. Thl. $\infty R.-\frac{1}{2}R$ in Amethystmandeln aus der Rheinpfalz. —

Wasserhelle Spaltungsstücke aus Island; eines derselben von mit feinen Röhren im Innern, von 13 Centimeter Länge, 7 Centimeter breit und dick, trägt eine Lage aufgewachsener Büschel von Desmin. Unter den Dolomiten zeichnen sich einige Drusen von Traversella in Piemont aus und ein Zwillingskrystall von daher, dessen Individuen R an den Scheitelkanten 4 und 6 Ctm. messen. — Kugelförmige Bildungen, fasrig bis dicht, aus Australien.

Die Species der Sulphate sind sämmtlich in zahlreichen Exemplaren und Varietäten vertreten.

Baryt.

Druse tafelförmiger Krystalle, $\infty\breve{P}\infty . \bar{P}\infty . \infty P . \breve{P}\infty . {}_0P$. Darunter einer von 6—7 Ctm. Seitenlänge von Felsobanya in Ungarn.

Prismatischer Krystall, nach $\breve{P}\infty$ ausgedehnt, von 11 Ctm. Länge und 4 Ctm. Dicke, $\bar{P}\infty . \infty\breve{P}\infty . \breve{P}\infty . {}_0P . \infty\breve{P}2 . \infty P . \infty Pn$, ziemlich farblos und durchsichtig, aus Cumberland.

Loser Krystall, 5 Ctm. lang und 3 Ctm. dick, vollkommen klar und farblos, $\infty\breve{P}2 . \breve{P}\infty . \bar{P}\infty . \infty\bar{P}\infty$, und andere ähnliche Krystalle ebendaher.

Gruppe klarer und farbloser Krystalle, nach $\infty\breve{P}\infty$ tafelförmig, $\infty\breve{P}\infty . \infty\breve{P}2 . \breve{P}\infty . \bar{P}\infty . \infty\bar{P}\infty . \infty P . \infty\breve{P}4 . P . {}_0P$. ebendaher.

Schöne Gruppe von $4\frac{1}{2}$ Ctm. langen, gegen 1 Ctm. dicken, an beiden Enden auskrystallisirten Prismen, $\infty\bar{P}2 . \infty\breve{P}\infty . \breve{P}\infty . \bar{P}\infty$, die Krystalle an den Enden gelblich gefärbt, sonst farblos und durchsichtig von Przibram in Böhmen.

Krystalle aus Auvergne, $\infty\breve{P}2 . \bar{P}\infty . \infty\breve{P}\infty$, z. Thl. über 5 Ctm. gross, graulich.

Mehrere Drusen, ${}_0P . \infty\breve{P}\infty . \bar{P}\infty . \infty\breve{P}2$, auch mit $\infty\bar{P}\infty$ von Iberg am Harz.

Einzeln und gruppenweise aufgewachsene Krystalle, $\infty\bar{P}\infty . \infty\breve{P}\infty$.

$\breve{P}\infty$. $2\breve{P}\infty$, in mehreren Stufen aus der Tschouwaskaja-Steppe im Bergdistrict Zlatoust (Orenburg) im Ural.

Plattenförmiges Spaltungsstück (10 Ctm. lang und breit), gelblich, mit einer dichroitischen Schichte, durch $\infty\breve{P}\infty$ gelblich und sehr blass bläulich, durch $\bar{P}\infty$ saphirblau. Vom Stahlberg im Zweibrück'schen.

Von Cölestin beträgt die Zahl der Stufen aus Sicilien gegen 80. Darunter sind mehrere grosse Schaustücke. Die meisten dieser Cölestine stammen aus der Ringseis'schen, in die Herzogl. Leuchtenberg'sche übergegangenen Sammlung. Darunter ausgezeichnet schöne Drusen $\breve{P}\infty$. $\bar{P}\infty$. $\infty P2$. $\infty\breve{P}\infty$. Drusen tafelförmiger Krystalle. $\infty\breve{P}\infty$. $\bar{P}\infty$. $\infty P2$ und $\bar{P}\infty$. $\infty\breve{P}2$. $\breve{P}3$.

Lichtblaue Krystalle einzeln und in Gruppen, $\breve{P}\infty$. $\bar{P}\infty$. $\infty\breve{P}\infty$. $\infty\breve{P}2$. P. von Herrengrund in Ungarn.

Von Gyps zeichnet sich eine Druse aus Sizilien besonders sowohl durch die Grösse und Klarheit ihrer Krystalle aus, als durch ihre Combination und Zwillingsbildung. Die Krystalle sind — P . ∞P . $\frac{1}{3}\breve{P}\infty$, die Drehfläche der Hemitropieen — $\breve{P}\infty$. Die Krystalle sind 6 Ctm. lang; $3\frac{1}{2}$ breit und 1 Ctm. dick und vollkommen farblos und durchsichtig. Diese Stufe, eine der schönsten der Sammlung stammt aus der Herzogl. Leuchtenberg'schen Sammlung. Ebenfalls von daher sind Drusen vorhanden von z. Thl. zollgrossen Krystallen ∞P . $\infty\breve{P}\infty$, an den Enden mit rauhen gewölbten Flächen, die Seitenflächen nach der Axe gestreift und cannelirt. Andere Drusen zeigen Zwillinge von $\infty\breve{P}\infty$. ∞P . —P, die Individuen (wie beim Orthoklas von Carlsbad) um 180^0 gegen einander gedreht und mit $\infty\breve{P}\infty$ verwachsen.

Es sind ferner hervorzuheben:

Einzelne ringsum ausgebildete Krystalle $5\frac{1}{2}$ Ctm. lang $3\frac{1}{2}$ breit und $2\frac{1}{2}$ dick, ∞P . $\infty\breve{P}\infty$ auch — P an den Enden mit gewölbten Flächen, klar und farblos, von Oxford. Ebendaher eine schildförmige Linse, 8 Ctm. lang, $6\frac{1}{2}$ breit und 2 Ctm. in der grössten Dicke, zum Theil durchsichtig.

Die Berchtesgadner Gypse sind ∞P . $\infty\breve{P}\infty$. P . —P in sehr schönen Drusen vorhanden, zahlreich auch die Pariser Vorkommnisse und die wasser-

hellen prismatischen Krystalle, z. Th. wellenförmig gebogen, von Reinhardsbrunn in Sachsen-Coburg, darunter einzelne von 20 — 25 Ctm. Länge und 1 — 5 Ctm. Dicke. Ein grosses Schaustück solcher verwachsener Krystalle.

Unter den Phosphaten findet sich von Apatit eine Reihe schöner Drusen und loser Krystalle.

Druse lichtvioletter Krystalle, $\infty P . \infty P 2 . 0 P$, von Ehrenfriedersdorf in Sachsen.

Grosse lose Krystalle v. 4 — 5 Ctm. $\infty P . 0 P . P . 2 P . \frac{3 P 3/2}{2} . 2 P 2$, nach $0 P$ tafelförmig, z. Thl. klar und durchsichtig, vom Schwarzenstein im Zillerthal.

Einzeln aufgewachsene wasserhelle Krystalle, $0 P . \infty P . P . 1/2 P . 2 P . 2 P 2 . \frac{3 P 3/2}{2} . \frac{4 P 4/3}{2}$ aus der Gegend des Hospitiums am St. Gotthard. Aehnliche Krystalle, einzeln und in Gruppen mit Pistazit von Untersulzbach in Pinzgau.

Grosser Krystall, 8 Cmt. hoch, 7 dick, ∞P, die Enden abgerundet, wie geflossen, blaugrün, vom Flusse Studjanka am Baikalsee.

Farblose Krystalle, $\infty P . 0 P$ auf trapezoedrischen rothbraunem Granat aus den Smaragdgruben des Urals. Verschiedene Varietäten von Zlatoust, Achmatowsk, Laurence in Neu-York, Spanien etc.

Quarz.

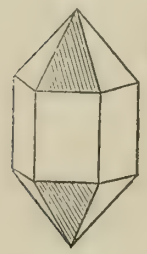
Von Quarz in Krystallen sind gegen 600 Exemplare vorhanden und dabei mehrere grosse Schaustücke. Unter diesen ein grossentheils klarer Krystall $\infty P . P$., gegen $2 1/2$ Fuss lang und $1 — 1 1/2$ Fuss dick, an der Pyramide sind zwei Flächen besonders stark ausgedehnt, die eine gegen $1 1/2$ Fuss lang. Der Fundort ist Rauris im Salzburg'schen. Grosse Drusen mit klaren bis 4 Zoll langen Prismen aus der Dauphiné sind mehrere vorhanden, andere aus der Schweiz etc.

Unter den einzelnen Quarzkrystallen zeichnet sich durch vollkommene Ausbildung und Gleichgewicht der Flächen ein 5 Ctm. langes, 3 Ctm. dickes Individium von Alabaschka im Ural aus. Der Krystall ist grösstentheils wasserhell.

Wasserhelle Säulen, $\infty P . P$ an einem Ende abgebrochen, aus der

Schweiz sind mehrere von ansehnlicher Grösse vorhanden, von 20 — 23 Ctm. Länge und 6 — 10 Ctm. dick (alle mit stumpfpyramidalen Eindrücken auf den Prismenflächen). Eine ähnliche Säule, 22 Ctm. lang, 5 dick, $\infty P . P$ mit $^7/_2 P$.

Spitzpyramidale Gruppen, bis 14 Ctm. lang und in der Mitte 3 Ctm. dick mit bauchigen Flächen, an den Enden R, durchscheinend, graulich weiss, aus der Schweiz.


5

Ein kleiner Krystall $\infty P . P$; die abwechselnden P-flächen gestreift, fast parallel den Scheitelkanten und fallen die gestreiften Flächen der oberen und unteren Pyramide aufeinander, daher der Krystall eine Hemitropie nach $_0 P$. Fig. 5. Von unbekanntem Fundort.

Krystalle mit Einschlüssen von Rutil, Chlorit, Gold, Antimonit, Hämatit, sog. Wassertropfen etc. Prisma-Krystalle, farblos und durchsichtig im Innern mit Lagen von chloritähnlichen Schuppen, welche den P-flächen parallel laufen, aus der Dauphiné.

Sogenannte gestielte Krystalle von Schemnitz, Villaricca und vom Schwarzenstein im Zillerthal, an letzteren die Krystalle an beiden Enden des Stieles aufgesetzt. An beiden Enden ausgebildete Krystalle, 6 Ctm. lang, gegen 3 Ctm. dick, $^7/_2 R . P . \infty P$; die Flächen von $^7/_2 R$ vorherrschend, farblos, klar, von Pfitsch in Tyrol.

Krystalle, $R . - ^1/_2 R . \infty P$, letztere Flächen bauchig, von Elba, an einigen die Enden wie geflossen abgerundet.

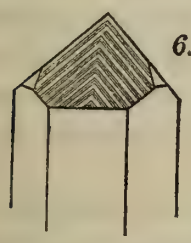
Gruppe zu einer Platte verwachsener Prismen (gegen 10 Ctm. lang, $7^1/_2$ breit, $2^1/_2$ dick) $\infty P . P . {}_6 P {}^6/_5$, vollkommen durchsichtig und von nelkenbrauner Farbe, aus der Schweiz. Eine ähnliche blass bräunlich gefärbte Gruppe klarer Krystalle aus dem Kreuzli-Stock am St. Gotthard.

Lose, klare nelkenbraune Krystalle, $\infty P . P . {}_6 P {}^6/_5 . {}_4 P$, auch mit $_4 P {}^4/_3$, die Trapezflächen nach rechts oder nach links zum Prisma geneigt; an einem Krystall kommt zu den nach rechts geneigten Flächen auch eine sehr kleine nach links geneigt vor. Von Rosenlaui in der Schweiz.

Grosse schwarze Krystalle $\infty P . P$. (bis 15 Ctm. lang und 8 — 10 Ctm. dick) vom Tiefengletscher in der Schweiz. Aggregate parallel verwach-

sener lichtbräunlicher Krystalle, die Prismenflächen und $_6P^6/_5$ ausgedehnt und convex-concav gewunden auf dem entgegengesetzten Seiten, vom Blankenstock auf der Göschener-Alpe im Kanton Uri.

Unter den Amethysten sind die Vorkommnisse in Achatmandeln aus der Rheinpfalz in vielen Exemplaren vertreten. Ein Schaustück dieser Art von Oberstein mit $^1/_2$ zollgrossen Krystallen misst über 44 Ctm. Länge und 25 Ctm. Höhe, das grösste bekannte Stück dieses Fundorts. Durch schöne violette Farbe zeichnen sich die Amethyste von Mursinsk und Katharinenburg aus (gegenwärtig ausgebeutet), einige nur theilweise violett gefärbte Krystalle von daher, mit eigenthümlicher Schichtenbildung der Pyramiden sind ganz ähnlich von Schwarzenstein im Zillerthal vorhanden. — Schöne Stufen von Schemnitz in Ungarn, darunter ein grosses Stück mit zerstreut aufgewachsenen Gruppen blass röthlich violetter Krystalle auf einer weissen Quarzdruse (Geschenk der Kaiserin Mutter von Oesterreich); Krystalle mit der



6.

eigenthümlichen Streifung (Fig. 6.) auf der Hälfte der Pyramidenflächen, die andere in kleinen Flächen glatt, von Rio Pardo (Bahia) in Brasilien. —

Die Varietäten des krystallinischen und dichten Quarzes und des gemengten, sind sehr zahlreich; schöne Holzsteine in geschliffenen Platten, ägyptischer Jaspis, siberischer Bandjaspis, ein schönes sog. Katzenauge mit goldgelbem Schiller vom Cap etc.

Von Chalcedon sind mehrere nierförmige und langgetraufte Bildungen in ziemlich grossen Stücken von Faröe zu nennen; der smalteblaue sog. würflige Chalcedon aus Siebenbürgen, die Pseudomorphosen nach Calcit, Gyps, Galenit etc. — die Achate. Letztere, welche geschliffen in ihren mannigfaltigen Farbenzeichnungen schön anzusehen, waren früher ein Lieblingsgegenstand der Sammler und Werners Unterscheidung von Bandachat, Trümmerachat, Fortificationsachat, Moosachat, Sternachat etc. trug dazu bei. Die Sammlung enthält die mannigfaltigsten Steine dieser Art und einige fussgrosse Platten aus dem Zweibrück'schen, die Var. Carneol, Chrysopras, Onyx etc. —

Unter den Opalen sind vorzüglich schöne Stufen des farben-

spielenden Opals von Czerwenitza, schöne Halb- und Holzopale, ein ausgezeichneter Feueropal von Zimapan in Mexiko.

In der Gruppe der Granaten sind sämmtliche Species: Almandin, Grossular, Allochroit, Spessartin und Uwarowit in zahlreichen Varietäten vertreten.

Von Almandin sind zu bezeichnen grosse Krystalle (6—9 Ctm.) aus Norwegen, Schweden, Kärnthen, Tyrol etc. Darunter ein Zwilling zweier ∞O mit gemeinschaftlicher trigonaler Axe und um 60^0 gegen einander gedreht, aus dem Zillerthal.

Lose dunkelcolombinrothe Krystalle $2O2 . \infty O$ von der Mündung des Flusses Stachin in Nord-Columbien. Dergl. von den Aleuten-Inseln.

Mehrere schöne Drusen $2O2 . \infty O$, z. Thl. mit Ripidolith von der Achmatowsky-Grube im Ural.

Die grünen Grossulare vom Wilvi-Fluss in Siberien sind in schönen Krystallen $\infty O . 2O2$ vorhanden; die hyazinthfarbenen Varietäten von der Mussaalpe in Piemont, in ausgezeichneten Drusen, eine Druse kleiner Krystalle O, z. Thl. mit ∞O von San Piedro auf Elba; eine Druse braunschwarzer Krystalle $\infty O . 2O2$ in Liparit eingewachsen von Veldenz in der Rheinpfalz.

Von Allochroit ist zu nennen: eine Druse ziemlich grosser Krystalle, $\infty O . 2O2 . 3O3/2$ von Arendal in Norwegen und Drusen bräunlichgelber Krystalle $2O2 . \infty O$ von der Achmatowsky-Grube im Ural; die Melanite von Frascati etc.

Von vorzüglicher Schönheit sind die Drusen der smaragdgrünen Uwarowite von Bissersk im Ural.

Unter den Krystallen von Vesuvian sind die vom Wilvi-Fluss in Siberien hervorzuheben. Sie sind $\infty P . \infty P\infty . P . 0P$ z. Thl. zollgross, lose und eingewachsen in das räthselhafte Mineral, welches Achtarandit genannt worden ist und von welchem auch deutliche Krystalle $\frac{2O2}{2}$ vorkommen.

Aehnliche, z. Thl. vollkommen ausgebildete Krystalle des Vesuvians stammen aus Norwegen und in schönen Drusen von Achmatowsk.

Eine eigenthümliche Varietät bilden hellgelbe Krystalle $\infty P . P$ von Montzoni im Fassathal.

Vom Vesuv sind Drusen von P mit sehr untergeordneten

$\infty P.\infty P\infty.\infty P2.0P.$ vorhanden. Kleine lose Krystalle mit zahlreichen Combinationen $\infty P.P.3P3$ etc. von den Kumaschinsker-Bergen im Ural.

Pistazit.

Die neuerlich entdeckten Vorkommnisse von Untersulzbach im Salzburg'schen sind in Drusen, Gruppen und einzelnen Krystallen reichlich vorhanden. $\infty\breve{P}\infty.-P\infty.\breve{P}\infty.-P$ etc. und Hemitropieen nach $\infty\breve{P}\infty$. Ihre Begleitung sind wasserhelle Apatitkrystalle, Periklin und Asbest. Die Krystalle, z. Thl. vollkommen durchsichtig, dichroitisch, braungelb und grün, einige über 7 Ctm. lang.

Schöne Drusen von Arendal, Achmatowsk, Zöptau in Mähren, Floss in der Oberpfalz etc.

Von Wernerit sind über zollgrosse Krystalle, $\infty P.\infty P\infty.P.$ von Hewisalo in Finnland bemerkenswerth, von Cordierit die Vorkommnisse von Bodenmais im bayer. Wald in ausgezeichneten Krystallen, $\infty P.\infty\breve{P}\infty.0P.\breve{P}\infty$ etc.

Die Species Orthoklas ist reich vertreten. Ein loser Krystall, Hemitropie nach dem Bavenoer Gesetz, von Fischbach in Schlesien misst 7 Ctm. in der Länge und 5 Ctm. in der Dicke. Eine Reihe grosser wohlgebildeter Krystalle stammt von Mursinsk im Ural, darunter einer 9 Ctm. lang und 6 Ctm. dick, mit $\infty P.\breve{P}\infty.0P.\infty\breve{P}\infty.2\breve{P}\infty$ mit schwärzlichen Quarzkrystallen. Aehnliche Krystalle und Drusen z. Thl. Hemitropieen nach $0P.$ von Baveno.

Grosse Krystalle vom St. Gotthard, vom Schwarzenstein im Zillerthal, von Elba.

Die spangrünen Orthoklase (Amazonenstein) aus den Topasgruben des Ural, $\infty P.0P.\breve{P}\infty.P.\infty\breve{P}\infty.\infty\breve{P}3.$ sind in 7—9 Ctm. grossen Krystallen vorhanden, einzelne von sehr regelmässiger Ausbildung.

Vom Periklin von Pfitschthal in Tyrol ausgezeichnet schöne Drusen, $0P.,\bar{P},\infty.\infty'P.\infty P'.\infty\breve{P}\infty$ u. a. die Drusen haben z. Thl. einen Fuss im Durchmesser, die Krystalle zollgross. Sie kommen von solcher Schönheit nicht mehr vor. — Viele geschliffene Stücke des farbenschillernden Labrador von Labrador und aus Finnland. —

Biotite und Muskovite sind von sehr mannigfaltigen Fundorten

vorhanden und die Var. vom Ural z. Thl. in Platten bis 45 Ctm. lang und 25 Ctm. breit.

Von Zlatoust im Ural finden sich grosse Krystalle von Muskovit, $P.2P.2\breve{P}\infty . \infty\breve{P}\infty .0P.$ z. Thl. in Orthoklas eingewachsen.

Die Species Staurolith zeigt u. a. einen sternförmigen Drillingskrystall die Individuen unter 60° sich kreuzend, auf Gliemerschiefer von Zlatoust.

Von Diopsid sind schöne Krystalle, theils lose, theils in Drusen von der Mussaalpe in Piemont vorhanden und dergleichen $\infty P.\infty\breve{P}\infty .$ $\infty\breve{P}\infty .P.0P.\infty\breve{P}3$ mit hyazinthrothem Grossular und Ripidolith von Achmatowsk, die Krystalle von Schwarzenstein im Zillerthal u. a. Aehnliche Vertretung haben die Augite. —

Smaragd. Ausser dem oben schon erwähnten Prachtstück (als Schaustück besonders aufgestellt) sind die russischen Smaragde und Berille in zahlreichen Stufen und losen Krystallen vertreten. Bei den Smaragden ist auch ein schöner grüner Krystall (von 1 Ctm.) aus Peru zu erwähnen. Er ist $\infty P.0P.P.2P.2P2.\infty P2.$ — Ein schönes smaragdgrünes Prisma in Glimmerschiefer vom Habachthal in Salzburg.

Ausgezeichnet sind unter den Berill genannten Varietäten: Ein vollkommen klarer gelblich gefärbter Krystall; 6 Ctm. lang und 2 Ctm. dick mit sehr glatten Flächen, $\infty P.P.2P2.\infty P2.$ Von Mursinsk im Ural. —

Ein bläulicher, z. Thl. durchsichtiger Krystall, 3 Ctm. lang, 2 Ctm. dick, $2P2$ (ausgebildet). $\infty P.0P.P.$ Von der Urulga im Gebiete von Nertschinsk.

Ein sehr blassröthlicher halbdurchsichtiger Krystall ($1\frac{1}{2}$ Ctm. lang, $3\frac{1}{2}$ Ctm. dick) $\infty P.0P.2P2.P$ mit schönen Flächen aus Brasilien.

Dergl. Krystalle, bläulich, durchsichtig, die Flächen sehr vollkommen ausgebildet (bis 4 Ctm. lang, $\frac{1}{2}$ Ctm. dick) von Adun-Tschilon in Ostsiberien.

Die blauen Berille vom Rathhausberg bei Gastein, die Vorkommnisse von Zwiesel im bayer. Wald, von Limoges, Grafton N. A. etc.

Von dem seltenen, in hohem Preise stehenden, Phenakit aus den Smaragdgruben des Ural, sind grosse Krystalle vorhanden, unter andern einer 10 Ctm. lang, 7 — $8\frac{1}{2}$ Ctm. dick und einer 7 Ctm. lang und

9 Ctm. dick, R. ∞P_2, auch ∞P. Zwei wasserhelle in Brillantform geschliffene Stücke (bis 2 Ctm. Grösse).

Zirkon. Ausgezeichnete, theils lose, theils in Granit eingewachsene Krystalle, $\infty P\infty . P . {}_2P . \infty P$. vom Ilmengebirg im Ural; z. Thl. grosse Stücke. — Weisse und bräunliche Krystalle $P . \infty P . \infty P\infty$; $\infty P . P . {}_3P_3$. Von Pfitsch in Tyrol etc.

Die Hydrosilicate sind in allen Species mit vorzüglichen Exemplaren und von zahlreichen Fundorten vertreten, Natrolith, Skolezit, Mesolith, Okenit etc., Prehnit, Analcim in grossen Trapezoedern aus Fassa, Chabasit, Harmotom, Dasmine und Stilbite etc. Es sei von andern hier erwähnt:

Kämmererit. Eine schöne Druse kleiner carmoisinrother Krystalle $\infty P . {}_0P$. auf Ekatarinenburg im Ural.

Leuchtenbergit. Mehrere Gruppen tafelförmiger Krystalle von Slatoust im Ural; Ripidolithe von daher.

Apophyllit.

Druse zollgrosser durchscheinender Krystalle $\infty P\infty . {}_0P . P$, weiss, von Poonah in Ostindien; dergleichen, zerstreut auf Mandelstein aufgewachsen, die Mitte grünlich, die Enden farblos, ebendaher.

Schöne Druse von $\infty P . {}_0P$, graulich weiss, von Bergen-Hill in New-Yersey.

Eine Reihe schöner Drusen mit rosenrothen und farblosen Krystallen $P . \infty P\infty$, von Andreasberg am Harz, andere aus dem Fassathal, von den Faroërn etc. —

Von besonderer Schönheit sind die russischen Topase aus der Herzogl. Leuchtenberg'schen Sammlung, 60 Stücke. Es seien hier nur einige hervorgehoben:

Ein bläulicher Krystall von 9 Ctm. Länge und 6 — 7 Ctm. dick; $\infty P . \infty \breve{P}_2 . {}^1/_3 P . \bar{P}\infty . {}_2\breve{P}\infty$.

Farblose, wasserhelle Krystalle von 4 Ctm. Grösse, $\infty P . \infty \breve{P}_2 . P . {}^1/_2 P . {}^1/_3 P . \breve{P}\infty . {}_2\breve{P}\infty . {}^2/_3 \breve{P}\infty . \bar{P}\infty$, auch mit $\infty \bar{P}_2$ vom Berge Ouroulungoui bei Nertschinsk im Ural.

Ein ähnlicher Krystall auf grauem Quarz mit grünem Orthoklas von Slatoust.

Ein bläulicher Krystall, $3\frac{1}{2}$ Ctm. lang, 4 Ctm. dick, $\infty P . \infty P 2 . {}_0P . \frac{1}{3}P . \frac{1}{2}P . 2\breve{P}\infty . \breve{P}\infty$ von Mursinsk.

Schöne Drusen von Schneckenstein im Voigtland; Krystalle aus Brasilien in Bergkrystall eingewachsen etc. —

Unter den Datolithen sind schöne flächenreiche Krystalle mit klinohombischem Habitus auf Quarz, von Teiss in Tyrol hervorzuheben. — Axinit in schönen Drusen aus der Dauphiné und vom St. Gotthard.

Reich vertreten sind die Turmaline. Darunter ein Prachtstück von Rubellit mit einem Krystall ${}_0R . \infty P 2 . \frac{\infty R}{2}$ (3 Ctm. lang und dick) von carmoisinrother Farbe, halbdurchsichtig, mit grossen Orthoklaskrystallen, Quarz und Lithionit, von Mursinsk in Siberien. Mehrere ähnliche lose Krystalle von daher.

Ein Aggregat stänglicher Rubellitkrystalle, 16 Ctm. lang, 10 Ctm. dick, an dem einen Ende in vielen Individuen die Flächen $R . {}_0R$, an dem andern ${}_0R$ zeigend. Auf den prismatischen Flächen roth, z. Thl. rosenroth, an den Enden mit $R . {}_0R$. braun, mit ${}_0R$ grau. Das Stück stammt von der chinesischen Gränze, wiegt über 5 Pfd. und ist in Russland auf 3000 Silberrubel geschätzt worden. Diese Rubellite, sowie überhaupt die russischen Turmaline stammen aus der Herzogl. Leuchtenberg'schen Sammlung.

Aggregat parallel verwachsener prismatischer Krystalle $\infty P 2 . R . \frac{\infty R}{2}$, sammtschwarz, aus Grönland. Das Stück ist 12 Ctm. lang und 9 Ctm. dick. Geschenk des Dr. Chr. v. Barth v. Kalw in Würtemberg.

Ein cylindrisches Prisma mit R, 7 Ctm. lang, 2 Ctm. dick, schwarz, in einen bräunlichgrauen Quarzkrystall eingewachsen, von Aduntschilon im Ural.

Ein schöner cylindrischer Krystall mit $R . {}_0R . — \frac{1}{2}R$. schwarz, auf Granit vom Hörlberg bei Bodenmais im bayer. Wald. Mehrere dergl. lose. —

Die gelbbraunen Krystalle $\infty P 2 . R$. von Prevali in Kärnthen, theils lose, theils eingewachsen, die grünen von Campo longe, die rosenrothen und zweifarbigen von Elba, Chesterfield etc. sind mit mehreren Exemplaren vertreten.

Hervorzuheben ist ferner ein zollgrosser zimmetbrauner Krystall mit schönen Flächen von R. — ½R. — 2R. R5. ∞R. $\frac{-\infty P}{2}$ vom Gouverneur in Neu-York. Mehrere ähnliche, z. Thl. mit dominirendem R5 ebendaher. — Schöne z. Thl. geschliffene Lasursteine. —

Unter der Species Korund finden sich mehrere geschliffene Saphire und Rubine: zwei klare dunkel kornblumenblau gefärbte Ringsteine von 5½ und 8½ Karat, ein vollkommen reiner bläulich weisser Ringstein von 11⅚ Karat, polirte Geschiebe etc. Ein tafelförmiger dreieckiger Ringstein ist besonders bemerkenswerth. Der innere Theil, ein scharf begränztes gleichseitiges Dreieck ist vollkommen klar durchsichtig und von sehr blass bläulicher Farbe, der Rand ist undurchsichtig, braun und fast kupferroth schimmernd. Fig. 7. (Doppelte Grösse.) Die breiten Flächen sind parallel 0R geschliffen, daher im Polarisationsmikroskop das Farbenbild mit dem schwarzen Kreuz vollkommen erscheint; auch ist leicht zu erweisen, dass der Krystall negativ ist. Die schillernde äussere Schichte ist offenbar um den klaren Kern krystallisirt. Die braunen undurchsichtigen Krystalle vom Ural zeigen auf der basischen Flächen oft ähnlichen Schiller, wahrscheinlich von Einmengungen herrührend wie beim Avanturinfeldspath und andern. Von diesen braunen Ural'schen Korunden sind grosse Krystalle ∞P. 0P vorhanden und wiegt einer derselben über 2 Pfd. —

7.

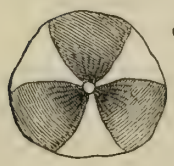
Für die Species Spinell sind u. a. zu nennen: ein polirtes durchsichtiges Geschiebe von carmoisinrother Farbe von 15½ Grm. aus Ceylon und zwei sehr reine rosenrothe Ringsteine jeder von 2½ Karat.

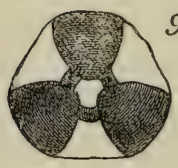
Von Pleonast zollgrosse Krystalle, O. 2O2; O, von Warwick und Monroe in New-York. Chlorospinelle in schönen Exemplaren von Koussinsk im Ural.

Chrysoberill in ausgezeichneten 5—6 Ctm. grossen Drillingskrystallen, aus den Smaragdgruben des Ural etc.

Der Diamant ist in 40 z. Thl. sehr gut ausgebildeten Krystallen representirt, O; O. ∞O; mOn mit gewölbten Flächen. Diese Krystalle sind von Spix und Martius von ihrer brasilianischen Reise mitgebracht

worden. Von geschliffenen Steinen ist ein schöner etwas gelblich gefärbter Brillant von $2^3/_8$ Karat zu nennen, mehrere kleine Rosetten und Tafelsteine. Ein seltenes Exemplar ist ein Diamant mit Kleeblatt. Es ist ein farbloses rundliches Blättchen mit eingestreuten schwärzlichen Punkten, welche die Form eines Kleeblattes bilden, ähnlich Fig. 8. Descloizeaux beschreibt zwei dergleichen Diamanten, welche Herr Halphen der Mineraliensammlung des Jardin du Roi geschenkt mit der Zeichnung wie Fig. 9. Sie stammen aus Indien und waren die ersten in Europa, an welchen die seltsame Zeichnung wahrgenommen worden ist. (Poggendorffs Annal. 1846 9. p. 447). Unser Kleeblattdiamant stammt aus der Herzogl. Leuchtenberg'schen Sammlung. —


8.


9.

Graphit. Es ist hervorzuheben die in der Londoner-Industrie-Ausstellung von 1862 aufgestellte sog. Trophäe des von d'Alibert in Siberien aufgefundenen höchst feinen Graphits, ein Stück von 50 Ctm. Länge und gegen 17 Ctm. breit (9 Kilo.), und ähnliche andere. Von König Maximilian II. der Sammlung geschenkt. —

Von Schwefel besitzt die Sammlung eine Reihe ausgezeichneter Stufen aus Sicilien, ursprünglich aus der v. Ringseis'schen Sammlung stammend, theils lose Krystalle, theils Drusen, P.; P.$^1/_3$P.; P.∞P; P.$\breve{P}\infty$.$^1/_3$P.$_0$P, auch mit $\infty\breve{P}\infty$.$\infty\bar{P}\infty$, $\bar{P}\infty$ und reiche Drusen hemitropischer Krystalle an der Comb. P.$^1/_3$P. mit der Drehfläche ∞P. — Grosse Schaustücke mit Cölestin, Calcit etc. Sublimate. —

Die Reihe der metallischen Mineralien beginnt mit den Arsenik-, Antimon- und Tellurerzen. Sämmtliche Species sind gut representirt, gediegen Tellur, Sylvanit und Nagyagit in reichen Stufen.

Die Niobsauren Verbindungen, Niobit, Dianit, Samarskit, Fergusonit, Euxenit, Aeschinit sind in guten z. Thl. vorzüglichen Exemplaren vorhanden, vom Niobit von Rabenstein im b. Wald unter andern plattenförmige Zwillingskrystalle v. 4—5 Ctm.

Grosse Rutilkrystalle, aus den Smaragdgruben von Katharinenburg, von Lancaster in Pensylvanien, Pfunders in Tyrol etc.; von Anatas schöne, mehrere Linien grosse Krystalle, P.$_0$P, auf Quarz,

von Minas Geraës in Brasilien (von Herzog August von Leuchtenberg mitgebracht).

Von Perowskit $1^1/_4$'' grosse Würfel von der Achmatowskischen Grube bei Miask; mehrere Exemplare mit aufgewachsenen Krystallen.

Sphen. Die Vorkommnisse aus Tyrol und vom Ural, lose Zwillinge vom Schwarzenstein im Zillerthal $4P4 . \infty P3 . \infty P . 0P . {}^1/_2P\infty$ mit der Zusammensetzungsfläche $0P$., durchsichtige bis zollgrosse tafelförmige Krystalle von daher etc.

Gold gediegen. Lose z. Thl. sehr schöne Krystalle, $O . \infty O$ und $\infty O\infty$ in Combinationen dieser Formen, aus den Beresow'schen Gruben im Ural und von Matto grosso in Brasilien. Derbe Stücke ebendaher (von 270,4 und 97,4 Gramm); Blättergold aus Siebenbürgen, Ungarn und Brasilien. Die Zahl der Stufen von gediegenem Gold beträgt 102.

Newjanskit vom Ural. Körner und Blättchen.

Platin gediegen. Geschiebe von Nischne-Tagilsk im Ural. Die grösseren (7 Stücke) wiegen zusammen 7 Kilo, darunter ein Stück von 757 Gramm, Geschenk der Grafen Paul und Anatol Demidoff an den König Ludwig I. im J. 1831; das oben schon erwähnte Geschiebe von 3,4 Kilo aus der Herzogl. Leuchtenberg'schen Sammlung (wurde vom Herzog für 1430 fl. angekauft) und ebendaher ein Stück von 796 Gramm, mit Chromit durchwachsen (seltenes Vorkommen, wurde für 355 fl. angekauft).

Silber gediegen. Es sind 81 Stufen vorhanden und besonders ausgezeichnet die Vorkommnisse von Kongsberg in Norwegen. Darunter eine schöne Stufe mit parallelflächig verwachsenen scharfkantigen Würfeln. Zwei geweihartig verbundene Zinken gegen 20 Ctm. und 35 Ctm. lang und andere ähnliche.

Ein 1,6 Kilo schweres Stück, in Drähten und derb aus Mexiko (100 Thaler an Werth).

Eine derbe Masse mit Chlorsilber 5,23 Kilo schwer, aus Peru. (Von Freiherrn von Karwinski mitgebracht und von König Ludwig I. der Sammlung geschenkt.) Reiche Vorkommnisse aus Sachsen, aus dem Fürstenberg'schen etc.

Pseudomorphe Krystalle, ∞O, nach Amalgam und mit solchem vorkommend von Landsberg in der Rheinpfalz.

Argentit. Sehr reiche Stufen, z. Thl. in gut ausgebildeten Krystallen, O; O.∞O∞ ; ∞O∞ .∞O. von Freiberg in Sachsen, Johanngeorgenstadt, Joachimsthal etc.

Die Species Stephanit, Proustit, Pyrargyrit in reichen Stufen von Markirch, Freiberg, aus Ungarn, Böhmen, vom Harz etc.

Ein grosses ausgezeichnetes Stück Myargyrit von Bräunsdorf in Sachsen. — Polybasit, Freieslebenit. —

Amalgam von Landsberg in der Rheinpfalz. Mehrere Stufen mit ausgezeichneten Krystallen, ∞O; ∞O.2O2.0O. (Aus der Herzogl. Leuchtenberg'schen Sammlung, angekauft für 25, 75, 90 Gulden.)

Reiche Stücke von Diskrasit aus dem Fürstenberg'schen und von Tellursilber, Hessit, aus der Samodinsky'schen Grube am Altai. — Kerargyr aus Chile und Peru.

Unter den Quecksilbererzen sind hervorzuheben die schönen carminrothen fasrigen Aggregate von Zinnober von Wolfstein in der Rheinpfalz, dergl. krystallisirt aus Idria und Almaden; Kalomel in Krystallen; ferner Tiemannit (Selenquecksilber) von Clausthal am Harz.

Kupfer gediegen. Die Vorkommnisse des Lac superior in N. Am. und sehr schöne Stufen von Bogoslowsk im Ural, aus dem Bannat, Cornwallis, Rheinbreitenbach am Rhein etc. (100 Stufen).

Cuprit. Schöne durchscheinende Krystalle, O.2O2, von Nischne-Tagilsk; ∞O∞ .∞O von Poleffsky in Siberien; O, grosse Stufe von 31 Kilo aus der Gumeschewsky-Grube im Ural; eine Reihe loser, mit Malachit überzogener Krystalle, O, O.∞O, von Chessy in Frankreich; die haarförmigen Varietäten von Rheinbreitenbach und Nischne-Tagilsk. Derbe Massen verschiedener Fundorte. (65 Stufen).

Malachit. Mehrere Stufen, z. Thl. deutliche Krystalle, ∞P.0P.∞P∞, zeigend und blättrige Aggregate von Rheinbreitenbach. Kleinkrystallinische Massen von Nischne-Tagilsk (fand sich in der Leuchtenberg'schen Sammlung als Brochantit bestimmt).

Zahlreiche ausgezeichnete Stücke, fasrig und dicht, vom Ural, aus Tyrol, Südaustralien etc. Schöne geschliffene Platten von Katharinenburg in Siberien (24 Ctm. lang, 11 Ctm. breit und kleinere). Die Zahl der Stufen beträgt 128.

Von Azurit (Kupferlasur) sind die schönen Drusen ∞P.0P.—P.½P∞

von Chessy bei Lyon in mehreren Stufen vorhanden und sehr ähnliche von hoch lasurblauer Farbe aus Südaustralien, aus dem Bannat, von Bulach im Würtemberg etc. (im Ganzen 85 Stufen).

Von anderen Kupferoxydverbindungen sind in schönen Exemplaren vertreten: Brochantit, sammtähnlich von Nischne-Tagilsk, Libethenit von Libethen in Ungarn und vom Ural, Euchroit, Tyrolit, Olivenit, Lirokonit etc. und in prächtigen Drusen der Dioptas aus der Kirgisensteppe. Atakamit krystallinisch, ein grosses Stück aus Chile.

Chalkosin. Eine Druse von St. Just in Cornwallis, $_0$P. $^1/_3$P. $^2/_3\breve{P}\infty$. ∞P. $\infty\breve{P}\infty$., Stufen von Bristol Mine in Connecticut, vom Ural, etc.; der Chalkopyrit zählt 120 Exemplare.

Die Gruppe der Fahlerze, Tennantit, Tetraedrit, Polytelit, Spaniolith und Kaulsdorfit (kobalthaltiges Fahlerz) zählt 77 Nummern, darunter die alten Vorkommnisse von Kogel bei Schwatz z. Thl. in grossen Krystallen, $\infty O.\frac{O}{2}$; $\infty O.\frac{O}{2}.\frac{_2O_2}{2}$, ähnliche aus Sachsen, Ungarn, Siebenbürgen, Cornwallis etc. An einer Druse von Tetraedrit, $\frac{O}{2}.\frac{_2O_2}{2}$, sind die Krystalle mit Chalkopyrit überzogen, welcher prachtvolle Anlauffarben zeigt. Es ist ein Prachtstück von Liskard in Cornwallis.

Die Drusen und losen z. Thl. grossen Zwillingskrystalle von Kassiterit zählen 75 Nummern. Darunter ausgezeichnete Stücke von Zinnwald in Böhmen. Bemerkenswerth ist eine Druse der Comb. $_{12}$P. ∞P $^3/_2$. Die Flächen der sehr seltenen $_{12}$P sind etwas gekrümmt. Die Druse stammt aus Cornwallis. (Vergl. Greg und Lettsom „Manual of the Mineralogy of Great Britain and Ireland.“ p. 355.) — Bemerkenswerth ist ein kleiner Krystall von gediegen Zinn aus den Steppen des Ural. Er ist ringsum ausgebildet, eine Quadratpyramide von 140° 26′ Schtlktw. —

Unter den Bleioxydverbindungen sind die Cerussite mit 106 Nummern vertreten und zeichnen sich lose Zwillingskrystalle und Drusen von Mies in Böhmen aus. P.$_2\breve{P}\infty$; $\infty\breve{P}\infty$.P. ∞P. $\infty\breve{P}_3$ etc., grosse durchsichtige Krystalle von Nertschinsk, vom Altai etc.

Von Anglesit Krystalle, von Phönixville in Pennsylvanien, von Monte Poni, Anglesea etc.

Linarit, aus Cumberland und aus der Vanadinskischen Grube im Nertschinskischen. —

Die Pyromorphite zählen 80 Nummern und sind in schönen Drusen vertreten die Vorkommnisse von Przibam in Böhmen, Hofsgrund in Baden, Tschoppau in Sachsen, Ems in Nassau, Vilseck in der Oberpfalz, Pennsylvanien etc.

Von Mimetesit sind zwei ausgezeichnet schöne Drusen $\infty P.P.\ _0P$; $P._0P$ von Johanngeorgenstadt zu erwähnen, andere aus Cumberland, Badenweiler in Baden etc.

Von Krokoit (35 Stücke) zeichnet sich ein grosses Schaustück aus mit prismatischen Krystallen, von Katharinenburg in Siberien, mehrere ähnliche reiche Stücke von Beresowsk; Vorkommnisse aus Brasilien. —

Wulfenit. Schöne Drusen von $P.\infty P._0P$; $^2/_3P\infty .\ ^1/_3P$. von Bleiberg in Kärnthen, andere von Phönixville, Werdenfels. — Vanadinite von Beresowsk, Dechenit aus der Rheinpfalz.

Die Species Galenit zählt 136 Nummern mit einer Reihe schöner Drusen, $\infty O\infty$; $\infty O\infty .O$; O; $\infty O\infty .O.\infty O$; $O.\infty O\infty .\infty O._2O$ von Neudorf am Harz; $\infty O\infty .O._2O_2$ von Freiburg etc. — Es reihen sich die Schwefelblei-Verbindungen an: Zinkenit, Boulangerit, Geokronit, Jamesonit, Plagionit, Bournonit (19 Exemplare) Belonit, Kobellit etc.

Von den Zinkerzen sind Smithsonit in 54 Exemplaren vertreten, dabei die Vorkommnisse von Aachen und Santander in Spanien; Calamin in 35 Exemplaren, darunter schöne Drusen mit hemimorphen Krystallen, von Altenberg bei Aachen $\breve{\infty P}\infty .\infty P._0P._3\bar{P}\infty$ und am anderen Ende $_2\breve{P}_2$. — Sphalerite (85 Stücke), z. Thl. grosse Drusen. ∞O; $\infty O.\frac{^3O_3}{2}$; $\infty O.\frac{O}{2}.\infty O\infty$ etc. — Gahnit, Kreittonit und Franklinit sind in guten Stücken vertreten.

Unter den Nickelerzen ist krystallisirter Nickelin, P, von Sangerhausen im Mannsfeld'schen zu erwähnen, unter den Kobaltverbindungen ausgezeichnete Exemplare von Erythrin von Schneeberg in Sachsen, reiche Drusen von Smaltin und Chloanthit; Kobaltin

in z. Thl. ziemlich grossen losen Krystallen, $\frac{\infty O_2}{2}$. $\infty O \infty$; O etc. und eingewachsen von Tunaberg in Schweden.

Die Ordnung Eisen eröffnet gediegen Eisen als Meteoreisen, und angereiht sind die Steinmeteorite. Ausser den bereits oben erwähnten meteor. Eisenmassen, sind vertreten die Fall- und Fundorte: Zacatecas in Mexico, Rasgatà in Neu-Granada, Atakama in Südamerika (Stück von 691 Grmm.), Cocke County, Cosby's Creek, Sevier County in Tennessee N. A., Arva in Ungarn, Seeläsgen in Brandenburg, Braunau (Hauptmannsdorf) in Böhmen (St. v. 590 Grmm.), Putnam County N. A., Augusta Cty. Virginien, Russel Gulch Gilpin Cty., Colorado.

Die Steinmeteorite sind:

Von Ensisheim (Stück von 228,6 Grm.), Eichstädt (2 Stücke von 621,3 Grmm.) l'Aigle, Mässing bei Altötting in Bayern (Stück von 26,3 Grm.), Stannern in Mähren (St. v. 420 Grm.), Cold-Bokkeveld im Capland, Parnallee in Ostindien, Dhurmsala in Ostindien (Stück von 219,8 Grm.), Knyahinya in Ungarn, Pultulsk bei Warschau, Hessle bei Upsala (St. v. 209,6 Grm.) New-Concord in N. A. (St. v. 112,8 Grm). —

Die Eisenoxyde zeigen einen Reichthum guter Stufen; von Magnetit lose Oktaeder aus dem Zillerthal und Fahlun in Schweden; schöne Gruppen O. ∞O von Traversella in Piemont und von Zlatoust im Ural etc. (82 Exemplare). — Von Hämatit zeichnen sich mehrere prachtvolle Drusen aus $^4/_3P_2$.R.$^1/_4$R mit glänzenden Anlauffarben, von Elba; R, von Altenberg in Sachsen, krystallin. Varietäten, Pseudomorphosen etc. (120 Exemplaren.)

Göthit. Eine schöne grosse Stufe mit hyazinthrothen Blätter-Aggregaten von Eiserfeld im Siegen'schen, andere (z. Thl. P. ∞P_2) aus Cornwallis, von Oberkirchen im Westerwald, Bieber bei Hanau etc. und viele Pseudomorphosen nach Pyrit vom Ural, von Elba, Brasilien etc.

Der Limonit zählt 126 Nummern, der Siderit 64 Nummern. Von den andern Eisenoxydverbindungen sind zu nennen: Die Lievrite von Elba, Skorodite von Antonio pereira bei Villa ricca in Brasilien, Beudantite aus dem Spessart, Ilmenite vom Ural, z. Thl. in grossen Krystallen, $_0$R.R; R.$_0$R.—$_2$R.$\frac{^4/_3P_2}{2}$; Basanomelane mit sehr schönen

Gruppen tafelförmiger Krystalle von Tavetsch in Graubünden und vom St. Gotthard. —

Von Pyritkrystallen ist eine ansehnliche Sammlung vorhanden mit mannigfaltigen Combinationen der Gestalten $\infty O \infty$; O; $\frac{\infty O_2}{2}$; $\left[\frac{{}_3O\,{}^3/_2}{2}\right]$, andere $\frac{\infty On}{2}$ und $\left[\frac{mOn}{2}\right]$ von Elba, Traversella, Tavistok in Devonshire, Bannat, Tyrol etc. — Ein vollkommen ausgebildetes Oktaeder von Solimask in Siberien.

Von den Manganerzen sind ausgezeichnete Drusen von Manganit von Ilfeld am Harz hervorzuheben, mannigfaltige Dialogite und die Rhodonite vom Ural; zum Theil angeschliffene Stücke von schön rother Farbe. — Von den Cerverbindungen sei der schöne Bagrationitkrystall von Achmatowsk erwähnt, welchen v. Kokscharow (Material. f. d. Mineral. Russlands III. 357) beschrieben hat. Er ist die Combination von $\infty P . + P . -{}^1/_2P . {}_0P . \infty P\infty . + P\infty . + {}_2P\infty . + {}^1/_3P\infty . + {}^1/_2P\infty . - {}_2P_2$. — Es wurde ein einziger Krystall dieser Art in Achmatowsk gefunden, sein Finder war der Fürst P. R. Bagration. Der Krystall ist nicht wie gewöhnlich die Epidotkrystalle in der Richtung der Orthodiagonale ausgedehnt und sehr symmetrisch gebildet. (Aus der Herzogl. Leuchtenberg'schen Sammlung). —

Einen Anhang zur Sammlung bilden Anthracite, Kohlen und Bitumina und einige schöne Stücke Bernstein, mehrere mit Einschlüssen von Insekten.

Die sogenannten Nulliporen

(Lithothamnium und *Dactylopora)*

und ihre

Betheiligung an der Zusammensetzung der Kalkgesteine.

Zweiter Theil:

Die Nulliporen des Thierreichs *(Dactyloporideae)*

nebst Nachtrag zum ersten Theile.

Von

C. W. Gümbel.

Mit 4 Tafeln.

Abh. d. II. Cl. d. k. Ak. d. Wiss. XI. Bd. I. Abth.

Die sogenannten Nulliporen

(Lithothamnium und *Dactyloporideae)*

und ihre Betheiligung an der Zusammensetzung der Kalkgesteine.

Von

C. W. Gümbel.

Zweiter Theil.

Die *Dactyloporideen.*

Allgemeine Orientirung. Nachdem ich in dem ersten Theile meiner Untersuchung (Abhandl. d. k. bayer. Acad. der Wiss. II. Cl. XI. Bd. I. Abth. S. 8 u. ff.) über die Natur der sog. *Nulliporen* eine kurze historische Uebersicht über den Ursprung und die Verschiedenheit der Ansichten in Bezug auf gewisse thierische Formen, die man zu den *Nulliporen* rechnete, gegeben habe, kann ich jetzt ohne weitere einleitende Bemerkungen sofort zur speziellen Beschreibung der dem Thierreiche angehörigen Formreihe übergehen. Zunächst soll der Versuch einer allgemeinen Charakterisirung jener Gruppe von *Foraminiferen,* welche Carpenter in seiner unübertrefflichen Darstellung (Introduct t. th. Study. of the Foraminifera 1862. S. 127. Pl. X.) der Gattung *Dactylopora* anschliesst, nach dieser Arbeit Carpenters gemacht und daran der Nachweis geknüpft werden, dass einige früher als *Nullipora* bezeichnete, besonders im alpinen Kalk nnd Dolomit häufig vor-

kommende Versteinerungen derselben Formreihe zugetheilt werden müssen. Es wird dabei Gelegenheit gegeben sein, so ziemlich alle bisher bekannte derartige organische Ueberreste aus der Vorzeit in den Kreis der Untersuchung zu ziehen und auf diese Weise eine Uebersicht über den gesammten Artenumfang dieser merkwürdigen Foraminiferengattung zu gewinnen.

Der Name *Dactylopora* wurde, wie schon im Allgemeinen früher erwähnt ist, zuerst von Lamarck (Hist. nat. d. anim. san. verteb. 1816 bis 1822. vol. II. p. 189 und Blainville et Defrance Dict. d. sc. nat. zooph. pl. 47 f. 4; pl. 48. f. 1) für gewisse kleine, cylindrische Körperchen vorgeschlagen, deren weisse, zarte Kalkschälchen in den Grobkalkschichten des Pariser Beckens so häufig wie augenfällig sind, Ueber die Stellung dieser organischen Ueberreste in dem zoologischen Systeme waren indess die Ansichten schwankend und unsicher. Es war zuerst 1852 d'Orbegny (Cours elem. d. pal. et. d. geol. vol. II. p. 192), welcher ihnen ihre richtige Stellung bei den *Foraminiferen,* wenn auch in irrthümlicher Weise neben *Ovolites* anwies. Aber noch war diese ihre Stellung nicht allseitig anerkannt, indem man später sie sogar den *Fistuliden* zuzählen zu müssen glaubte. Parker und Jones (Annals. of. nat. hist. 3 Ser. vol. V. p. 473) bemühten sich aufs Neue, ihre Zugehörigkeit zu den *Foraminiferen* ausser Zweifel zu setzen. Carpenter hat sich derselben Ansicht nach der mit gewohnter Meisterschaft in Bild und Erläuterung gegebenen Darstellung (a. a. O.) unbedingt angeschlossen. Auch Reuss, welcher noch 1861 in seinem Entwurf einer systematischen Zusammenstellung der *Foraminiferen* (Sitz. d. math. nat. Cl. d. k. k. Ac. d. Wiss. in Wien Bd. XLIV. S. 379) *Dactylopora* für eine *Bryozoe* erklärte, hat durch seine spätere Mittheilung (Sitz.-Ber. d. geol. Reichsan. in Wien 1866. S. 202) dahin sich ausgesprochen, dass diese Versteinerungen unter den *Foraminiferen* ihren Platz finden müssen. Zuletzt hat Karrer, indem er eine neue ausgezeichnete miocäne Art beschreibt, sich gleichfalls für die Zutheilung zu den Foraminiferen entschieden.

Obwohl es demnach fast überflüssig erscheinen könnte, will ich doch noch hinzufügen, dass auch meine mikroskopischen Studien sehr mannichfacher Formen dieser Gattung mich von íhrer Foraminiferen-

natur vollständig überzeugt haben. Namentlich ist es die charakteristische Schalenstruktur, welche allen Zweifel beseitigt.

Organisation. Bezüglich der inneren Beschaffenheit der sehr reichen Formreihe können wir ganz der vortrefflichen Darstellung Carpenter's (a. a. O.) folgen.

In den einfachsten, hierher gehörigen Formen, wie sie die jetzt noch in tropischen Meeren lebende *Dactylopora eruca* (Tafel D I. F. 1^a—1^c) darstellt, sehen wir eine in Bogenform aneinanderschliessende Reihe von Kammern, von welchen keine mit der andern direkt in Verbindung steht; jedoch ist jede mit einem ziemlich weiten, nach der Concavseite der Krümmung durch einen Kanal ausmündenden Hohlraum versehen. Die Mündung dieses Kanals steht auf einem zitzenförmig erhabenen wulstigen Ringe (m in Fig. 1^b). Die in jeder Abtheilung oder Kammer des Gehäuses eingeschlossene Kammerhöhlung ist verhältnissmässig klein, eiförmig und wird ringsum von dicken Wänden umgeben (c in Fig. 1^d und 1^e). Die Schalen-Zwischenwände bestehen aus einer scheinbar dichten, sog. porzellanartigen Substanz, welche fast nur kohlensaure Kalkerde mit etwas organischer Masse enthält. Ich glaube mich an Exemplaren von den Fidschi-Inseln, welche der frühere Direktor der Sternwarte in Melbourne, Dr. Georg Neumayr, in einer Schlammprobe aus 20 Faden Meerestiefe gesammelt hat, mittelst schwierig herzustellender Dünnschliffe von der Anwesenheit kleiner Kanälchen überzeugt zu haben (r in F. 1^d und 1^e), welche die sonst scheinbar homogene Schalensubstanz nach der allgemeinen Richtung von Innen nach Aussen in zerstreuter Lage hier und da durchziehen. Man könnte an Oeffnungen von Bohrröhrchen denken. Die äusserst geringen Dimentionen und der Umstand, dass ich sie in allen angefertigten Dünnschliffen von gehöriger Durchsichtigkeit wieder erkennen konnte, sprechen für die Natur wirklicher, die Schalenmasse durchziehender Kanälchen. In genügend dünnen Schliffen bemerkt man überdiess da, wo zwei Theile oder Kammern zusammenstossen, die Schalensubstanz deutlich abgegrenzt; meist zeigt sich auf dieser Grenze in Folge zahlreicherer, hier durchziehender Kanälchen eine lichtere Färbung oder grössere Durchsichtigkeit.

Aeusserlich besitzen die Gehäuse auf den Seitenflächen ziemlich tiefe

rinnenartige Einschnürungen (t in Fig. 1[a]), die bis zu dem, meist etwas abgeflachten Convextheil verlaufen. Zwischen diesen Furchen (t) ist die Oberfläche an der Stelle, wo im Innern die Kammerhöhlungen hintreffen, etwas gewölbt; oft aber auch in der Mitte dieser Wölbung wieder schwach eingedrückt. Gegen die concave Seite des Gehäuses schwach zulaufend bildet jede Kammerabtheilung für sich eine zitzenförmig vorragende, abgerundete Spitze, welche die Mündung des aus der innern Höhlung führenden Kanals trägt (Fig. 1[c]). Nur selten kommt es vor, dass mehrere Exemplare seitlich aneinander liegen, eine Doppeltreihe bildend, welche die weitere Entwicklungsweise der complicirteren Arten anzudeuten scheinen. Ueberhaupt kann man sich kaum des Gedankens entschlagen, dass wir es hier nur mit unabgeschlossenen oder sehr wahrscheinlich mit auseinandergefallenen Stücken eines grösseren Ganzen zu thun haben, dessen unverletzte Form wir bis jetzt noch nicht kennen. Denn es lässt sich den Seitenrinnen (r) eine andere natürliche Bedeutung nicht beilegen, als dass sie für die Communikationskanälchen bestimmt sind, welche einen ringseingeschlossenen Hauptthierkörper mit der Aussenwelt in Verbindung setzen, wie sich diess erst deutlicher zeigen wird, wenn wir die geschlossenen Formen näher kennen gelernt haben werden.

Bei den Formen mit unvollständigem Abschlusse kommt es nun noch weiter vor, dass die Kammertheile sich auswärts in divergirende röhren- oder kegelförmige Vorsprünge verlängern. Es entstehen dadurch *Tulipora*-ähnliche Gestalten, namentlich wenn die Spitzen abgebrochen sind und dadurch die innern Hohlräume sichtbar werden. Hierher gehören jene Fragmente, die Carpenter als *Dactylopora digitata* (a. a. O. S. 130 Fig. XXVII u. Pl. X Fig. 16) beschreibt (S. Copie Taf. D. IV. Fig. 7[a]—7[b]).

Die nächste Entwicklung, welche die einfach offene, bogenförmige Aneinanderreihung von Kammertheilen nehmen kann, ist deren Zusammenschluss zu einem vollständigen Ringe. Diese Ringform ist eine der häufigsten, welcher wir in den lockeren Lagen des Grobkalks von Paris begegnen. Es sind aber nicht bloss einzelne, isolirte Ringe, sondern sie kommen auch, wenn auch höchst selten, zu

cylindrischen Röhrchen verbunden vor. Diese Art wird als *Dactylopora annulus* (Taf. D 1 F. 2) bezeichnet.

Betrachten wir zunächst einen einzelnen Ring, so besteht derselbe aus einer Anzahl von (nach meiner Beobachtung durchschnittlich 16) Kammertheilen, welche, ähnlich wie bei *Dactylopora eruca,* seitlich miteinander fest verwachsen sind und durch eine Vermehrung der Anzahl von Kammertheilen endlich zu einem vollständigen Ringe zusammenschliessen. Jeder Kammertheil besitzt im Innern eine rundlich blasenförmige Höhlung (c in Taf. D I Fig. 2^a), welche nach der Innenseite des Rings durch einen kurzen Kanal ausmündet. Die Mündung dieses Kanals (r Fig. II^a) ist gleichfalls zitzenförmig umsäumt, und liegt meist ausser der Mitte der inneren Ringfläche einem Rande genähert, mit einer Richtung schief nach aufwärts (F. 2^e). An der Aussenfläche unterscheidet man 4 Begrenzungen: 1) die äussere convexe Ringfläche, 2) die innere concave Ringfläche und 3) und 4) zwei Seitenflächen, mit welchen die einzelnen Ringe aufeinander liegend die cylindrische Röhre bilden.

Die Seitenflächen sind meist mit radialverlaufenden, schmalen Furchen, entsprechend den Rinnen (t) der *D. eruca,* versehen, die meist bis zur äusseren Ringfläche fortsetzen und durch etwas breitere, erhabene Rippchen von einander getrennt sind (Taf. D I F. 2^a). Dadurch erhalten die Ringe das radähnliche Aussehen, wie es auf den Gelenkflächen vieler Krinoideenstiele vorkommt. Die Aussenfläche des Rings ist in der Mitte meist eingedrückt, nach dem Rande zu gewölbt und rasch eingebogen, so dass, wenn mehrere Ringe aufeinander liegen, wie Carpenter (a. a. O.) Tl. X. Fig. 9 darstellt, an den Zusammenlagerungsflächen tiefe Einschnürungen des Cylinders entstehen, die mit wulstigen Erhöhungen wechseln. (Taf. D I. F. 2^d).

Verbinden sich nun solche gekerbte Ringe zu Röhrchen, so ist an sich klar, dass, da die Furchen immer schmäler sind, als die dazwischenstehenden Rippchen, mithin die Furchen des einen Rings bei der Aufeinanderlage nicht nach Art einer zahnförmigen Verzapfung durch die Rippchen des andern Rings ausgefüllt werden können, vielmehr Rinne auf Rinne, Rippchen auf Rippchen zu liegen kommt, durch das Zusammentreffen der Furchen oder Rinnen beider Ringflächen

radial gerichtete kanalartige Höhlungen entstehen, welche von der inneren bis zur äusseren Ringfläche verlaufend hier ausmünden, (junctural interspaces Carpenters). Die rundlichen Mündungen dieser Zwischenbodenkanälchen liegen auf der Oberfläche in den Ringeinschnürungen, wo solche vorhanden sind, oder auch auf den durch besondere Zeichnungen in die Augen fallenden Feldchen. Da, wo sie nach Innen ausmünden, zieht sich häufig eine rinnenförmige Vertiefung ringsherum, wodurch die Röhre mehr oder weniger eingeschnitten erscheint, so dass hier der Bruch und die Auflösung der Röhre in einzelne Ringe um so leichter erfolgen kann.

Verfertigt man horizontale, also senkrecht zur Längenrichtung der Röhre gelegte Durchschnitte in Form von Dünnschliffen (Taf. D I. Fig. 2^b in 300 m. Vergr.), so stellt sich die anscheinend porcellanartig dichte Schalensubstanz als eine membranöskörnige oder feinpunctirte Masse dar, als wäre dieselbe aus feinsten, mäandrinisch dicht verschlungenen Röhrchen zusammengesetzt. In Mitten dieser Masse beobachtet man sehr feine Kanälchen, welche einer radicalen Richtung folgend, wie diess bereits auch schon bei *D. eruca* erwähnt wurde, zerstreut die Schale durchsetzen (r in Fig. 2^b). Aehnliche Kanälchen ziehen auch längs der Flächen, mit welchen je 2 benachbarte Kammertheile zusammenstossen. In den Durchschnitten erscheint daher diese Grenzfläche durch einen hellen schmalen Streifen angezeigt. An einem Exemplar wurde eine merkwürdige zickzackförmige Biegung dieser feinen Kanälchen auf der Grenzfläche zweier benachbarter Kammertheile beobachtet, wie es die Zeichnung (lit. r r T. D I. F. 2^b) darstellt. Es deutet dieser Umstand auf eine analoge Struktur der ganzen Schalensubstanz hin.

Die Regelmässigkeit und Gleichmässigkeit der Kammertheile und Kammerhöhlungen im ganzen Umfange der Ringe weist die Annahme von vornherein als unstatthaft ab, als ob die Ringe durch seitliche Aneinanderreihung von Kammern in der Art, wie es möglicher Weise bei *D. eruca* der Fall ist, bis zu ihrem völligen Zusammenschluss zum Ringe entstanden sei. Die Vereinigung der Ringe zu einer cylindrischen Röhre spricht vielmehr dafür, dass die centrale Höhlung der Röhrchen der Sitz der Hauptsarcodemasse sei und dass von dieser aus die Neubildung

der Ringe in der Längenrichtung der Röhrchen vor sich gehe. Diese Röhrchen — am Anfangsende geschlossen, am Fortwachsthumsende offen — mit einer weiten Höhlung im Innern und mit einer diese centrale Höhlung umschliessenden Schale aus porcellanartig dichter, kalkiger Substanz, welche aus successiv entstehenden ringförmigen Ansätzen sich aufbauen und in jedem Ringglied aus einer Anzahl von Kammertheilen mit einer inneren, durch einen Kanal in die Hauptröhrenhöhlung ausmündenden Höhlung bestehen, scheinen mir viel richtiger den Haupttypus der Formreihe darzustellen, welche unter der Bezeichnung *Dactylopora* neuerlich zusammengefasst wurde, als jene scheinbar sehr einfache Form der *Dactylopora eruca*, deren natürlichen Aufbau wir gar nicht einmal genau kennen und deren Glieder sehr wohl als Stücke eines zerfallenen Körpers sich ansehen lassen. Dass zudem die Schale von zahlreichen Kanälchen, sowohl in der Lage zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Ringsystemen (Zwischenbodenkanälchen), als zwischen zwei Kammertheilen (Zwischenwandkanälchen), als auch von einzelnen innerhalb der Schalenmasse selbst zerstreuten durchzogen wird, bildet einen weiteren Charakter für diese Gruppe.

Dieser Grundtypus bietet in der grossen Mannichfaltigkeit seines inneren und äusseren Aufbaues überaus reiche Momente zur Entwicklung sehr verschiedenartiger, abgeleiteter Typen, je nachdem ein oder das andere Verhältniss sich besondere Geltung verschafft. Was zunächst die äussere Form des röhrenartigen Gesammtkörpers anbelangt, so kann dieselbe langgestreckt cylindrisch, oder auch kurz tonnen-keulenförmig, selbst mit einer Annäherung an das Kugelige ausgebildet sein. Ich erachte es für typisch, dass in jedem Falle ursprünglich der Körper am Embryonalende geschlossen gewesen sei, obwohl wir denselben in Folge von Abreibung, Zerbröckelung und Zerstörung des ältesten Theils oft, ja fast durchgehends an beiden Enden offen finden. Oft ist dieser Abschluss durch eine konische Verjüngung der Röhrchen nach einem Ende zu wenigstens noch angedeutet.

Eine zweite Formreihe kann sich dadurch ausbilden, dass die Ringe nicht vollständig geschlossen, nur in Segmenten sich neben- und aufeinander legen und zu einem cylinderartigen Körper sich aneinander

schliessen. Man kann sich vorstellen, dass durch Zerfallen solcher Körper ähnliche Ringsegmente zum Vorschein kommen, wie sie sich als *D. eruca* wirklich finden. Auf der Aussenseite der gleichfalls röhrenartigen Vereinigung solcher Segmente würden sich derartige Formen durch breitnarbige oder schildförmige Zeichnungen, welche an die Stelle der ringförmigen Gliederung treten, kennzeichnen.

In gewissen Fällen zeigen sich die einzelnen Kammertheile der Art verschmälert, dass sie fast cylindrische Form annehmen und dabei in sehr schiefe Stellung zur Achse geneigt, gleichsam einen Trichter bilden. Es entstehen auf diese Art Formen, wie sie Carpenter (a. a. O. S. 130 u. 131 F. XXVIII; Pl. X. Fig. 15) unter der Bezeichnung *Dactylopora clypeina* ausführlich geschildert hat. (S. Copie Taf. D. IV. Fig. 6^a und 6^b). Abgeriebene und dadurch mit grossen Poren auf der Oberfläche versehene Exemplare hatte Michelin zuerst (Icon. Zooph. p. 177; pl. XLVI; f. 27) unter dem Namen *Clypeina marginoporella* als zu den *Tubuliporen* gehörend beschrieben.

Es liegen nämlich die Kammerhöhlungen fast durchgängig der Aussenfläche näher, als der inneren Seite, so dass durch Abreibung der dünnen Aussenwände sehr leicht die Höhlungen blossgelegt und sichtbar werden. Bei solchen, etwas abgeriebenen Exemplaren, die sehr häufig vorkommen, scheinen die Röhrchen auf solche Weise eine poröse, mit tiefen Grübchen besetzte Oberfläche zu besitzen. Vielfache Irrthümer sind dadurch entstanden, dass man solche abgeriebene Exemplare für ursprüngliche und wohlerhaltene annahm. Eine solche abgeriebene, ganz durchlöcherte Form ist die von Defrance als *Larvaria reticulata* beschriebene Art, die als *Dactylopora reticulata* von Carpenter (a. a. O. S. 132 Pl. X. Fig. 17 u. 18) näher geschildert ist.

Dadurch, dass die Kammerhöhlungen eine länglich blasenähnliche Form besitzen, deren grösste Weite nach aussen liegt, entsteht eine kanalartige Verengung nach innen; die Mündung, meist schief nach oben gerichtet, wird von einer zitzenförmigen Wulst umsäumt, und ist in einigen Fällen so nach oben gerückt, dass sie an den Rand oder sogar in die rinnenartige Hohlkehle fällt, in der auch die Zwischenbodenkanälchen ihre Mündungen haben.

Wieder in anderen Fällen werden die Kammertheile selbst mehr

oder weniger unregelmässig; sie rücken auseinander und es entstehen nun zwischen den Kammerwänden grössere Kanaldurchgänge, ähnlich wie jene zwischen den einzelnen Ringgliedern. Wir haben die ersten Andeutungen derselben auch bei den Formen mit regelmässigeren Theilen bereits erwähnt. Oft aber werden diese Zwischenwandkanälchen so weit und zahlreich, wie die Zwischenbodenkanälchen selbst, so dass dann die Oberfläche des Gehäuses von den grubigen Mündungen dicht übersäet erscheint. Hierher gehört d'Archiac's *Prattia glandulosa* (Mem. d. l. soc. geol. d. Franc. 1850 t. III; p. 40 pl. VII fig. 20), die Carpenter als *Dactylopora glandulosa* (a. a. O. S. 132 Pl. X; F. 21, 25—28) beschrieben hat. Die Oberfläche dieser Art ist rauh und höckrig, indem die einzelnen, gewöhnlich in ziemlich regelmässigen Reihen stehenden, häufig aber auch abwechselnd gestellten Kammern warzenförmig vorragen und die Röhrchen an den Fugen zwischen den einzelnen Ringen mit tiefen Einschnürungen versehen sind. In diesen Rinnen oder Fugen zeigen sich dann auch die Mündungen der zahlreichen Kanälchen.

Auch in Bezug auf die innere Organisation, d. h. in Bezug auf die Kammerhöhlungen, ihre Verbindung mit dem inneren Hohlraum, dann in Bezug auf die verschiedenen Kanälchen herrscht die grösste Mannigfaltigkeit von den einfachen Verhältnissen, die wir bisher betrachtet haben, bis zu einem sehr complicirten Bau. Von dem letzteren giebt uns diejenige Art ein lehrreiches Beispiel, auf welches das Genus *Dactylopora* ursprünglich gegründet wurde, nämlich die *Dactylopora cylindracea* Lamarck's.

Diese Art bildet in vollständig erhaltenen Exemplaren langgestreckte, walzenförmige, am Embryonalende kuppenförmig abgerundete und geschlossene, am oberen Ende offene Röhren von beträchtlicher Länge bis zu 12 Mm. und 2 Mm. im Durchmesser. Doch sind solche vollständige Exemplare höchst selten; in der Regel kann man nur Bruchstücke zur Untersuchung benützen. Ist die Oberfläche wohlerhalten, so bemerkt man, dass dieselbe dicht von kleinen conischen Grübchen, die Mündungen der von Innen kommenden Kanälchen, bedeckt ist. An abgeriebenen Exemplaren können selbst die tiefer liegenden Kammerhöhlungen blossgelegt werden, und es entstehen auf solche Weise verschieden unregelmässig, oft grossluckige, durchlöcherte Aussenflächen, welche den Röhrchen

ein poröses Aussehen verleihen. Die meist dicke Schale kann man sich aus zwei Cylinder bestehend denken. Der äussere dickere schliesst die Kammerhöhlungen ein und den inneren meist sehr dünnwandigen kann man sich auf die Weise entstanden vorstellen, dass (Taf. D I. Fig. 9) in der inneren Cylinderwand der Formen, wie wir sie bisher betrachtet haben, die Rinnen, in welche die Zwischenbodenkanälchen münden, nach Innen durch eine Wand (i) überdeckt werde, und dass diese Wand mit den übrigen Theilen des äusseren Cylinders verwachse. Die Rinne wird dadurch zu einer ringförmigen Höhlung (s), von der aus die Zwischenbodenkanälchen (p) nach Aussen verlaufen, und in welche zugleich die Kammerhöhlungen (c) durch kurze Kanälchen (r) einmünden. Endlich steht dieser Hohlring (s) selbst wieder durch kurze, die innere Wand durchbrechende Kanälchen (o) mit dem grossen inneren Hohlraum in Verbindung. Die nach Aussen reichenden Kanälchen nehmen nicht vereinzelt, sondern mehrere zugleich an einem gemeinsamen Punkte der Hohlrinne ihren Anfang, so dass sie büschel- gleichsam handförmig gestellt erscheinen.

Wir haben demnach bei solchen complicirten Formen zu unterscheiden: 1) den äusseren Hauptschalencylinder, 2) den inneren Schalencylinder, 3) die Kammerhöhlungen, 4) die Ringhöhlung, 5) die Kanäle und zwar a) zwischen dem inneren Haupthohlraum und dem Hohlring, b) zwischen Hohlring und den Kammerhöhlungen und c) die büschelförmig ausstrahlenden zwischen Hohlring und der Aussenfläche. Indem nun der eine oder der andere Theil vor den übrigen vorherrschend entwickelt, oder auch verkümmert und ganz unterdrückt sein kann, entsteht eine Menge von Combinationen, welche einen grossen Reichthum von Formverschiedenheiten erwarten lassen.

Da Carpenter die oben geschilderten Verhältnisse an der eocänen *Dactylopora cylindracea* in ebenso klarer, wie erschöpfenden Zeichnung (Pl. X. Fig. 24) dargestellt hat, scheint es nicht ohne Interesse, ganz dieselbe Anordnung der Organisation an der neulich von Karrer entdeckten und beschriebenen miocänen Art nachweisen zu können. Unsere Zeichnung (T. D I. Fig. 11^{a-b}) stellt ein oben abgebrochenes Exemplar dieser Art dar, bei dem die innere Wand (e) in Folge theilweiser Zerstörung der Schale in der Richtung des Hohlrings freistehend vorragt und einen

geringelten Cylinder bildet. Man bemerkt an demselben die ringförmig gestellten Kanälchen, welche von dem Hohlringe nach dem inneren Hohlraum führen. Die Aussenfläche ist durch die Mündungen der zahlreichen Kanälchen (c') grubig punktirt. In dem Dünnschliffe nach der Längenrichtung (Fig. 11[b]) projeciren sich die Hohlringe (a) in rundlichen Umrissen von etwas geringerer Grösse, als die Durchschnitte der Kammerhöhlungen (b); auch alle Kanälchen sind klar ersichtlich sowohl zwischen Hohlring und Innenraum (e), als zwischen Hohlring und Kammerhöhlung (d) und zwischen Hohlring und der Aussenseite (c). Der Horizontalschnitt (Fig. 11[c]) ist etwas schief zur Kammerebene geführt, wesshalb der Hohlring (a) mit seinen Verbindungskanälchen nur auf der einen Seite sichtbar ist, während auf der anderen Seite des Schnitts nur Theile der Kammerhöhlungen und einzelne Zwischenkanälchen zu bemerken sind.

Eine von Carpenter (a. a. O. S. 135, Pl. X Fig. 29) besonders hervorgehobene, aber als Modifikation von *D. cylindracea* angesehene Form besitzt die Eigenthümlichkeit, dass der Hohlring gleichsam durch Scheidewände in isolirte, den Kammerhöhlungen ähnliche, sackartige Erweiterungen abgegliedert wird, ohne dass diese Säcke unter sich seitlich miteinander verbunden sind. (S. Taf. D I. Fig. 10). Zugleich liegen bei dieser Form die Kammerhöhlungen (b) weit seitlich und sind durch kurze Kanälchen (d) mit den sackartigen Erweiterungen (a) in Verbindung gestellt, während von letzteren aus büschelförmige zahlreiche Kanälchen (c) nach der Aussenfläche verlaufen.

Bei allen diesen Formen mit dicken Wandungen ist eine Zusammensetzung aus einzelnen Ringen nicht sichtbar, weil, wie es scheint, die Ringe dicht verwachsen sind. In Folge verschiedener Grade der Abreibung oder Zerstörung der Schale an der Oberfläche entstehen sehr verschiedene Zeichnungen, welche oft als ursprüngliche angenommen, vielfach zu irrthümlichen Auffassungen von Arten Veranlassung gegeben haben.

Sehr lehrreich ist der Nachweis der Zusammensetzung des ganzen scheinbar nicht geringelten Schalenkörpers aus einzelnen Kammertheilen, welchen Carpenter durch Anätzen der Oberfläche mittelst schwacher Säure geliefert hat. Es treten dadurch nämlich die vorher verwischten

Nähte der einzelnen Kammern wieder sichtbar hervor, wobei die horizontal verlaufenden Linien die Trennungsflächen der verschiedenen Ringsysteme, die mehr vertikal verlaufenden Linien die Grenze zwischen den einzelnen Kammertheilen anzeigen. Daraus erklärt sich dann auch hinlänglich das häufige Vorkommen von Kanälchen, welche scheinbar gleichmässig vertheilt in der Schalenwandung vorkommen, wahrscheinlich aber immer in den Ebenen der Kammerscheidewände liegen.

So mannichfach auch die Gestaltungen und die innere Organisation der verschiedenen Formen, welche Carpeuter, wie im Vorausgehenden zu schildern versucht wurde, unter der generellen Bezeichnung *Dactylopora* beschreibt, sind, so scheint damit doch lange noch nicht der Formenkreis erschöpft zu sein, in welchem diese reiche Artenreihe auseinander geht.

Um diesen Kreis nach einigen Richtungen noch etwas zu erweitern, nicht um ihn etwa zu erschöpfen, will ich weiter einige bemerkenswerthe Formen erwähnen, welche theils den früher beschriebenen sich anschliessen, theils neue Gruppen andeuten.

Aus dem „unteren Sande" von Cuisse la Motte liegen mir zahlreiche Exemplare von Röhrchen vor, deren ringförmig gegliederte Aussenfläche durch schildartige kleine Erhöhungen charakterisirt ist. Diese Schildchen von länglich ovalem, in der Mitte oft etwas eingedrücktem, daher brillenähnlichem Umrisse besitzen zwei Oeffnungen, die gegen die Enden der Schildchen gerückt, oft von einigen concentrischen Linien umzogen sind. 10—12 solcher Schildchen bilden, nur durch schmale Zwischenräume getrennt, ein Ringglied, welches sich nicht leicht von den anderen abzulösen scheint (T. D I. Fig. 5^a und 5^b). Im Querbruche und im Durchschnitte (Fig. 5^b) zeigen sich dieselben inneren Verhältnisse, wie bei *Dactylopora annulus* und *reticulata*. Abweichend dagegen ist die innere Beschaffenheit einer gleichfalls röhrenförmigen Art aus dem Grobkalke von Parnes. Die Aussenfläche der Röhrchen ist wie getäfelt, indem 6—8 eng an einander schliessende Schildchen in Form von Rechtecken, welche in der Mitte schwach gewölbt, an den Fugen eingebogen horizontal und vertikal laufende Einbuchtungen an den Röhrchen erzeugen, so dass diese ein abgegliedert säulenartiges Ansehen erlangen. Ausserdem sind die Schildchen von 4 Reihen feinsten Kanalmündungen dicht besetzt (Taf. D I. Fig. 14^a). Von dem inneren, beträchtlich weiten

Hohlraum führen durch die verhältnissmässig dünne Wand 6—8 (auf jeder Ringabtheilung) sehr weite Oeffnungen (o in Fig. 14[b]) zu einer sackartigen Erweiterung (r d. Fig. 14[b]), von der aus dann sehr zahlreiche Kanälchen büschelförmig bis zur Aussenfläche verlaufen. Gewöhnlich nehmen die Kanälchen ihren Ursprung direkt von der innern Höhlung oder von der Ringhöhlung, wie bei *D. cylindracea*. Bei der vorliegenden Art aber scheinen die sackartigen Erweiterungen ganz dem Verhältnisse zu entsprechen, das bei der eigenthümlichen Modifikation (Fig. 10) beschrieben wurde. In diesem Falle würden eigentliche Kammerhöhlungen innerhalb der Wandungen ganz fehlen und wir hätten hier einen neuen Formtypus ohne Kammerhöhlungen vor uns, als deren Repräsentant eben die beschriebene *(cancellata)* anzusehen ist.

In gewisser Hinsicht schliesst sich hier eine andere grosse Art an, die äusserlich der *D. cylindracea* nahe steht, dagegen in der inneren Organisation bedeutend abweicht. Man beobachtet nämlich an der ziemlich dickwandigen Art *(cribrosa)* (Taf. D I. Fig. 13[a] und 13[b]), dass von dem inneren Hohlraume grosse Oeffnungen (o d. Fig. 13) mit fast gleichbleibendem Röhrendurchmesser direckt bis zur Aussenseite führen. Gegen die Oberfläche hin zweigen sich von diesen weiten Kanälchen sehr zahlreiche kleine Kanälchen ab, die an der Oberfläche rings um die grössere Oeffnung gleichfalls in Punktgrübchen ausmünden (rr Fig. 13[a und b]). Auch in diesem Falle vermissen wir die sonst typischen Kammerhöhlungen und sehen sie ersetzt durch grössere Kanäle, von denen die kleineren sich abzweigen.

Noch weit abweichender und ganz eigenthümlich ist der Bau der im unteren Eocänsande von Cuisse la Motte häufig vorkommenden *Uteria encrinella* Michelin (Taf. D IV. Fig. 5[a] 5[b]). Sie besteht aus fass- oder tonnenförmigen doppeltwandigen Gliedern, welche auf beiden Stirnseiten von fast ebenen Endflächen begrenzt sind. In der Regel zeigen diese Flächen namentlich gegen den Rand hin radiale Furchen, wie wir sie bei den in einzelnen Ringen auseinander fallenden Formen kennen gelernt haben (r in Fig. 5[b]) zum Beweise, dass mehrere solcher Tonnenglieder ursprünglich auf einander sitzen und dass zwischen diesen Böden Kanälchen verlaufen. Die Doppeltwand schliesst einen engen inneren sanduhrartig geformten Hohlraum (c) und zwischen der inneren und

äusseren Wand einen weiten ringförmigen Hohlraum (h Fig. 5[a]) in sich ein. Die innere, dünne Wand ist in 3 Ringlagen von zahlreichen feinen Poren durchbohrt, welche den inneren Hohlraum (c) mit dem mittleren (h) in Verbindung setzen; ebenso ist auch die äussere Wand von der doppelten Anzahl in Ringen gestellten Poren durchbrochen, durch deren Mündung die sonst glatte Oberfläche punktirt erscheint. Man kann sich diese Form dadurch gebildet vorstellen, dass der bei *D. cylindracea*, *miocaenica* etc. nachgewiesene Hohlring sich grossartig erweitert, während dagegen die Kammerhöhlungen ganz verkümmert sind.

Michelin hat diese Form zum Typus einer besonderen Gattung erhoben (*Uteria*), welche Bronn (Leth. geogn. 2. Aufl. III, S. 260 Taf. 35[3] Fig. 24) als incertae sedis den Foraminiferen anreiht. Der Anschluss an die bisher betrachtete Formgruppe scheint mir nicht bezweifelt werden zu können.

Die zuletzt erwähnten Formen ohne eigentliche Kammerhöhlungen sind um so wichtiger, weil sie uns zu jenen organischen Gebilden hinleiten, deren Zugehörigkeit zu den Foraminiferen bis vor Kurzem noch ganz im Dunkel lag, nämlich zu den sog. *Nulliporen* der Kalksteingebilde der alpinen Trias und des schlesischen Muschelkalks.

Wir betreten hiermit ein Untersuchungsfeld der schwierigsten Art. Die meisten dieser organischen Körper sind nämlich rings im dichten Kalk eingeschlossen und man sieht sich, um Strukturverhältnisse daran zu beobachten, auf ausgewitterte Exemplare und auf Dünnschliffe angewiesen. Sehr selten, wie bei dem schlesischen und manchem alpinen Vorkommen im Dolomite sind die organischen Körperchen in Höhlungen des Gesteins theilweise frei enthalten, aber stets verkalkt und verschiedenartig inkrustirt. Bald sind daher die früheren, durch thierische Substanz (Sarkode) ausgefüllten Hohlräume durch Gesteinssubstanz ersetzt, während die ursprüngliche Kalkschale aufgelöst und dafür Hohlräume übrig geblieben sind, (gleichsam Abüsse und Steinkerne darstellend), bald aber auch umgekehrt die ursprünglichen Hohlräume mit Kalk ausgefüllt und mit der ursprünglichen Kalkschale in eine scheinbar ununterbrochene Kalkmasse vereinigt. Oft kommt es auch vor, dass die inneren Hohlräume bloss inkrustirt und theilweise ausgefüllt wurden. Indem diese verschiedenen Arten der Versteinerung nun oft selbst an demselben Ge-

steinsstückchen und an demselben organischen Körper sich vollzogen haben, entstehen so vielfache, äusserlich ganz heterogen scheinende Gestalten, dass es schwer hält, sich vor Täuschungen zu bewahren, um so mehr, da ausserdem eine grosse Mannichfaltigkeit von Arten auftauchen. Nur die Vergleichung sehr umfangreichen Materials und die Herstellung zahlreicher Dünnschliffe scheint es zu ermöglichen, befriedigende Aufschlüsse über die innere Natur dieser so ganz eigenthümlichen Kalkröhrchen zu geben. Am lehrreichsten sind die Exemplare aus dem Himmelwitzer Muschelkalkdolomit und aus dem Wettersteinkalke des Zugspitzplatters. Wir wollen die erstere zunächst einer näheren Betrachtung unterziehen. Die 3—4 Mm. im Durchmesser haltenden Röhrchen umschliessen in der Mitte einen gleichmässig cylindrischen Hohlraum von etwa 1,5 Mm. Durchmesser und endigen nach unten mit einer halbkugeligen Wölbung, während sie an dem anderen Ende nicht geschlossen sind (Taf. D II Fig. 2^{i} und 2^{k}). Die den inneren Cylinderraum umschliessende Röhrenwand ist dick und aus zahlreichen, ablösbaren Ringen, die man in isolirter Lage sehr häufig beobachtet, (Fig. 2^{b}) zusammengesetzt. Die Seitenflächen sind nach Aussen in der Mitte etwas gewölbt, nach Innen in der Mitte etwas eingedrückt, während die Bodenflächen von oben und unten gegen die Achse der Röhre etwas schief geneigt gestellt sind. Diese Bodenflächen bleiben nicht vollständig eben, sondern sind in der Nähe des inneren Randes ausgefurcht, so dass, wenn zwei solcher Ringe aufeinander liegen, ein ringförmiger Hohlraum (Zwischenringhöhlung z in T. D I Fig. 8 und T. D II z in Fig. 2^{c}, 2^{b} 2^{g}) entsteht, welcher das Auseinanderfallen der Ringe sehr erleichtert. Die Wandung scheint von zahlreichen radial verlaufenden, ungetheilten, gradgestreckten Kanälchen (c Taf. D I Fig. 8) durchbohrt, welche die innere Höhlung mit der Aussenseite in Verbindung setzen. Diese Kanälchen nehmen ihren Anfang in grossen Porenöffnungen (m Fig. 8) auf der inneren Ringfläche, welche selbst ringförmig gestellt dicht am Rande der Scheidewände der Ringe sich befinden. Je zwei solcher Kanälchen stehen einander genähert, so dass es an manchen Steinkernexemplaren, bei denen diese Kanälchen durch Gesteinssubstanz ausgefüllt erhalten sind, während die Kalkschalentheile zerstört wurden, den Anschein hat, als ob gegabelte Kanälchen vorkämen. Indem aus

einer Mündung (m) der inneren Wandfläche ein Kanälchen (c) schief nach oben, und ein Kanälchen schief nach unten durch die Wand des nächsten Rings durchsetzt, entsteht im Längschnitte das Bild, als ob die Zwischenringhöhlung (z) zwischen den Armen zweier Kanälchen nach Analogie der Kammerhöhlungen z. B. bei *D. cylindracea* läge. Sorgfältige und umfassende Untersuchungen haben jedoch zu dem Resultate geführt, dass eine solche Analogie nicht besteht. Die ringförmige Höhlung liegt bestimmt in der Bruchebene der Ringglieder selbst und besitzt weder nach Aussen noch nach Innen kanalartige Ausläufer. An Exemplaren, bei welchen diese Höhlungen mit wahrscheinlich aus Schwefelkies entstandener Rotheisensubstanz ausgefüllt sind, habe ich mich wiederholt von dem Vorhandensein des ununterbrochenen ringförmigen Hohlraums und von dessen Lage zwischen den Scheidewänden zweier Ringe sicher überzeugt. Der Steinkern, der in Taf. D II Fig. 2^b dargestellt ist, zeigt in r diesen Hohlring theilweise noch geschlossen, theilweise aufgebrochen. Dagegen konnte ich nicht mit voller Sicherheit ermitteln, ob die Kanälchen nicht, anstatt, wie die Fig. 8 auf Taf. D I schematisch darstellt, in einer Ebenen der inneren Wandung zu entspringen, auf der Mitte der inneren Ringfläche aus getrennten Oeffnungen ihren Anfang nehmen, wie es manche Längsschnitte anzuzeigen scheinen. Doch bestimmt mich das deutliche Bild, welches sehr wohlerhaltene Exemplare liefern, bei welchen sich nicht zwei Porenöffnungen in der Ringmitte, sondern nur eine lappige Naht mit den einfachen Mündungen in der Ebene der Ringscheiden erkennen lassen, an der zuerst ausgesprochenen Annahme festzuhalten. Wir haben mithin in der Form aus dem schlesischen Muschelkalke den Typus einer mit *Dactylopora* unzweifelhaft nahe verwandten Foraminiferengruppe, charakterisirt durch ein röhrenförmiges, unten kuppenförmig geschlossenes, oben offenes Kalkgehäuse, zusammengesetzt aus ringförmigen, oft verwachsenen Gliedern ohne Kammerhöhlungen, jedoch mit zahlreichen, kreisförmig gereihten Kanälchen, welche von dem inneren Hohlraume ausgehen und bis zur äusseren Oberfläche fortsetzen. Ganz dieselbe innere Struktur findet sich auch an den meist etwas grösseren Exemplaren aus dem Wettersteinkalke oder Dolomite der Alpen, so dass deren Vereinigung mit der schlesischen Muschelkalkform in einem Genus nicht in Zweifel gezogen werden kann.

In höchst merkwürdiger Weise werden diese Röhrchen nach dem Grade und der Art des Versteinerungszustandes in der mannichfaltigsten Weise vielgestaltig und oft bis zum Unkenntlichen verändert. Bei nicht dicht im Kalke oder Dolomite eingeschlossenen, sondern wenigstens theilweise freigestellten Steinkernen beobachtet man am häufigsten cylindrische Formen, besetzt mit abwechselnd vorspringenden, ringförmigen Wülsten und rinnenförmigen Einschnürungen. Die Wülste sind dicht bedeckt von in 2 Reihen geordneten feinsten Röhrchen, welche meist abgebrochen in Form kleiner Körnchen oder Höckerchen die Ringwülste krönen, wodurch äussert zierliche Gestalten entstehen. Die Figuren 2^h und 2^i stellen solche Steinkerne von einer Rinde bedeckt dar. Diese Art des Erhaltungszustandes ist dadurch bedingt, dass die früher mit Sarkode erfüllten Räume des Gehäuses durch Gesteinssubstanz ersetzt wurden und die früheren kalkigen Schalentheile aufgelöst und wenigstens theilweise zerstört sind. Oft ist nebenbei eine Inkrustirung der Aussenfläche und eine theilweise Ausfüllung des inneren Hohlraumes eingetreten, wodurch das Ganze das Aussehen erhält, als sei ein solider, mit gekörnelten Ringen verzierter Cylinder in einem Gehäuse eingeschlossen, das man mit der eigentlichen Schale zu verwechseln sich wohl in Obacht nehmen muss. Ist der innere Hohlraum nicht vollständig von Gesteinssubstanz ausgefüllt, sondern nur gleichsam überrindet, so bleibt ein Rest des ursprünglichen inneren Hohlraumes offen. Auch kommt es vor, dass die Kanälchen nicht von Gesteinsmasse ausgefüllt oder doch nur mit so dünnen Rinden überzogen wurden, dass dieselben an den Steinkernen nicht sichtbar sind, und dadurch stellt sich dann der Steinkern als eine einfach wulstig tiefgeringelte Walze dar, wie es bei den aus Dolomit durch Auswitterung blossgelegten Exemplaren vorherrschend vorkommt. Ist dagegen der frühere Hohlraum ausgefüllt, gleichzeitig die Kalkschale erhalten und das Ganze im Gestein eingeschlossen, so lässt die Auswitterung der leichter auflöslichen oder mechanisch zerstörbaren Theilchen selten ein deutliches Bild entstehen. Es treten in diesem Falle nur rohgeringelte, oft tief eingekerbte walzenartige Körperchen und, von oben gesehene, ringförmige Wülste über die Gesteinsfläche hervor. Hier muss man nun mittelst Dünnschliffe sich Einsicht in die innere Struktur zu verschaffen suchen, was wohl gelingt, wenn die aus-

füllende Gesteinsmasse eine andere Beschaffenheit oder eine andere Farbe, als die umschliessende besitzt. Oft hilft ein Nachätzen der Schlifffläche mit verdünnter Säure sehr wesentlich zur Unterscheidung der organischen Formen von der umhüllenden Masse. Ein Dünnschliff, wie ihn die Zeichnungen Taf. D II Fig. 2^c und 2^n darstellen, giebt in vielen Fällen dieselbe Auskunft, wie erhaltene Schallenkörper. In letzteren erkennt man sowohl die Zwischenringhöhlungen (z), wie die Kanälchen (c), welche von (m) des inneren Hohlraums (h hier durch Kalkspath ausgefüllt) ausgehen und bis zur Aussenfläche (a), wo sie ausmünden, fortsetzen.

Was nun die Deutung der vorerwähnten, ringförmigen, mit den Resten von ausgefüllten Kanälchen besetzten Wülste der Steinkerne anbelangt, so scheint der erste Blick zu lehren, dass die Wulst einer ursprünglichen rinnenartigen Vertiefung des Gehäuses an der inneren Seite der Wand entspräche, aus welcher Rinne die Kanälchen ihren Anfang nehmen würden. Diese Annahme würde auf einen Ursprung der Kanälchen in der Mitte der Ringe hinweisen. Nähere Untersuchungen dagegen führen uns dahin, diese Erscheinung in der Weise zu deuten, dass die Kanälchen, welche jetzt benachbart neben einander auf dem wulstigen Ring des Steinkerns aufzusitzen scheinen, ursprünglich an den zwei verschiedenen Rändern eines Ringgliedes oben und unten entspringen und in bogenförmiger Krümmung sich einander nähernd in der Mitte des Rings, der vorn im Innern eine Rinne besitzt, so nahe kommen, dass bei dem Versteinerungsprocesse die jene Rinne ausfüllende, im Steinkerne nunmehr als vorspringende Wulst erscheinende Gesteinsmasse die convergirenden Röhrchen mit umfasst, sodass die letzteren aus der Spitze der Wulst zu entspringen scheinen, obwohl sie eigentlich schon an der Basis ihren Anfang nehmen. In der Zeichnung (T. D I. Fig. 8) ist diess schematisch veranschaulicht durch die dunkel schraffirte, mit x bezeichnete Stelle, welche den Durchschnitt einer solchen Wulst des Steinkerns darstellt.

Die Zwischenringhöhlungen sind häufig im Steinkern vollständig ausgefüllt, und durch Auflösung der Schalensubstanz bloss gelegt, so dass man denn Abguss aufs genaueste untersuchen kann. Man bemerkt jedoch nicht die geringste Spur einer Ansatzstelle eines Röhrchens oder

eines Kanals. In vielen Fällen scheint die äussere und innere Wandfläche vor dem Beginne des Versteinerungsprocesses theilweise bereits zerstört gewesen zu sein. Dadurch wird wiederum ein grosser Kreis scheinbar eigenthümlicher Formen erzeugt, von welchen besonders die als die häufig vorkommenden hervorzuheben sind, bei welchen die äussere Wand stark verwittert war und die Gesteinsmasse in die dadurch entstandenen tiefen Einkerbungen an den Scheidewänden der auf einander liegenden Ringe eingedrungen ist. Es enstehen auf solche Weise tief und unregelmässig eingeschnittene geringelte Walzen, deren ursprüngliche Form kaum mehr angedeutet ist. Die Figur (Taf. D II. Fig. 1^{x}) stellt einen Längsschnitt im Dünnschliff eines solchen innen und aussen stark corrodirten Exemplares aus dem Wettersteindolomite der Zugspitze dar.

Durch verschiedene Arten der Inkrustirung auf der Aussen- und Innenfläche der hohlen Cylinderchen entstehen weiter eigenthümliche Formen, bei welchen man leicht zur Annahme verschiedener Wände geführt werden könnte, obwohl es nur Inkrustirungsrinden sind. Eben so irrthümlich ist die Behauptung, dass das Innere der Röhren von organisirter kalkiger Substanz erfüllt sei, dass mithin diese organische Reste den *Bryozaen* zugezählt werden müssten. In vielen hundert von Exemplaren, die ich untersucht habe, konnte ich nie eine organische Struktur in diesem Hohlraume beobachten und kann daher die Abwesenheit derselben mit voller Sicherheit behaupten.

Bei dieser Art der Untersuchung ist mir eine andere Thatsache aufgestossen, auf die ich die Aufmerksamkeit lenke, weil sie leicht zu falschen Schlüssen führen könnte. Es ist schon an sich bemerkenswerth, dass neben den Exemplaren von grösserem normalem Durchmesser in denselben Gesteinsstückchen nicht gerade selten auch solche von viel geringeren Dimensionen vorkommen, die sich übrigens auch durch abweichende, innere Beschaffenheit auszeichnen. Es liegt uns am nächsten, in den kleineren Formen die Typen besonderer Species zu vermuthen. Man könnte aber an dieser Annahme irre werden, wenn, wie es allerdings höchst selten der Fall ist, die kleinen Röhrchen in dem Hohlraum der grösseren eingeschlossen liegen, wie es die Zeichnung Taf. D II in Fig. 2^{m} an einem schlessischen, und Fig. 1^{g} an einem alpinen Exemplar darstellt. Aus dieser Art Verbindung liesse sich der

Schluss ziehen, dass beide Körperchen zu einander gehörend ein Ganzes bilden, und dass erst in Folge der Verwitterung vor dem Akte der Versteinerung, namentlich durch Zerstörung der feinen Verbindungstheile, welche z. B. bei *D. cylindracea* die innere Cylinderwand mit der äusseren verbinden, beide cylindrische Theile von einander losgelösst und in Folge der Fluthbewegung des Wassers in den meisten Fällen auch auseinander gerissen worden seien. Gegen diese Auffassung spricht auch abgesehen davon, dass in der ungeheuren Mehrzahl aller Vorkommnisse eine solche Ineinanderschachtelung selbst an den besterhaltenen Exemplaren nicht vorhanden ist, der Umstand, dass die dünneren Röhrchen meist schief in dem Hohlraum der grösseren liegen, wie Fig. 2^m zeigt, ferner, dass die dünnen Röhrchen meist stark gekrümmt sind, während die äusseren Röhrchen gerade verlaufen, was nicht zusammenpasst, und endlich, dass die Organisation der dünnen Röhrchen in keiner Weise in Zusammenhange mit jenen der grösseren gebracht werden kann. Es dürfte daher nicht zu bezweifeln sein, dass in diesen immerhin nur Ausnahmsweise vorkommenden Fällen die kleineren Röhrchen in den Hohlraum der grösseren zufällig hineingeschwemmt worden seien.

In Folge verschiedener Art des Erhaltungszustandes und der Ueberrindung mit Gesteinssubstanz erscheint die Oberfläche der cylindrischen Röhrchen bald mit ringförmig gestellten Punktgrübchen bedeckt und an den Ringflächen deutlich abgegliedert, bald in Folge der Inkrustation ganz glatt und eingeschnürt, oder auch mit Wärzchen bedeckt.

An die Formen aus dem schlesischen Muschelkalke und dem alpinen Wettersteinkalke schliesst sich nun eine Reihe abweichend gestalteter Röhrchen an, deren Beziehung zu dem eben beschriebenen Typus jetzt näher auseinander gesetzt werden soll. Wir sprechen hier zunächst nicht von kleineren oder grösseren Formen, mit engeren oder weiteren Ringabständen, mit dünneren oder dickeren Kanälchen, mit mehr horizontaler oder mehr steiler Stellung dieser letzteren, weil ein Blick genügt, um ihre Zusammengehörigkeit zu den typischen Formen sofort erkennen zu lassen. Selbst Formen, bei welchen anstatt zweier Reihen von Kanälchen auf einem Ringe, deren 4 oder 6 treffen, sind im Uebrigen so übereinstimmend organisirt, dass man auch diese unbedingt hier anschliessen muss, obwohl die Erklärung der vermehrten Reihen von Kanälchen

einige Schwierigkeiten macht. Am wahrscheinlichsten ist, dass die Kanälchen von mehr als 2 Reihen innerhalb eines Ringgliedes, wie sie in der Art aus dem alpinen Muschelkalke von Recoaro und auch im weissen Mendola-Dolomite beobachtet wurden (Taf. D III Fig. 11^a—11^b), aus übereinander liegenden Mündungen der Innenseite entspringen, welche den Kammerscheidewänden entsprechen würden, durch welche wir die Ringe uns getheilt denken müssen, auch wenn alle Kammern vollständig verschmolzen erscheinen. Die äussere Beschaffenheit, die Abgliederung und alle sonstige Verhältnisse bleiben dieselben, wie bei der schlesischen oder Zugspitzart. Auch jene Formen, deren Steinkern wie aus ineinander gesteckten Trichtern zusammengesetzt erscheinen (Taf. D III. Fig. 7, 8, 9 und 10), bieten keine wesentliche Differenzen.

Bei den bisher betrachteten Abänderungen bestehen die cylindrischen Körperchen aus Ringen, die übereinander liegend eine Röhre bilden und meist auch isolirt sich im Gestein vorfinden. Gleichzeitig liegen die Ringflächen nicht eben aufeinander, sondern lassen eine Rinne als Hohlraum zwischen sich, an dem die Schale leicht ein- und abbricht, so dass bei corrodirten Exemplaren die Röhrchen ein tief geringeltes Aussehen erlangen.

Schon bei den Arten mit mehr als 2 Reihen von Kanälchen macht sich eine innigere Verbindung der Ringe unter sich bemerkbar, die Zwischenringhöhlung wird sehr schmal und es scheint, dass ein Zerfallen in einzelne Ringe nicht mehr stattfindet, wie wir diess früher auch schon bei gewissen eocänen Formen gefunden haben. Ein Schritt weiter und die Ringe verwachsen in der Art miteinander, dass weder im Vertikaldurchschnitte ein gliedweiser Absatz in den übereinander stehenden Ringen sich beobachten lässt, noch auch auf der Aussenfläche deutliche ringförmige, regelmässige Einschnürrungen vorkommen. Das Ganze wächst zu mehr oder weniger gleich dicken, walzenförmigen, nur hier und da durch seichte Einschnürungen unregelmässig geringelten Röhrchen, die am einen Ende rundkuppig abschliessen, am anderen Ende offen sind, zusammen. Ein grosser Theil der von Stoppani beschriebenen *Esino-Gastrochaenen* scheint hierher zu gehören. Ich fand wenigstens dergleichen im Esinodolomite, dann in einem Kalke vom Lavatscher Joche bei Innspruck (Dr. Pichler) und im sog. Wetterlingskalke von

Rohrbach. Die Mitte zwischen beiden Gruppen scheinen jene kleinen zierlichen Körperchen einzunehmen, welche bis jetzt nur in Durchschnitten aus dem schwarzen Reiflinger Kalk der Reissalpe und aus einem ähnlichen schwarzen Kalk Tirols, den ich von H. Prof. Pichler erhielt, bekannt wurden. Je nachdem die Schnitte durch die Körperchen gelegt sind, erhält man durch zahlreiche Dünnschliffe ein ziemlich vollständiges Bild derselben. Aus dem Längsschnitte, welcher etwa durch die Mitte geht, erkennt man, dass auch hier ein weiter innerer Hohlraum vorhanden ist, von dem aus sehr weite Kanälchen durch die Wand bis zur Oberfläche verlaufen. Vorstehende Leistchen deuten an, dass die Röhre aus einzelnen Ringen besteht, die aber ohne Zwischenhöhlung aufeinander sitzen und, wie es scheint, keine Neigung haben, sich von einander los zu lösen. Da wo die Ringe zusammenstossen, scheint auf der Aussenfläche der Röhrchen eine wulstige Erhöhung ringförmig zu verlaufen. Auf jede Ringabtheilung treffen zwei Reihen von Kanälchen (Taf. D III Fig. 2 und 5.) Im Querschnitt (Fig. 2^e) werden 12—16 Kanälchen in der Kreisfläche sichtbar. Aehnliche Formen finden sich auch im Muschelkalke von Schlesien (T. D III; Fig. 3 und 4), doch sind diese stark inkrustirt und dadurch fast zum Unkenntlichen entstellt. Wir gelangen endlich zur Betrachtung sehr einfach gebauter Röhrchen des schlesischen Muschelkalkdolomits, wie solche auf Taf. D IV in Fig. 3^a und 3^b dargestellt sind. Ihr guter Erhaltungszustand gestattet eine klare Einsicht in ihren inneren Bau. Wir sehen einen centralen Hohlraum von einer inneren dünnen Cylinderwand umschlossen, um welchen sich ein zweiter äusserer, gleichfalls dünnwandiger Cylinder anlegt Beide sind durch einen Hohlraum in der Weise getrennt, dass zwischen beiden Wandungen ringförmige gestellte Röhrchen durch diesen Hohlraum hindurch beide Cylinder verbinden. Diese Röhrchen sind hohl und ihre Oeffnungen münden einerseits in den inneren Hohlraum, andererseits auf der Aussenfläche des äusseren Cylinders, dadurch eine direkte Verbindung zwischen dem inneren Hohlraum und der Aussenseite herstellend. Am einfachsten scheint die Deutung, dass wir es in diesen Röhrchen mit Formen zu thun haben, bei denen statt zwei auf jeden (theoretisch gedachten) Ring nur ein Reihe von Kanälchen trifft, und dass der Hohlraum zwischen beiden Wänden gleichfalls eine gross-

artige Erweiterung der Zwischenringhöhlung darstelle. Zahlreiche Durchschnitte von Exemplaren, welche ganz von Kalk erfüllt und ganz von Kalk umschlossen sind, liefern in allen Dünnschliffen stets dasselbe Bild, wie es so eben zu geben versucht wurde. Man kann durchaus keine Oeffnungen oder Kanälchen entdecken, durch welche der Zwischenhohlraum nach Innen oder Aussen eine Verbindung besässe. Die Analogie mit den bisher beschriebenen Körperchen ist so auffällig, dass sie wohl naturgemäss an letztere angeschlossen werden dürfen.

Ueberblicken wir nun die ganze, ungemein formenreiche Gruppe von organischen Gebilden, welche wir bisher näher betrachtet haben, so leuchtet trotz der Verschiedenheit in ihrem äusseren und inneren Wesen doch so viel Gemeinschaftliches durch, dass es nicht unnatürlich scheint, sie in einer einzigen Familie zu vereinigen, für welche wir die Bezeichnung *Dactyloporidea* in Vorschlag bringen. Wir versuchen im Folgenden den Charakter dieser Foraminiferenfamilie näher festzustellen.

Familie der Dactyloporideen.

Gehäuse kalkig aus porcellanartig dichter Masse bestehend, von cylindrischer oder tonnenähnlicher Form (abgesehen von abgelösten Ringen und Segmenten) mit einem inneren cylindrischen, ursprünglich mit Sarkode erfüllten Hohlraume ohne Kammer-artige Querwände in der Mitte, am Embryonalende (unten) geschlossen, (in Folge von Abreibung oder Zerstörung der Schale häufig geöffnet), nach oben offen, zusammengesetzt aus einzelnen, vertikal aufeinander liegenden, dadurch zu einer Röhre verbundenen Ringen oder Ringsegmenten, welche auch so fest zusammengewachsen sein können, dass man sie einzeln nicht mehr zu unterscheiden im Stande ist, und daher das Gehäuse rein röhrenförmig gebaut erscheint. Die einzelnen Ringe oder die diesen entsprechenden Theile des Gehäuses bestehen aus einer grösseren Anzahl von innigst miteinander verwachsenen Kammerabtheilungen, von welchen jede entweder einen Hohlraum in sich schliesst (Kammerhöhlung) oder

auch massiv ohne Höhlung aufgebaut ist. Im ersten Falle führen schlauchartige Kanälchen von der Kammerhöhlung in die innere Haupthöhlung, während zwischen den Ringen und Kammern zahlreiche weite, stets einfache, nicht verzweigte, gradgestreckte Kanälchen in radialer Richtung vom inneren Hohlraum bis zur Aussenfläche des Gehäuses verlaufen und hier in grubenförmigen Vertiefungen ausmünden. In einzelnen Arten finden sich neben den Kammerhöhlungen noch sackartig erweiterte sekundäre Höhlungen oder auch an ihrer Stelle ein Hohlring, von welchem aus dann zahlreiche Kanälchen in divergirender Richtung, oft büschelartig oder wie die Finger an der Hand gestellt, aber nie sich verzweigend bis zur Aussenfläche ausstrahlen, während gleichzeitig kurze Kanälchen die Verbindung mit dem inneren Hohlraum herstellen. Bei anderen Arten sind weder Kammerhöhlungen, noch Nebenhöhlungen ausgebildet, oft sind sogar die Ringe bis zum Unkenntlichen verwachsen und es bleiben nur die von dem inneren Hohlraume zur Oberfläche radial verlaufenden Kanälchen als gemeinsame Charaktere der Familie übrig.

Nach den besonderen Verschiedenheiten in der inneren Struktur zerfällt die Familie der *Dactyloporideen* in folgende Genera:

A. Formen mit Kammerhöhlungen.

a) Gehäuse cylindrisch, aus meist leicht sich trennenden Ringen oder Segmenten bestehend, mit grossen Kammerhöhlungen und einfachen Kanälchen, die von der inneren Höhlung bis zur Oberfläche verlaufen, ohne Nebenhöhlungen . . . . . *Haploporella.*

b) Gehäuse cylindrisch, aus mehr oder weniger bis zum Unkenntlichen fest verwachsenen Ringen und grossen Kammerhöhlungen, nebst sack- oder ringförmigen Nebenhöhlungen, von denen die Kanälchen büschelförmig auslaufen . . . . . *Dactyloporella.*

B. Formen ohne Kammerhöhlungen.

a) Gehäuse cylindrisch, mit einfachen, am Ende sackartig erweiterten Kanälchen, welche entweder nicht unmittelbar, sondern durch

büschelförmig von ihnen ausgehenden engeren Kanälchen an der Oberfläche ausmünden, oder direckt bis zur Oberfläche reichen und zugleich gegen ihr Ende zahlreiche engere Kanälchen nach aussen entsenden . . . . . *Thyrsoporella.*

d) Gehäuse cylindrisch, walzenförmig theils mit deutlichen, oft sich ablösenden Ringgliedern, theils mit fest verwachsenen und selbst nicht mehr unterscheidbaren Zusammensetzungstheilen, mit in zwei oder mehreren Ringreihen in jedem Gliede oder auch ohne Unterbrechung kreisförmig übereinander gestellten einfachen Kanälchen . . . . . *Gyroporella.*

e) Gehäuse tonnenförmig aus Gliedern bestehend, welche einen von doppelten Wänden begrenzten ringförmigen Hohlraum umschliessen; letzterer steht durch kurze Kanälchen sowohl mit der inneren Haupthöhlung als mit der Aussenfläche in Verbindung *Uteria* Mich.

f) Angeschlossene Formen von noch nicht sicher ermittelter Stellung.

Indem ich mich nunmehr der Speciesbeschreibung zuwende, ist meine Hauptaufgabe auf die Schilderung der in den älteren Kalksteinbildungen eingeschlossenen Formenreihe der *Gryoporellen,* welche früher als *Nulliporen* bezeichnet wurden, gerichtet, soweit solche bisher bekannt sind, und soweit wir das von vielen Seiten mit dankeswerther Liberalität zur Benützung überlassene Material reicht. Zur Vervollständigung der Uebersicht über diese Familie habe ich auch einige der wichtigsten Arten der übrigen Gattungen in kurzen Beschreibungen hinzugefügt, um die während meiner Untersuchungen gewonnenen Resultate nicht verloren gehen zu lassen, ohne desshalb eine erschöpfende Monographie liefern zu wollen, wozu mir das nöthige Material zur Zeit abgeht.

In Bezug auf den Begriff und die Feststellung von Art, sind hier dieselben Grundsätze befolgt, über welche ich mich bereits früher (Beitrag z. Foraminif. d. Num. Abh. d. bayer. Ac. d. Wiss. Bd. X. 2. Abth. S. 685) ausführlich ausgesprochen habe. Ich erkläre ausdrücklich, dass ich es für kein unsühnbares Verbrechen erachte, wenn es vorkommen sollte, dass solche Formen vorläufig als Arten unterschieden wurden, welche sich bei besserem Material nur als individuelle Abänderungen innerhalb des jeder Art zukommenden Spielraums von Formdifferenzen zu erkennen geben sollten. Eine gewisse Unsicherheit muss von vorn-

herein da zugegeben werden, wo Formen bloss aus Durchschnitten bekannt sind, oder rings von fester Kalkmasse dicht umschlossen vorkommen. Es bleibt hier nur die Wahl, solche von anderen unterscheidbare organische Körper unbeachtet zu lassen, oder sich durch eine vorläufige Bezeichnung nach der Weise der Artenunterscheidung über den Umfang und Begriff dieser Formen zu verständigen. Eine andere Bedeutung haben ja ohnehin die meisten paläontologischen Bezeichnungen nicht, wenn sie sich nicht auf ganz vollständig erhaltene Körper und auf erschöpfende zoologische Merkmale stützen, die ja fast durchweg bei Versteinerungen fehlen.

Generelle und spezielle Beschreibung.

Haploporella.

Gehäuse cylindrisch mit innerer cylindrischer Höhlung, aus mehr oder weniger leicht sich trennenden oder verwachsenen Ringen oder Ringsegmenten, die Ringe aus abgegrenzten Kammerabtheilungen, jede mit einer inneren Höhlung bestehend; die Kammerhöhlungen sind durch Kanälchen direkt mit der inneren Höhlung, und diese durch zahlreiche Zwischenkanälchen mit der Oberfläche in Verbindung gesetzt.

Ein Theil dieser Formen ist sicher unter Defrance *Larvaria* (Dict. d. sc. nat. XXV p. 287) einbegriffen und durch Parker und Jones, dann durch Carpenter als *Dactylopora* bezeichnet worden.

Haploporella eruca Park. e. Jon. sp.

Dactylopora eruca Parker a. Jones (Ann. a. nat. hist. 3 Ser. P. V. 1860; S. 473.)
Dactylopora eruca Carpenter (Introd. to the Study of Foram. S. 128; Pl. X; T. 1—8.)

Diese Art (Taf. D. I Fig. 1.) ist bis jetzt bloss in Ringabschnitten bekannt; diese sind kreisförmig gebogen, aus blasig angeschwollenen, durch Einschnürungen deutlich getrennten Kammern bestehend, durch deren Vereinigung die etwas abgeflachten Aussenseiten und hochgewölbte Seitenflächen entstehen (s. Taf. D I Fig. 1 a und c). Letztere

laufen nach Innen verjüngt in zitzenartigen Spitzen aus, welche schliesslich in Mitten einer verdickten ringförmigen Wulst die von den Kammerhöhlungen kommenden Mündungen der Kanälchen tragen (lit. m in Fig. 1[b]). Die gewölbten Seitenflächen sind in ihrer Mitte meist etwas eingedrückt. Stellt man horizontale und vertikale Durchschnitte der Körperchen durch Einschluss in Kanadabalsam und mittelst feiner Dünnschliffe her (Fig. 1[d] und 1[e]), so bemerkt man aussen den Kammerhöhlungen (c. c.) und deren Mündungskanälchen (m. m.) in der äusserst dichten, wie fein punktirt aussehenden Schalensubstanz einzelne äusserst feine Kanälchen (r. r.) hauptsächlich in der Richtung der die einzelnen Kammern trennenden Flächen, welche durch eine lichtere Farbe der Schalensubstanz angezeigt werden.

Der Umstand, dass auf den Seitenflächen genau solche rinnenförmige Einschnürungen (t. t.) vorhanden sind, wie bei den Arten mit geschlossenem Ring (*H. annulus; H. reticulata*), in welchen bei der Aufeinanderlage der Ringe die Zwischenbodenkanälchen verlaufen, zwingt zur Annahme, dass die bisher bekanntgewordenen Theile dieser Art nur auseinander gefallene Stücke eines cylinderähnlichen Körperchens seien, dessen Auffinden bis jetzt noch nicht gelungen ist. Länge eines Fragmentes durchschnittlich 0,4 Mm.; Breite 0,1 Mm.

Vorkommen: lebend in den südlichen Meeren; nach Parker a. Jones (a. a. O. S. 474) auch in französichen Tertiärschichten, nach Carpenter (a. a. O. S. 129) im Grobkalke von Grignon.

Abbildung: Tafel D I; Figur 1[a]—1[e].

Haploporella annulus P. e. J. spec.

Dactylopora annulus Parker a. Jones (a. a. O. S. 474.)
Dactylopora annulus Carpenter (a. a. O. S. 129; Pl. X; Fig, 9—14.)

Gehäuse cylindrisch, leicht in einzelne Ringe zerfallend (T. D I Fig. 2[a—e]), die Ringe auf der Aussenfläche gewölbt, durch furchenartige Rinnen in der Richtung der Kammerscheiden turbanartig eingeschnürt, so dass auf der Ringfläche je 16—24 radial verlaufende schmälere Rinnen mit breiteren, in der Mitte meist eingedrückten Wülsten wechseln. (F. 2[c].) Bei der Aufeinanderlage von Ring auf Ring zu einem cylindrischen

Röhrchen legt sich Rinne auf Rinne, Wulst auf Wulst und es entstehen so die Höhlungen für die radial verlaufenden Zwischenbodenkanälchen (F. 2^{d}). Die Kammerhöhlungen sind gross, rundlich, birnförmig (F. 2^{a-c}) mit verengerten Ausmündungskanälchen, deren Mündung von einer zitzenförmigen Wulst umgeben ist und meist dem oberen Rande des Rings genähert liegt. In Dünnschliffen treten die schon bei *H. eruca* erwähnten Kanälchen, welche die Kammerwandungen durchziehen, in grosser Anzahl deutlich hervor (F. 2^{b}). Ueber die Struktur der Schale ist bereits S. 236 ausführliche Erläuterung gegeben worden. Ringdurchmesser 0,5—0,6 Mm., Ringhöhe 0,1—0,15 Mm.

Vorkommen: Grobkalk des Beckens von Paris ungemein häufig: Grignon, Parnes, Chaumont, Damery, Fontenay, Montmirail, Vaudanevent u. s. w.

Abbildung: T. D I. F. 2^{a}—2^{e}.

Haploporella reticulata Defr. spec.

Laruaria reticulata Defrance (Dict. d. sc. nat. t. XXV. p. 287.)
Dactylopora reticulata Parker a. Jones (a. a. O. S. 474.)
Dactylopora reticulata Carpenter (a. a. O. S. 132 Pl. X. 17 und 18.)

Gehäuse cylindrisch röhrenförmig, nicht leicht in einzelne Ringe zerfallend, die Oberfläche, wenn sie nicht corrodirt ist, geringelt, an den Zusammensetzungsflächen der einzelnen Ringlieder schwach eingeschnürt und durch die Ausmündungsöffnungen der Zwischenkanälchen mit Grübchen in und am Rande der ringförmigen Einschnürungen bedeckt; von diesen Grübchen laufen über die etwas gewölbte Fläche verticale Streifchen, wodurch an der Oberfläche netzförmige Zeichnungen entstehen (T. D I. F. 3^{a} und 3^{b}). Bei verwitterter Oberfläche hommen theilweise sogar die Kammerhöhlungen zum Vorschein (m. F. 3^{b}), so dass dann die Röhrchen mit tiefen Grübchen bedeckt erscheinen und dergleichen Exemplare ein ganz fremdartiges Aussehen gewinnen. Auch auf der Innenfläche laufen ringförmige Rinnen ringsum, in welchen die Mündungen der Zwischenkanälchen und nahe dabei auch jene der aus den Kammerhöhlungen führenden Kanälchen liegen (r Fig. 3^{b}). Die inneren Strukturverhältnisse erweisen sich im Uebrigen wie bei *H. annulus*.

An einem Exemplar, bei welchem der Embryonaltheil erhalten ist (Fig. 3[a]), spitzt sich das Gehäuse kegelförmig zu und schliesst mit einem etwas verdickten Knötchen ab. Ob diese kegelförmige Form des Embryonaltheils der normale sei, lässt sich nach dem einzigen vorliegenden Exemplare nicht behaupten. Grösse des Röhrchen-Durchmessers 0,5 Mm., Höhe einer einzelnen Ringabtheilung 0,2 Mm.

Vorkommen: Grobkalk von Paris, darin sehr häufig; ich fand sie auch im Sand von Beauchamp (sabl. moyen.) in etwas weniger tief eingeschnittenen Exemplaren, so dass die Röhrchen fast walzenförmig erscheinen. Parker und Jones (a. a. O. S. 474) geben als Fundort auch miocäne Schichten von St. Domingo an.

Abbildung. T. D I. Fig. 3[a] und 3[b]).

Haploporella scrobiculata n. sp.

Gehäuse cylindrisch, walzenförmig, fast ohne bemerkbare Ringeinschnürungen, die Oberfläche dicht besetzt von kleinen nach Innen conisch zulaufenden Grübchen, in welchen die Zwischenkanälchen ausmünden; diese Grübchen stehen ringsförmig geordnet und sind von einigen concentrischen Streifchen wie in einen Hof eingeschlossen (T. D. I; Fig. 6). Der innere Bau wie bei den vorausgehend beschriebenen Arten. Grösse des Cylinderdurchmessers etwas mehr als ein Mm.; Abstand der Grübchen in den vertikalen Reihen 0,1 Mm.

Vorkommen in dem unteren Eocänsand von Cuise la Motte, hier ziemlich häufig.

Abbildung: T. D I; F. 6.

Haploporella biscutata n. sp.

Gehäuse cylindrisch, ohne merkliche Einschnürungen, die Oberfläche mit Brillen-ähnlich gestalteten, etwas erhabenen Schildchen bedeckt, welche in horizontalen Ringreihen geordnet stehen. Auf diesen Schildchen liegen in der Mitte etwas abgerundeter Felder (T. D I. Fig. 5[a]) die Mündungen der Zwischenkanälchen, um welche einige concentrische Linien sich herumziehen. Die innere Struktur, welche durch Fig. 5[b] dargelegt wird,

ist wie bei den vorausgehenden Arten. Grösse des Cylinderdurchmessers: 1,0—1,5 Mm.; Ringhöhe: 0,15 Mm.

Vorkommen im unteren Eocänsand von Cuise la Motte.

Abbildung T. D I. Fig. 5^a und 5^b.

Diese Art kommt sehr häufig vor und ist ausgezeichnet durch die Art der Oberflächenverzierung. Man könnte vermuthen, dass die oben unter der Bezeichnung *H. scrobiculata* beschriebene Form als durch Abreibung der Oberfläche entstandene Exemplare der letzteren Art sich erweisen könnte. Indess habe ich sehr zahlreiche Exemplare und darunter auch abgeriebene verglichen und mich von der Selbstständigkeit beider Arten überzeugt.

Haploporella vesiculosa n. sp.

? *Dactylopora perforata* Park. a. J. (a. a. O. S. 474.)

Gehäuse cylindrisch, auf der Oberfläche mit nicht zahlreichen, in Ringreihen geordneten grossen, blasenartig angeschwollenen Knötchen (T. D I. F. 4^a), jedes einer Kammerabtheilung entsprechend, bedeckt; zwischen diesen ziehen sich tiefe Furchen durch, in denen die Mündungen der Zwischenkanälchen liegen (T. D I. Fig. 4^b). Auf der inneren Fläche der Röhrchen finden sich entsprechend der Aussenfläche gleichfalls knotige, aber minder hohe Anschwellungen (T. 4^c), auf deren Mitte die Mündungen (r r) der Kammerhöhlungen liegen, während in den Zwischenfurchen die Mündungen der Zwischenkanälchen sichbar sind. (c c). Im inneren Bau findet sich keine Abweichung gegen jene der bisher betrachteten Arten. Grösse des Röhrchendurchmessers 1 Mm.; Höhe eines Ringgliedes 0,35 Mm.

Vorkommen im Grobkalke von Parnes.

Abbildung: T. D I; Fig. 4^a—4^c.

Es wäre möglich, dass diese Form übereinstimmt mit der von Parker und Jones (a. a. O. S. 475) beschriebenen *Dactylopora perforata*. Ich konnte mich indess mit Sicherheit nicht daran überzeugen und glaubte es desshalb vorziehen zu müssen, diese Form durch Beschreibung und Abbildung fester zu begründen.

Haploporella glandulosa d'Arch. spec.

Prattia glandulosa d'Arch. (Mem. d. l. s. geol. d. Fr. 1850 t. III p. 407; pl. VIII; f. 20.)
Prattia glandulosa Bronn (Leth. geogn. 3 Ausg, S. 28 T. XXXV^3 F. 28.)
Dactylopora glandulosa Park. u. Jon. (a. a. O. S. 475.)
Dactylopora glandulosa Carpenter (a. a. O. S. 133; Pl. X. Fig. 25—28.)

Nach Carpenter*) ist die mit *H. reticulata* nahe verwandte Form dadurch ausgezeichnet, dass die Kammern mehr als gewöhnlich durch grosse Zwischenräume geschieden, d. h. mit sehr dicken Wandungen versehen, blasenartigdick angeschwollen und nicht, wie bei *H. reticulata*, in deutliche Ringe geordnet, sondern in der Art in schiefen Reihen stehen, dass eine Kammer der einen Reihe in eine Bucht der darauffolgenden Reihe zu stehen kommt u. s. w. Die Kammerhöhlungen münden in der Mitte zitzenförmiger Warzen auf der inneren Fläche, wogegen die zwischen den dicken Wandungen liegenden Kanälchen bald sehr weite, bald porenartig feine Mündungen besitzen. Die Oberfläche des Gehäuses ist durch unregelmässig gestellte Grübchen rauh. Grösse des mittl. Durchmessers 5—6 Mm.

Vorkommen in den Eocänschichten von Biaritz.

Haploporella fasciculata n. sp.

Gehäuse röhrenförmig, auf der Aussenfläche besetzt mit kurzen, oben etwas abstehenden, schmalen ringförmig gestellten Röhrchen (?) von welchen jedes einer Kammerabtheilung entspricht (T. D I. Fig. 7^a). Die Oberfläche erscheint rauh, vielleicht nur in Folge beginnender Zerstörung. Die innere Organisation (Fig. 7^b) entspricht genau derjenigen der bisher beschriebenen Arten. Durchmesser des Röhrchens 1 Mm.; Höhe eines Ringgliedes 0,5 Mm.

Vorkommen: Sand von Astrupp durch Graf v. Münster gesammelt, jetzt in der paläont. Staatssammlung in München.

Abbildung: T. D I. Fig. 7^a und 7^b.

Von dieser prächtigen Art liegt leider nur ein Exemplar vor, welches G. v. Münster gesammelt und mit vielen feinpunktirten *Acicularien-*

*) Von dieser Art stand mir kein Exemplar zur Verfügung.

ähnlichen Körperchen zusammengestellt als *Dactylopora milleporata* bezeichnet hatte. Da diese Benennung offenbar auf die Acicularien-ähnlichen Nädelchen geht, habe ich den Namen *H. fasciculata* in Vorschlag gebracht.

Haploporella digitata Park. e. Jon.

Dactylopora digitata Park. a. J. (a. a. O. S. 473.)
Dactylopora digitata Carpenter (a. a. O. S. 130 Pl. X. F. 16.)

Parker und Jones, sowie Carpenter bezeichnen eine durch dornartig zugespitzte Kammern ausgezeichnete Form, von welcher man bis jetzt vollständige Exemplare noch nicht kennt, als *Dactylopora digitata.* Die Art scheint, ähnlich wie *H. eruca,* aus einzelnen gekrümmten Segmenten zu bestehen, an welchen die röhrenförmig verlängerten Kammern mit ihren Höhlungen, wie die Spaichen an einem zerbrochenen Wagenrade radial vorstehen. Die strahlenförmig gestellten Röhrchen sind häufig an der Spitze abgebrochen, so dass die Oeffnungen der weiten Kammerhöhlungen dadurch sichbar werden (Taf. D IV. F. 117). Diese Kammern stehen, wie gewöhnlich durch Kanälchen mit dem Innern in Verbindung.

Vorkommen im Grobkalk bei Paris.

Abbildung nach Carpenter T. D IV. Fig. 7.

Ich erwähne hier eine ähnliche Form, die ich im Grobkalke von Parnes' aber nur in einem Exemplar auffand (T. D I. Fig. 15). Ein geschlossener Ring mit 16 ausstrahlenden Röhrchen, von welchen mehrere abgebrochene die Kammerhöhlungen zeigten, während die unverletzten nach Aussen geschlossen waren, erinnert lebhaft an *H. digitata,* wenn diese zu einem vollständigen Ringe ergänzt gedacht wird. Das einzige Exemplar ging leider nach der Abbildung zu Verlust; doch wollte ich die Form nicht unerwähnt lassen.

Haploporella marginoporella Michel. sp.

Clypeina marginoporella Michelin (Icon. zooph p. 177 pl. XLVI.; f. 27.)
Dactylopora marginoporella Park. a. Jon. (a. a. O. S. 474.)
Dactylopora clypeina Carpenter (a. a. O. S. 131.)

Nach Carpenter besteht die bisher nur in einzelnen Gliedern

bekannte Art aus länglich kolbenförmigen Kammern, welche schief zur Achse gestellt, in einer Anzahl von 16 miteinander zu einem conischen Ring verwachsen sind, und eine trichterförmige Höhlung im Innern umschliessen. Die Kammern haben länglich gestreckte Kammerhöhlungen, welche oben am Ende des Trichters ausmünden (T. D. IV. F. 6^a und 6^b). Ist die Oberfläche abgerieben, so werden die Höhlungen sichtbar und solche Exemplare sind es, welche Michelin beschrieben hat und durch welche er veranlasst wurde, sie zu den *Tubuliporen* zu rechnen.

Dactyloporella*)

Gehäuse cylindrisch — röhrenförmig, ei- oder tonnenförmig, Ringe unablösbar verwachsen mit zahlreichen Kammern und Kammerhöhlungen neben sackförmigen oder hohlringartigen Nebenhöhlungen, mit welchen die Kammerhöhlungen durch kurze Kanälchen verbunden sind und in welchen sie, anstatt direkt in die innere Haupthöhlung, ausmünden. Von den Nebenhöhlungen, welche durch feine Kanälchen mit dem Innern in Verbindung stehen, gehen Zwischenkanälchen aus; letztere münden an der Aussenfläche in grubigen Vertiefungen.

Dactyloporella cylindracea**) Lam.

Dactylopora cylindracea Park. a. Jones (a. a. O. S. 476.)
Dactylopora cylindracea Carpenter part. (a. a. O. S. 134, Pl. X. Fig. 24.)
Dactylopora cylindracea Bronn (Leth. S. 256 T. XXXV. Fig. 27.)

Gehäuse ziemlich gross, cylindrisch röhrenförmig, dünnwandig mit einer ringartig verlaufenden Nebenhöhlung, von welcher aus zahlreiche Zwischenkanälchen zur äusseren Fläche verlaufen. Grösse des Durchmessers 3,5—4 Mm.; Länge 10—12 Mm.

*) Behufs Uebereinstimmuug mit den übrigen Namen dieser Gruppe würde *Dactyloporella* statt *Dactylopora* anzuwenden sein.

**) Da über die zu dieser Art gehörigen Formen grosse Unsicherheit herrscht, beschränke ich mich hier auf wenige Synonyme. Näheres bei Carpenter S. 127. Parker u. Jones S. 476 und 477, Bronn Leth. S. 256 und 257.

Vorkommen im Grobkalke von Paris und in den Eocänbildungen von Belgien.

Abbildung: Taf. D I. F. 9^a und 9^b.)

Dactyloporella saccata n. sp.

Dactylopora cylindracea auct. part.
Dactylopora cylindracea Carpenter (a. a. O. S. 134; Pl. X.; Fig. 29.)

Gehäuse sehr gross, röhrenförmig, langgestreckt bis länglich eiförmig, mit sackartig erweiterten Nebenhöhlungen (a. a. in T. D I. Fig. 10), in welche die seitlich liegenden Kammerhöhlungen (b) durch schief stehende Kanälchen (d) einmünden. Die Organisation ist im Uebrigen wie bei der vorausgehenden Art.

Vorkommen im Grobkalke von Paris.

Abbildung Taf. D I. Fig. 10.

Carpenter vereinigt diese Form nebst noch vielen anderen mit *D. cylindracea*. Was die Trennung von *D. saccata* von *D. cylindracea* anbelangt, so bedarf diese, wie ich glaube, von meinem Standpunkte aus keine weitere Rechtfertigung. Auch Parker und Jones haben mehrere Arten bezeichnet (*D. polystoma, D. Bambusa*), welche Carpenter auch nur als durch Abreibung entstellte Exemplare der *D. cylindracea* gelten lassen will. Was weiter die Vereinigung von Defrance's *Polytrype elongata* mit dieser Art anbelangt, die auch Parker und Jones annnehmen, so zweifle ich nicht, dass hier verschiedene Arten vorliegen. Wie aber die Abgrenzung herzustellen sei, das kann nur durch sehr reiches Material festgestellt werden, das mir mangelt. Aehnliches gilt von den übrigen noch hierhergezogenen Formen und Arten, unter denen sicher ganz Verschiedenartiges begriffen ist.

Dactyloporella miocaenica Karrer.

Dactylopora miocenica Karr. (Sitz. d. Ac. d. Wiss. in Wien; nat. Cl. Bd. 58; 1868 S. 37.)

Gehäuse dick, ei- oder kurzwalzenförmig, klein, dickwandig mit nicht zahlreichen Ringlagen (im vertikalen Sinn), aber mit sehr zahlreichen Kammern und Kammerhöhlungen (b in Taf. D I, Fig. 11^c). Die

ringförmigen Nebenhöhlungnn (a.) sind durch dicke Wände von dem kegelförmigen inneren Hohlraum (i) getrennt, jedoch durch feine, diese Wand durchbrechende Kanälchen mit jenen in Verbindung gesetzt, (e. e) während nach Aussen zahlreiche Zwischenkanälchen (c. c) ausstrahlen und in kleinen Grübchen, welche die Aussenfläche bedecken, ausmünden. Grösse des Durchmessers im Mittel 1,5 Mm.; Länge 1,0—1,5 Mm.; Höhe einer Kammerlage 0,2 Mm.

Vorkommen: In den miocänen Schichten aus Banat, Siebenbürgen und Ungarn insbesondere von Kostej und Lapugy, (Karrer, v. Hantken).

Abbildung: T. D I. Fig. 11^a—11^c. Die ausführliche Schilderung dieser sehr ausgezeichneten, von Karrer entdeckten Art ist bereits in dem allgemeinen Theile gegeben.

Dactyloporella elegans n. sp.

Gehäuse kurz, cylindrisch röhrenförmig, mit halbkugeliger Wölbung am Embryonalende geschlossen (T. D I; Fig. 12^a), mit nicht zahlreichen Ringgliedern und nicht zahlreichen, aber grossen Kammerhöhlungen. Die Oberfläche in gut erhaltenem Zustande ist von zahlreichen Punktgrübchen bedeckt, welche in 2 Ringreihen auf jedem Gliede geordnet sind; wenn die Oberfläche abgerieben ist, werden die Kammerhöhlungen sichtbar und dadurch erscheint die Oberfläche grubig rauh (a. a). Es ist wahrscheinlich, dass sich ringförmig verlaufende Nebenhöhlungen, wie bei der vorigen Art vorfinden; der zerstörte Zustand des einen vorliegenden Exemplares gestattete nicht, diess mit Sicherheit zu erkennen. Man bemerkt nur grosse Einbuchtungen (z in Fig. 12^b) an den Stellen, auf welche die Hohlringe hintreffen. Im Uebrigen ist die Bildung genau analog, wie bei der vorigen Art. Grösse des Durchmessers 1 Mm.; ganze Länge 2 Mm.; Höhe eines Gliedes 0,15 Mm.

Vorkommen in den Oligocänschichten von Dax, aus welchen diese Art Gr. v. Münster aufgesammelt und mit vielen anderen vereint als *Dactylopora elegans* in seiner Sammlung aufbewahrte (jetzt in den Samml. des paläont. Museums in München).

Abbildung: Taf. D I; Fig. 12^a und 12^b. Da der Hohlring nicht mit Sicherheit nachgewiesen ist, bleibt die Zutheilung dieser schönen Art zu *Dactyloporella* vorläufig eine nur provisorische.

Thyrsoporella.

Gehäuse cylindrisch-röhrenförmig, aus nicht auseinander fallenden Ringgliedern bestehend; die Ringglieder lassen die Einzelnkammern als getrennte nicht mehr unterscheiden, es fehlen alle Kammerhöhlungen, dafür aber führen sehr weite Kanäle aus dem inneren Hohlraum nach Aussen entweder direkt, oder indem sie sich sackartig erweitern und kleinere Kanälchen zur Aussenfläche büschelförmig entsenden; in ersterm Fall gehen zahlreiche feinere Kanälchen gegen Ende der breiten Kanäle zur Oberfläche ab.

Ein Blick auf die Zeichnungen (Taf. D I, Fig. 13 und 14) wird genügen, um zu zeigen, dass wir es nicht, wie es scheinen könnte, mit an der inneren oder äusseren Fläche abgeriebenen oder zerstörten Formen thun haben. So sehr die weiten Kanälchen auch, namentlich in den sackartigen Erweiterungen, den Kammerhöhlungen ähnlich werden, so können sie gleichwohl nicht als solche betrachtet werden, weil sie die Zwischenkanälchen entsenden, z. Th. auch direckt an der Aussenfläche ausmünden. Ich habe alle Sorgfalt darauf verwendet Kammerhöhlungen aufzufinden, ohne jedoch solche entdecken zu können. Es bilden die Formen dieses Geschlechtes, welche äusserlich den Vorausgehenden noch sehr ähnlich sehen, einen Uebergang zu den *Gyroporellen.*

Thyrsoporella cancellata n. sp.

Gehäuse cylindrisch-röhrenförmig; die Aussenfläche ist von länglich rektangulären, in der Mitte etwas gewölbten, an den Zusammenstossungsfugen etwas eingebogenen und vertieften Feldchen gebildet, von denen 6 in dem Umkreis der Röhrchen an den horizontalen Fugen etwas verschoben aneinander schliessen; an den vertikalen Fugen entstehen durch den Zusammenschluss vertikale Rinnen, so dass die Röhrchen wie cannelirt erscheinen (T. D I. Fig. 14[a]). Jedem solchen Feldchen der Aussenfläche entspricht eine weite Mündung auf der Innenfläche (c. c in Fig. 14[b]), deren Kanal sich nach Innen sackartig erweitert (r. r), dann abschliesst und zahlreiche Zwischenkanälchen zur Aussenfläche entsendet; ihre Mündungen bilden hier auf den erwähnten Feldchen

je 4 Reihen Punktgrübchen. Grösster Durchmesser der Röhrchen 0,45 Mm.; Höhe der schildartigen Feldchen 0,1 Mm.

Vorkommen im Grobkalke von Parnes.

Abbildung T. D. I; Fig. 14[a] und 14[b].

Diese ausgezeichnete Art ist so eigenthümlich, dass an eine durch Abreibung entstandene Form nicht entfernt gedacht werden dürfte, auch wenn der Erhaltungszustand nicht so vortrefflich wäre, wie er wirklich ist.

Thyrsoporella cribrosa n. sp.

Gehäuse gross, cylindrisch-röhrenförmig (? bloss in Bruchstücken bekannt), mit zahlreichen weiten Kanälchen, welche die dicke Wand von dem inneren Hohlraum bis zur Aussenfläche durchziehen, gegen Aussen sich etwas verengern und hier zahlreiche feine Kanälchen auswärts entsenden (r r in Taf. D I Fig. 13[a]); durch die Ausmündung dieser feinen Kanälchen wird die Oberfläche feingrubig punktirt (Fig. 13[b]), während die abwechselnd gestellten Mündungen der weiten Kanälchen ihr ein fast poröses Aussehen verleihen. Grösse des Cylinderchen vermuthlich über 2 Mm.

Vorkommen im mittleren Eocänsande von Beauchamp.

Abbildung Taf. D I, Fig. 13[a] und 13[b].

Hier dürfte auch *Uteria encrinella* Mich. (Taf. D. IV. Fig. 5[a] und 5[b]) anzuschliessen sein, deren meist strahlig gerippte Endflächen der tonnenförmigen Gehäuse darauf hinweisen, dass bei vollständigem Erhaltungszustande das Ganze aus zahlreichen solchen tonnenförmigen Körperchen aufgebaut sei. Der grosse weite Hohlraum zwischen der inneren und äusseren Wandung (h in Fig. 5[a]) könnte als eine bis zu einem fortlaufenden Hohlring ausgebildete Erweiterung der Kanälchen, wie bei *Th. cancellata* die sackartige Weitung, angesehen werden. Die innere Cylinderhöhlung steht durch 3 Ringreihen feinster Kanälchen, welche die dünne Zwischenwand durchbrechen, mit dem Hohlraum (h), wie dieser durch die in einer doppelt so grossen Anzahl von Ringreihen geordneten feinen Kanälchen mit der Oberfläche in Verbindung. Die oberen und unteren Flächen der Tönnchen sind bald eben, bald etwas gegen Innen eingetieft, bald glatt, bald mit radial verlaufenden

Rinnchen (r r Fig. 5[b]) versehen. Der Durchmesser hat 1,5 Mm.; die Höhe eines Tönnchens 1,0 Mm. Ich fand diese Art sehr häufig im unteren Eocänsand von Cuise la Motte.

Gyroporella.

Gehäuse sehr gross, cylindrisch-röhrenförmig, ringförmig gegliedert, oder ununterbrochen fortlaufend, die dicken Wandungen ohne Kammerhöhlungen bloss von zahlreichen, radial von dem inneren Hohlraum bis zur Aussenfläche verlaufenden Zwischenkanälchen durchbrochen, welche in den ringförmig gegliederten Arten zu je 2 oder mehreren Reihen auf einem Ringgliede geordnet stehen, sonst in abwechselnder Lage dicht neben einander liegen.

Dieser generelle Charakter, der bereits im Allgemeinen Theile näher zu begründen und zu erläutern versucht wurde, erleidet scheinbar, wie bereits dort bemerkt, je nach der Art des Versteinerungsprocesses und dem Grade der Verwitterung die mannichfachsten Modifikationen, welche zu sehr vielen scheinbar unter einander sehr abweichenden Formen führen. Die Schwierigkeiten der Artenunterscheidung und -Erkennung sind daher hier ganz aussergewöhnliche; sie sind um so grösser, je öfter man es mit durch Verwitterung angegriffenen, oder rings im Gestein eingeschlossenen, oder im Dolomite theilsweise als Steinkern freiliegenden Exemplaren zu thun hat. Häufig muss man zu Dünnschliffen, zum Aetzen mit Säuren seine Zuflucht nehmen, um die organische Struktur kenntlich zu machen. Es darf daher auch billiger Weise in diesem schwierigen Gebiete der Paläontologie besondere Nachsicht in Anspruch genommen werden. Man könnte zwar mit einer gewissen Berechtigung die Forderung stellen, den Gegenstand so lange auf sich beruhen zu lassen, bis Alles vollständig in's Klare gestellt wäre. Wer sich jedoch faktisch schon mit Alpengeognosie befasst hat, dem wird die Wichtigkeit einer näheren Kenntniss dieser in den alpinen Kalkbildungen so ungemein häufigen, oft fast ausschliesslich vorkommenden organischen Ueberreste in hohem Grade erwünscht sein, auch selbst, wenn man nur provisorische Resultate als Anhaltspunkte für die Unterscheidung der verschiedenen Formen gewonnen hätte. Sie sind wenigstens

Stufen, auf welchen spätere Forschungen mit reicherem Material und besseren Kräften sich zu sicheren Ergebnissen emporschwingen können!

Gyroporella annulata Schafh. spec.

Nullipora annulata Schafhäutl (N. Jahrb. 1853 S. 299 T. VI; Fig. 1.)
Chaetetes annulata Schafh. spec. Gümbel (Geogn. Besch. d. bayer. Alpen 1861 S. 241 und 255.)
Gastrochaena obtusa Stopponi partim (Pal. lomb. Petrif d'Esino. p. 76 pl. 16 fig. 7 excl. cot.)
Diplopora annulata Schafhäutl (Leth. geogn. v. Südb. S. 324—327; Taf. 65^e Fig. 6; T. $65^{e\,2}$ Fig. 4.)
Diplopora porosa Schafhäutl (das. S. 327 t. 65^e Fig 9—15.)
Diplopora articulata Schafhäutl (das. S. 327 T. 65^e Fig. 16—18.)
Nullipora annulata auctorum. var.
Dactylopora aff. Gümbsl (N. Jahrb. 1866 S. 565.)
Dactylopora spec. Reuss. (Sitz. d. geol. R. in Wien 1866 S. 201 und 1867 S. 3.)
Diplopora annulata Schafh. (N. Jahrb. 1867 S. 261.)

Gehäuse cylindrisch-röhrenförmig, fast gleichdick gradgestreckt, am Embryonalende durch eine halbkugelige Wölbung geschlossen, oben offen, zusammengesetzt aus ziemlich hohen, schwer sich ablösenden Ringgliedern, durch deren Zusammensetzungsfugen die Röhrchen gegliedert oder geringelt erscheinen. In Folge mehr oder weniger stark fortgeschrittener Verwitterung entstehen an diesen Zusammensetzungsfugen tiefe, etwas schief nach Innen geneigte rinnenförmige Einkerbungen, so dass dadurch Steinkerne gebildet werden, welche aus abwechselnd vorstehenden wulstigen Ringen und scharf eingeschnittenen Rinnen zusammengesetzt erscheinen. An gut erhaltenen Exemplaren wird jedes Ringglied von zwei Reihen ringförmig gestellten ziemlich weiten Kanälchen durchzogen, welche von der inneren Haupthöhlung etwas schief nach aufwärts bis zur Oberfläche reichen und hier in grubigen Vertiefungen ausmünden, so dass dadurch die Oberfläche etwas rauh erscheint. Eine weitere Erläuterung der inneren Beschaffenheit wird nach Beschreibung der hierher gehörigen, ähnlich organisirten Arten später gegeben werden. Die Grösse der Röhrchen erreicht im Durchmesser 4 Mm.; in der Ringhöhe 0,8 Mm.

Vorkommen in den dem Wettersteinkalk analogen Kalk- und Dolomitbildungen der nördlichen, wie südlichen Kalkalpen durch den ganzen Zug derselben von der Schweiz bis nach Ungarn; das Hauptverbreitungsgebiet in den Nordalpen ist der sog. Wettersteinkalk und

Dolomit durch die bayerischen und Tiroler Alpen von der Zupspitz bis nach Berchtesgaden (Torenner Joch); in den Südalpen bei Trient, Roveredo von mir in vielen Rollstücken beobachtet, in weissen Dolomite der Mendola von P. Pichler und mir gesammelt, von Latemar, Sol Schedia, Cislon nach v. Richthofen, in den österr. Alpen von der Schwarzau (geol. Reichsanstalt in Wien), in Ungarn aus dem Csiker Berge W. von Bada Eors. und von Hradeck (geol. Reichs. in Pest); von dem Ofner Berg (selbst gesammelt). Exemplare aus den geol. Reichsanstalten von Wien und Pest verdanke ich der Güte der Direktoren Fr. v. Hauer und v. Hantken. Ich hebe besonders hervor, dass ich aus Schichten von Esino, überhaupt aus Dolomiten, die mit Esino-Schichten identisch sind, keine Exemplare dieser Art zu Gesicht bekommen habe, so reiches Material ich bei Prof. Benecke und bei Director v. Schauroth durchzusehen Gelegenheit fand und soweit ich selbst Beobachtungen anstellen konnte.

Abbildung: Taf. D II Fig. 1^{a} bis 1^{i}.

Gyroporella cylindrica n. sp.

Nullipora annulata (Schafh.) Eck (Zeit d. d. geol. Ges. 1862 YVI. S. 240 und 309.)
Cylindrum annulatum Eck (U. d. Form. d. b. Sandst. u. Mus. in Oberschlesien 1865 S. 86.
Cylindrum annulatum (Schafh. sp.) Roemer Geol. von Oberschlesien S. 142 Taf. 11 F. 1—4.)

Gehäuse wie bei der vorigen Art, nur von geringeren Dimensionen mit niedrigeren Ringgliedern und feineren Kanälchen. Grösse der Röhrchen im Durchmesser 2,5 Mm.; Höhe der Ringe 0,5—0,6 Mm.

Vorkommen: bis jetzt bloss im Muschelkalke von Oberschlesien und in einem dem Retzienkalke benachbart vorkommenden schwarzen Kalk von Pertisau in Tirol (Sendung von Prof. Pichler).

Abbildung Taf. D II Fig. 2^{a}—2^{n}.

Nach sorgfältigen und an einem reichen Material angestellten Vergleichungen konnte ich mich nicht zu einer Zusammenziehung der vorausgehenden alpinen und der schlessischen Art entschliessen, obwohl die Unterschiede hauptsächlich nur in Grössenverhältnissen liegen. Indessen gewinnen diese bei so einfach organisirten Arten eine erhöhte Bedeutung. Auf demselben Principe stützt sich auch die Unterscheidung der nachfolgenden Species, die mit demselben stehen bleiben oder fallen.

Gyroporella dissita n. sp.

Gehäuse, wie bei den vorausgehenden Arten, der Durchmesser der Röhrchen beträgt jedoch 2 Mm.; dabei sind die Ringglieder sehr hoch (1 Mm.) und von weniger zahlreichen, aber weiteren Kanälchen durchzogen (Taf. D III Fig. 1.)

Bis jetzt ist diese Art nur aus Durchschnitten und Dünnschliffen rings eingeschlossen im Gesteine bekannt. Diese Durchschnitte zeigen aber so tiefe Einschnitte an den Ringfugen und verhältnissmässig sehr starke, weit auseinander stehende Wülste, wie sie bei der normalen *G. annulata* nie beobachtet wurden, wesshalb dieser Eigenthümlichkeit durch die Aufstellung einer besonderen Art Rechnung getragen wurde.

Vorkommen ziemlich häufig im Wettersteinkalke der Zugspitzgruppe, selten in weissen Kalk von Schwarzau (geol. Reichsanst. in Wien).

Abbildung: Taf. D III, Fig. 1.

Gyroporella debilis n. sp.

Gehäuse, wie bei den vorausgehenden Arten, bei einem Durchmesser von 4 Mm. jedoch aus sehr niederen Ringgliedern von nur 0,5 Mm. Höhe bestehend; die Kanälchen sind zahlreicher und feiner, als bei allen vorausgehenden Arten.

Vorkommen: bisher nur aus Durchschnitten des Mendoladolomits (Sendung der Prof. Pichler) bekannt.

Abbildung: Taf. D II Fig. 3^a und 3^b.

Gyroporella macrostoma n. sp.

Gehäuse, wie bei den vorausgehenden Arten, so gross wie bei *G. annulata*, aber mit sehr hohen Ringgliedern (1,5 Mm.) und weniger zahlreichen, aber sehr weiten Kanälchen.

Vorkommen: Auch diese Form ist bis jetzt nur in dem Mendoladolomite (Sendung von Prof. Pichler) gefunden worden.

Abbildung: Taf. D II; Fig. 4^a und 4^b.

Zur Vervollständigung der im Vorausgehenden gegebenen Speciesbeschreibung dienen noch folgende Bemerkungen. Sie beziehen sich theils auf *Gyroporella annulata*, theils auf *G. cylindrica*, die eine wesentliche Verschiedenheit in ihrer inneren Organisation nicht erkennen lassen.

Bei wohlerhaltenen Exemplaren sind an der Oberfläche die Fugen der aufeinander stehenden Ringglieder als schwache Rinnen stets sichbar; bei verwitterten Exemplaren zeigen sich hier oft tiefe Einkerbungen. Die Oberfläche erscheint dem unbewaffneten Auge glatt, erst unter Beihilfe der Loupe treten die feinen, in Ringreihen geordneten Punktgrübchen der Mündungen zahlreicher Kanälchen zwischén feinen warzenförmigen Unebenheiten hervor (T. D II F. 2^b). Die einzelnen Ringglieder, die sich namentlich bei *G. cylindrica* leicht abzulösen scheinen, haben im Querschnitt eine rhombische Form mit abgerundeten Ecken (Fig. 2^c) und eine rinnenartige Einbuchtung in der Nähe des inneren Randes (Fig. 2 lit. z), so dass durch diese bei der Aufeinanderlage der Ringglieder ein ringförmiger Hohlranm gebildet wird. Ueberrindet tritt dieser in Form eines Hohlrings bei ausgewitterten Exemplaren (r und rr in Fig. 2^h) in auffallender Weise hervor. Die nach Innen gerichtete Fläche ist in der Mitte schwach eingebuchtet, daher die innere, den ziemlich weiten Haupthohlraum der Röhrchen umschliessende Fläche mit ringförmigen Rinnen und wulstigen Erhöhungen versehen ist, welche an den Zusammenstossfugen etwas ausgezackt oder gelappt und durch schwache vertikale Streifchen schwach cannallisirt (Fig. 2^c) sind. An diesen ausgezackten Fugen liegen auch die Mündungen der zahlreichen, von hier bis zur Oberfläche etwas schief nach oben verlaufenden Kanälchen, deren je 2 Reihen in Folge des Versteinerungsprocesses durch eine vorragende Wulst vereinigt auf den Steinkernen als zierliche Röhrchen hervorzutreten pflegen. Oft sind die Kanälchen nur theilweise von Gesteinssubstanz erfüllt und es sitzen dann die Reste derselben wie kleine Höckerchen auf der wulstigen Vorragung. Ist die äussere Schalenoberfläche entweder durch eine Inkrustirungsüberrindung oder z. Th. in Substanz selbst erhalten, so umgiebt diese wie eine Rinde den inneren mit Röhrchen geschmückten Steinkern Fig. 2^i). Nach meiner Auffassung gehören die auf einer vorspringen Ringwulst beisammen stehenden zwei Reihen von Kanalröhrchen zwei verschiedenen Ringgliedern an, denn man nimmt bei den durch Zerfallen isolirten Ringgliedern, deren Inneres sichtbar ist, oben und unten nur eine Reihe derartiger Röhrchen wahr (Fig. 2^d). Bei dem Dünnschliff Fig. 2^e sind beide Reihen gleichzeitig sichtbar in Folge der Durchsichtigkeit der dünnen Gesteinsmasse. Die Fig. 2^h lässt

neben den Röhrchen auch die z. Th. nur überrindeten, daher als Hohlringe sich darstellenden Zwischenrinnen zwischen 2 Ringgliedern im Aufbruch und theilweise geschlossen, wie auch der Dünnschliff Fig 2^{v} in rr erkennen, welche in derselben Figur oben, wo der Durchschnitt mehr durch die Mitte gelegt ist und ebenso in Fig. 2^{n}, in ihrer Form auf das lebhafteste an Kammerhöhlungen erinnern. Von der Abwesenheit dieser glaube ich mich übrigens bei diesen Formen sicher überzeugt zu haben. Die horizontalgeführten Durchschnitte Fig. 1^{i} und 2^{g} liefern den direkten Beweis für das Vorhandensein eines Hohlrings zwischen zwei Ringsysteme, die in beiden derselben durchschnitten sind. Am Embryonalende (Fig. 2^{i}) stehen die Kanälchen dicht gedrängt und man kann keine Abgliederung mehr wahrnehmen. Man beobachtet dergleichen Enden ziemlich häufig, sogar in der ursprünglichen Form des Gehäuses (Fig. 2^{k}), wobei auch, wie bei Fig. 2^{c}, die innere Fläche des Gehäuses mit den Mündungsöffnungen der Kanälchen sichtbar wird. Senkrecht verlaufende feine Rinnen verbinden diese Oeffnungen unter sich und verleihen der Fläche ein netzförmiges Aussehen. Dass die am Rande der Oeffnungen bemerkbare lappige Auszackungen erst in Folge einer beginnenden Verwitterung zum Vorschein kommen, ist sehr wahrscheinlich.

Wenn in den durch Fig. 1^{g} und 2^{m} dargestellten Durchschnitten zwei ineinander gestellte Röhrchensysteme zu der Vermuthung Veranlassung geben könnten, dass ursprünglich alle derartige Röhrchen in entsprechender Weise zusammengesetzt gewesen und nur in Folge einer erlittenen theilweisen Zerstörung isolirt worden seien, so ist dieser Annahme die Thatsache entgegenzuhalten, dass in vielen Hunderten von untersuchten Exemplaren im besten Erhaltungszustande für eine solche Zusammensetzung aus zwei Röhrchensystemen kein Anhaltspunkt gewonnen werden konnte. Die dargestellten Verhältnisse dürften daher auf eine zufällige Ineinanderschiebung von ganz unabhängigen Exemplaren zurückzuführen sein. Ein ähnliches Verhältniss stellt auch Fig. 1^{z} dar; hier ist die Ausfüllungsmasse des inneren Hohlraums durch Verwitterung in Form eines Zapfens, der wie ein Pistill im Innern isolirt steht, ausgebildet. Wie stark übrigens auch schon vor dem Einschluss der organischen Körperchen in die Gesteinsmasse durch Corrosion gelitten hat, davon giebt der Durchschnitt Fig. 1^{x} ein lehrreiches Beispiel. Hier sind die

äusseren Schalentheile fast ganz zerstört und die Röhrchenwand durch tiefe Einschnitte von Innen und Aussen unregelmässig gezackt und zerschnitten. Namentlich an den Ringfugen (z. z.) erscheinen diese Einschnitte sehr tief, und zugleich auch in hohem Grade unregelmässig. Dadurch dass die Ausfüllungskalkmasse eine etwas dunklere Färbung besitzt, als die Kalkmasse der ursprünglichen Schalensubstanz, werden auch hier und da die Kanälchen (c. c.) sichtbar.

Wir reihen hier die Beschreibung mehrerer durch ihre verhältnissmässig sehr weiten Poren ausgezeichnete Formen an.

Gyroporella pauciforata n. sp.

Gehäuse cylindrisch-röhrenförmig, oft etwas gebogen, von geringer Grösse mit deutlichen Ringgliedern und zwei Reihen wenig zahlreicher (10—12) und sehr weiter Kanälchen (T. D III Fig. 2^a und 2^e) in jedem derselben. Die Oberfläche ist durch etwas vorstehende Wülste deutlich geringelt und durch die Ausmündungsöffnungen der Kanälchen mit Grübchen bedeckt. Im Durchmesser haben die Röhrchen 2—2,5 Mm.; in der Ringhöhe 0,6—0,7 Mm. Bisher sind nur Exemplare im dichten Kalk eingeschlossen bekannt.

Vorkommen im schwarzen Reiflinger Kalk der Reisalpe (Samml. der geol. Reichs. in Wien) und in einem schwarzen Kalke von Pertisau in Tirol (Sendung von Prof. Pichler).

Abbildung: Taf. D III Fig. 2^a—2^e.

Die vertikale Durchschnitte zeigen je nachdem sie mehr durch die Mitte der Röhrchen oder mehr gegen die Seiten hin gelegt sind, bald, wie oben in Fig. 2^e und unten in Fig. 2^a, die innere Haupthöhlung (h) mit den ziemlich dicken Wänden und den diese durchsetzenden weiten Kanälchen (c. c.) nebst dem Reste wulstiger Vorsprünge (o.) an den Zusammensetzungsfugen, bald in den anderen Theilen der Durchschnitte die Wandfläche mit den diese durchziehenden Kanälchen. In Fig. 2^b und 2^d ist der Schnitt nahe an den Seiten hingelegt, und es zeigen sich hier nur Theile der Wandungen mit den Oeffnungen der Kanälchen und den wulstigen Vorspringen. Im horizontalen Durchschnitte (Fig. 2^e) werden, je nach der Lage desselben die Oeffnungen beider oder nur einer Reihe der Kanälchen sichtbar. In der Grösse scheint den Röhrchen ein ziemlich

weiter Spielraum zuzukommen; die Form aus einem tief schwarzen Kalke von Tirol, der ausserdem erfüllt ist von zahlreichen Foraminiferen, namentlich einer stattlichen *Dentalina*, weicht wenig von jener des Reiflinger Kalks der Reissalpe ab. Dagegen konnte nicht mit voller Sicherheit ermittelt werden, ob die Formen aus dem schlesischen Muschelkalke, wie sie die Figuren 3^a und 3^b auf T. D III darstellen, derselben Art beigezählt werden dürfen, da ich mich vergeblich bemühte, durch Dünnschliffe die innere Organisation klar zu machen. Auch Schafhäutl's *Vaginipora pustulosa* (Leth. v. Südb. S. 328; T. 65° Fig. 21^{a-b}) hat einige Aehnlichkeit mit obiger Art, doch wage ich nicht, sie zu identificiren.

Gyroporella minutula n. sp.

Gehäuse wie bei der vorausgehenden Art, doch um die Hälfte kleiner, mit gleichfalls verhältnissmässig weiten, wenig zahlreichen Kanälchen, welche meist so dicht beisammen stehen, dass beide Reihen oft schwierig voneinander zu unterscheiden sind und es das Ansehen hat, als ob nur eine Reihe derselben auf jedes Ringglied treffe. Im Durchmesser haben die Röhrchen 1 Mm.; in der Ringhöhe 0,5 Mm.

Vorkommen mit der vorigen Art im Reiflinger Kalke der Reissalpe, zweifelhaft in dem Muschelkalk Oberschlesiens, in dem schwarzen Kalk von Pertisau in Tyrol und Südwand bei Caprun.

Abbildung: Taf. D III Fig. 4^a und 4^b.

Obwohl diese Form mit der vorigen Art vermengt vorkommt und ihr in allen Verhältnissen der äusseren Form und der inneren Struktur sehr ähnlich ist, so spricht die constant geringere Grösse und das enge Zusammenstehen der Kanälchen doch für ihre Eigenartigkeit. Hierher gehört höchst wahrscheinlich die in Figur 5^a und 5^b auf Taf. D III abgebildete Art aus dem schlesischen Muschelkalke (Himmelwitz). Doch konnte ich mich auch bei dieser Form durch Dünnschliffe nicht über die innere Organisation vollständig genug belehren, um mich für diese Gleichstellung bestimmt auszusprechen.

Eine dritte Reihe von Formen ist durch die stark konische Gestalt der Ringglieder charakterisirt, so dass im Längsschnitte dieselben tutenförmig zusammengesetzt erscheinen. Hierher gehören:

Gyroporella silesiaca n. sp.

Gehäuse nur aus Durchschnitten bekannt. Darnach bildet dasselbe Röhrchen mit schwach vorspringenden ringförmigen Wülsten, die nach unten sich verjüngen, so dass das Ganze wie aus ineinander gestellten Trichtern bestehend erscheint. Bei ausgewitterten Exemplaren treten (T. D III Fig. 6) zahlreiche, feine, stark nach aufwärts gerichtete Kanälchen in 2 Ringen geordnet hervor. Der Röhrchendurchmesser beträgt 2 Mm.; die Ringhöhe gegen 0,6 Mm.

Vorkommen im schlessischen Muschelkalkdolomite (Himmelwitz) und im weissen Mendoladolomite (Sendung von Hr. Prof. Pichler).

Abbildung: Taf. D III Fig. 6 (Schlesien) und Fig. 7^a und 7^b (Mendoladolomit). Diese Art ist auffallend verschieden von allen bisher betrachteten durch die Trichterform der Glieder. In verwitterten Exemplaren entstehen Formen, welche an gewisse Arten der Becherflechte (Cenomyce) erinnern. Ob die Mendolaform genau mit der schlesischen übereinstimmt, ist bis jetzt noch nicht sicher festgestellt; erstere ist etwas grösser.

Gyroporella infundibuliformis n. sp.

Gehäuse bis jetzt nur aus Durchschnitten bekannt; diese zeigen im Vertikalschnitte (T. D III Fig. 8^b) ein aus sehr vielen tutenförmig ineinander steckenden trichterartigen Gliedern bestehendes System, das eine verhältnissmässig enge Haupthöhlung umschliesst. In Verdikal- wie in Horizontaldurchschnitten (F. 8^c) erkennt man die Rinnen der sehr steil nach aufwärts gerichteten, wahrscheinlich doppeltreihigen Kanälchen. Grösse des Durchmessers 5—6 Mm.; Distanz der Glieder 1,4—1,5 Mm.

Vorkommen in dem Mendoladolomit, im Wettersteindolomite der Zugspitz; im Dolomite der Höttinger Alpe.

Abbildung: Taf. D III. Fig. 8^a—8^c.

Diese ausgezeichnete Art ist mit keiner übrigen zu verwechseln, obwohl sie bis jetzt nur aus Durchschnitten bekannt ist; von der bedeutend kleineren vorausgehenden Art unterscheidet sie sich überdiess durch die engen Glieder und steile Stellung der Wände. Vermuthlich

gehört hierher *Diplopora nodosa* Schafhäutl, doch ist diess nicht sicher festzustellen.

Hier schliessen sich noch andere weniger häufig vorkommende, daher nicht genauer untersuchter Formen an. Der Durchschnitt T. D III Fig. 9 stellt ein Exemplar aus dem weissen Kalke der Höttinger Alp (Samml. d. geol. Reichs. in Wien) dar mit tiefen trichterförmigen Einschnitten (r.) und enger Centralhöhle (h). Durch verschiedene Färbungen der das Gehäuse ersetzenden Gesteinsmasse werden zwei Reihen weiter, steil aufwärts gerichteter Kanälchen angedeutet. Ich habe bisher nur ein Exemplar beobachtet.

Aehnlich verhält es sich mit einem Durchschnitte (T. D III Fig. 10) aus dem weissen Dolomite des Csiker Berg in Ungarn (Samml. d. geol. R. in Pest), der vielleicht auf die Form des schlesischen Muschelkalkdolomits hinweist.

Bei einer weiteren Formreihe treffen 4 oder mehr Reihen von Kanälchen auf ein Ringglied des Gehäuses; die Ringe sind enge miteinander verwachsen, aber immerhin äusserlich namentlich bei verwitterten Exemplaren deutlich kenntlich.

Gyroporella triasina v. Schauroth sp.

Chaetetes (?) triasina v. Schauroth (Sitz. d. Ac. d. Wiss. in Wien n. m. Cl. Bd. XVII. S. 527; T. III F. 4 und Bd. XXXIV. 1859. S. 285.)

Gehäuse cylindrisch-röhrenförmig, an der Aussenfläche in grossen Abständen geringelt, reichlich durch Punktgrübchen, den Mündungen der Kanälchen, rauh; die hohen Ringglieder der dickwandigen Röhren sind mit ihren stark zur Achse geneigten Zusammenlagerungsflächen eng verbunden, da sie nur eine sehr schwache rinnenartige Vertiefung besitzen, welche ziemlich weit nach Aussen liegt. Bei verwitterten Exemplaren entstehen seichte, aber breite Eintiefungen an den Ringfugen, so dass die Steinkerne breit geringelt erscheinen. Auf jedes Ringglied treffen 4 Ringreihen feiner Kanälchen, welche steil nach oben gerichtet sind (T. D III Fig. 12^d), so dass man in einem Horizontalschnitte gleichzeitig meist 3 Reihen derselben in verschiedener Höhe durchschneidet. Die Ringglieder sitzen dicht geschlossen aufeinander und man gewahrt nur Spuren von vorhandenen Rinnen auf ihren Endflächen (z in Fig. 12^d).

Grösse des Röhrchendurchmessers 3,0—3,5 Mm.; Höhe der Ringglieder 1,0 Mm.

Vorkommen im alpinen Muschelkalke von Recoaro (v. Schauroth), wahrscheinlich auch im Mendoladolomite (Sendung v. Prof. Pichler).

Abbildung: Taf. D III Fig. 12^a—12^e.

Die dieser Darstellung zu Grunde liegenden Exemplare sind Originale, welche ich der Güte des Hr. Dir. v. Schauroth verdanke. Est ist merkwürdig, dass man im Muschelkalk Oberschlesiens ganz vergebens nach ähnlichen Formen sich umsieht. Dagegen enthält das Material, das mir von der Mendola durch Prof. Pichler gefälligst überlassen wurde, halbausgewitterte Stücke, (Taf. D III F. 13^a und 13^b), welche in Grösse und, soweit sich die Sache verfolgen lässt, in ihrer inneren Organisation nicht wesentlich von den Recoaro-Formen unterscheiden.

Gyroporella multiserialis n. sp.

Gehäuse cylindrisch-röhrenförmig, nicht vollkommen gradgestreckt, mit sehr hohen Ringgliedern, deren Fugen an den Aussenflächen in schwachen, aber deutlich wahrnehmbaren Ringen sichtbar sind; die Kanälchen sind ungemein zahlreich und scheinen in jedem Ringglied in 4 bis 6 Reihen geordnet zu stehen. Diess und die bedeutend grösseren Dimensionen gegen *G. triasina* lässt die Selbstständigkeit der Art nicht bezweifeln. Das Embryonalende ist abgerundet geschlossen. Grösse des Durchmessers 5 Mm., Höhe der Ringe 1 Mm.

Vorkommen im Dolomite der Mendola (Sendung v. Prof. Pichler).

Abbildung: Taf. D III. Fig. 11^a—11^d.

Eine Gruppe, welche hauptsächlich jene Formen der Schichten von Esino in sich fasst, lässt keine Ringabgrenzungen weder äusserlich noch innerlich erkennen, obwohl die Röhrchen durch entfernt stehende ringsumlaufende Einschnürungen oft geringelt erscheinen. Diese Einbuchtungen haben aber mit einer ringartigen Gliederung nichts zu schaffen. Die sehr zahlreichen Kanälchen stehen in gleichmässigen Abständen übereinander, ohne dass sich einem Ringgliede entsprechende Abschnitte in ihrer Aufeinanderfolge bemerkbar machen. Schon durch die weniger gradgestreckten, vielmehr stets etwas gebogenen und gekrümmten Röhrchen gibt sich die Eigenartigkeit dieser Formgruppe auf den ersten Blick zu erkennen.

Gyroporella aequalis n. sp.

Gehäuse gross, cylindrisch-röhrenförmig, schwach gebogen, dickwandig, auf der Aussenfläche ohne erkennbares Zeichen einer Zusammensetzung aus Ringgliedern, gleichmässig verlaufend; durch sehr zahlreiche Grübchen und Wärzchen rauh (T. D IV. Fig. 1^c—1^e). Der Längsschnitt (Fig. 1^e) zeigt eine grosse Anzahl in gleicher Entfernung übereinander stehender, starck nach aufwärts gerichteter weiter Kanälchen ohne bemerkenswerthe Unterbrechung, die eine Ringabgrenzung andeuten könnte. Durch einen horizontal geführten Durchschnitt werden gewöhnlich Kanälchen aus drei verschiedenen Vertikalreihen durchschnitten (Fig. 1^b); ihre Zahl in einer Reihe scheint bis auf 36 zu steigen (Fig. 1^d), jedenfalls ist sie grösser, als bei *Gyroporella triasina.* Das Embryonalende ist halbkugelig geschlossen. Vermuthlich gehört zu dieser Art die *Gastrochaena herculea* Stoppani's (Petref. d'Esino p. 81; pl. 16 Fig. 11 und 12). Bei dem Mangel von Originalexemplaren wage ich jedoch nicht, darüber bestimmt mich auszusprechen. Nicht zu unterscheiden vermag ich dagegen eine Form aus dem sog. Wetterlingkalke von Rohrbach (Samml. d. geol. Reichsanst. in Wien), wenn nicht durch eine unbedeutend geringere Grösse von 6 Mm. im Durchmesser gegen 8 Mm. der typischen Art (T. D III Fig. 14^a und 14^b). Grösse und Anzahl der Kanälchen ist ganz übereinstimmend.

Vorkommen: Die Originalexemplare dieser Art stammen aus einem lichtgrauen Kalk des Höttinger Grabens bei Innsbruck (Sendnng des Prof. Pichler), der wahrscheinlich dem Wettersteinkalke zugehört, wie der Kalk einer 2ten Fundstelle: Hochalpscharte an der Zugspitz. Der weisse Wetterlingskalk der Wiener Geologen*) wird als wahrscheinlich zu den Bildungen der oberen Kreide gehörig angesprochen, was wohl zu bezweifeln sein dürfte; derselbe scheint vielmehr der Trias zugetheilt werden zu müssen. Gehört Stoppani's *G. herculea* hierher, so kommt noch Val di Cino als Fundstätte hinzu.

Abbildung: T. D. IV. Fig. 1^a—1^g; T. D III. Fig. 14^a und 14^b).

Bei den in grösserer Anzahl hergestellten Dünnschliffen fand ich

*) Stur in Jahrb. d. geol. Reichsanst. Bd. XI. S. 46; v. Andrian u. Paul das. Bd. XIV. S. 356; F. v. Hauer das. Bd. XIX S. 529, 538 und 544.

in einem derselben die in T. D IV Fig. 1^g dargestellte, ganz eigenthümliche, durch verschieden gefärbte Kalkmasse kenntlich gemachte Zeichnung, welche genau so wie ein Durchschnitt einer *Haploporella* mit Kammerhöhlungen (c. c.) aussieht und auf eine besondere Species hinweist, die später beschrieben werden wird.

Gyroporella curvata n. sp.

Gehäuse klein, schlank, cylindrisch-röhrenförmig, meist gekrümmt, unregelmässig durch stellenweise Anschwellungen geringelt (T. D IV Fig. 2^b), an der Oberfläche etwas rauh mit zahlreichen Grübchen bedeckt, dünnwandig; die Wand von zahlreichen, ohne Unterbrechung übereinander gestellten Kanälchen durchsetzt (Fig. 2^d). Durchmesser der Röhrchen 1,75—2 Mm.

Vorkommen im Dolomite mit *Avicula exilis* Stopp. und *Megalodon complanatus* von Bocca di Nota und zahlreichen Orten der Südalpen.

Abbildung: Taf. D IV Fig. 2^a—2^c).

Diese mit der vorigen Art nahe verwandte Form hat einen um das Dreifache geringern Durchmesser und ist überdiess durch die geringelte Röhre, dünne Wand, verhältnissmässig weitere, weniger zahlreiche Kanälchen leicht davon zu unterscheiden. Ohne Zweifel gehört ein Theil der *Gastrochaena obtusa* Stoppani's zu dieser Art; ein Theil wohl auch zur nachfolgenden Species.

Gyroporllea vesiculifera n. sp.

Gehäuse mittelgross, cylindrisch-röhrenförmig, langgestreckt, etwas gebogen oder gekrümmt, von Stelle zu Stelle etwas angeschwollen verdickt und dadurch geringelt; Oberfläche sehr deutlich mit kleinen Wärzchen bedeckt; die Wand des Gehäuses dünn, einen weiten inneren Hohlraum umschliessend, von zahlreichen blasenförmigen Höhlungen erfüllt, welche durch eine niedere, längliche Oeffnung nach Innen münden, wahrscheinlich auch nach Aussen durch ein Kanälchen sich öffnen. Durchmesser der Röhrchen 4—4,5 Mm.

Vorkommen im grauen Dolomite mit *Avicula exilis* und *Megalodon complanatus* von Val Gobbia und von Inzino (gefällige Mitth. von

Prof. Benecke), von Hr. Nels. Dale gesammelt am Monte Gardia W. vom Gardasee, von mir bei Bezzecca im Ledrothale gefunden, dann im Thale N. von Tremosine.

Abbildung T. D IV Fig. 3^a—3^e und T. D III F. 15.

Diese Art, welche durch die blasenartige Erweiterung der Zwischenkanälchen so sehr ausgezeichnet ist, scheint für die sog. Esinoschichten d. h. die unteren Lagen des Hauptdolomites besonders charakteristisch zu sein. Wahrscheinlich schliesst dieselbe eine grosse Anzahl der von Stoppani als *Gastrochaena* bezeichneten Körperchen ein. Diese Form ist daher für die südwestlichen Kalkalpen von grosser Wichtigkeit; in den nördlichen Kalkalpen scheint sie zu fehlen, wenn nicht die Form vom Lavatscher Joch (T. D IV F. 1^g) hierher gezogen werden darf. Auf den ersten Anblick scheint es, als ob wir eine Form aus der Gruppe der *Haploporellen* vor uns hätten, indem die blasenartigen Erweiterungen, welche in den Durchschnitten sichbar werden, auf das lebhafteste an Kammerhöhlungen erinnern. Zahlreiche Dünnschliffe haben aber gelehrt, dass nur eine äussere Aehnlichkeit besteht, dass jede Spur von anders geformten Zwischenkanälchen fehlt, und diese Blasenform nur als eine Eigenthümlichkeit der Zwischenkanälchen dieser Art aufzufassen sei. —

Vor Abschluss unserer Beschreibung der *Triasdactyloporideen* verdienen noch einige Formen angeführt zu werden, welche, wenn auch nicht sicher dieser Familie unmittelbar angehörig, doch derselben aufs engste sich anschliessen. Solche Formen finden sich im schlesischen Muschelkalke häufig (T. D IV; Fig. 4^a—4^d).

Die äusserst feinen cylindrischen, meist etwas gekrümmten Röhrchen sind auf der Oberfläche nicht geringelt, sondern mit feinen Punktgrübchen bedeckt, sonst gleichmässig glatt oder etwas rauh; die äussere Wand ist dünn, zerbrechlich; sobald diese weggebrochen ist, zeigt sich die zweite innere Wand, welche die weite innere Höhlung umschliesst; sie ist durch zahlreiche, ringförmig gestellte, aus einem ringförmigen Vorsprung hervortretende Röhrchen mit der äusseren Wand verbunden; diese Röhrchen selbst sind ausgehöhlt und bilden die Hülle der Kanälchen, welche von dem inneren Hohlraum zur Oberfläche führen. Es entsteht zwischen der äusseren und inneren Cylinderwand mithin ein ziemlich

weiter Hohlraum, der nur von den feinen Cylinderröhrchen durchsetzt wird. Aus der Reihe der *Gyroporellen* haben wir keine Analogie für diese Bildung. Am ehesten lässt sich dieselbe mit jener der *Uteria encrinella* Mich., wenn man sich bei diesen die kurzen Kanälchen der inneren und äusseren Wand direkt verbunden dächte, vergleichen. Einstweilen mögen diese problematischen Röhrchen durch die Bezeichnung *Cylindrella silesiaca* kurz nennbar gemacht sein. Es ist das Vorkommen solcher Röhrchen in dem inneren Hohlraume von *Gyroporella cylindrica* (T. D II Fig. 2^{m}) schon besprochen worden. Sie kommen übrigens ziemlich häufig und völlig isolirt sehr gut erhalten im Himmelwitzer Muschelkalkdolomite vor.

Die ebenfalls schon erwähnten, mit letzteren zugleich auftretenden Körperchen (T. D III Fig. 3 und 4) könnten, sofern sie nicht zu *Gyroporella minutula* gehören, gleichfalls hier angeschlossen werden. Indess gehört eine Vergleichung grösseren Materials, als es zur Zeit mir zu Gebote steht, dazu, um über diese schwierige Verhältnisse entgültig zu entscheiden.

Ueberblicht man die geognostische Verbreitung der in den Triasgebilden inner- und ausserhalb der Alpen vorkommenden *Gyroporellen,* so ergiebt sich die bemerkenswerthe Thatsache, dass, wie es bisher kaum vermuthet wurde, sich ziemlich zahlreiche, auffallend verschiedene Arten — wenn wir auch von allen weniger auffallend verschiedenen Formen absehen — und zwar verschiedene Arten auf verschiedenen Horizonten der Kalk- oder Dolomitbildungen finden. Dadurch gewinne diese bis jetzt eher verwirrenden, als orientirenden organischen Einschlüsse eine erhöhte geognostische Bedeutung.

Als besonders wichtig macht sich zunächst die Thatsache bemerkbar, dass die Hauptform des alpinen Muschelkalks von Recoaro ganz abweicht von jenem des oberen schlesischen Muschelkalkdolomites, und dass die häufigste Art des letzteren dagegen sich so eng an jene des alpinen Wettersteinkalkes, dem ungefähren Zeit äquivalent des unteren Mittelkeupers, anschliesst, dass eine gewisse Unsicherheit über ihre Artenabgrenzung nicht geläugnet werden kann. Auch der Reiflinger Kalk ist durch besondere Typen charackterisirt, unter denen allerdings einzelne mit der Hauptform im oberschlesischen Dolomite vorkommende Formen

nahezu oder ganz übereinstimmen. Die typische Form des Wettersteinkalkes scheint die weiteste Verbreitung zu haben. Sie findet sich in den Nord- wie in den Südalpen und in den Karpathen auf, wie es scheint, gleichen Horizonten.

Ob auch der weisse Dolomit der Mendola, der verschiedenen Lagen zu entstammen scheint, hierher gehört, ist zweifelhaft, wenigstens umschliesst er auch Formen, die recht gut mit jenen von Recoara sich vereinigen lassen. Ganz abweichend ist die Formgruppe *(Continuae)* des Esinohorizontes, oder des unteren Hauptdolomites mit *Avicula exilis*. In diese Reihe gehört auch der Einschluss im Wetterlingskalke.

Es vertheilen sich demnach die Hauptarten auf die verschiedenen Stufen in folgender Weise:

Arten	Muschelkalk			Mendola-Dolomit	Wettersteinkalk	Hauptdolomit m. Av. exilis	Zweifelhaft
	Recoaro	Reiflinger Kalk	Oberschlesien				
Continuae:							
Gyrop. aequalis							
„ *curvata*	—	—	—	—	?	+	Wetterlingskalk
„ *vesiculifera*							
Gyroporella pauciforata . . .	—	+	?	—	—	—	—
Gyroporella annulata	—	—	—	+	+	—	—
Gyroporella cylindrica . . .	—	—	+	—	—	—	—
Gyroporella triasina	+	—	—	+	—	—	—

Indessen muss zugegeben werden, dass die Akten über die vertikale Verbreitung dieser Arten noch nicht geschlossen sind, weil, trotzdem von unzähligen Punkten der Einschluss dieser Art Versteinerungen angegeben wird, es doch bis jetzt sehr an ausgiebig reichem Materiale fehlt, um für viele Punkte des Vorkommens genauerer Arten Bestimmungen vorzunehmen. Es wird in Zukunft hoffentlich durch die vorliegende

Arbeit ebenso das Aufsammlen als eine wichtige und in hohem Grade wünschenswerthe Aufgabe des Geologen sich darstellen, wie durch dieselbe auch die Bestimmung dieser bis jetzt immerhin unsicheren Arten wesentlich erleichtert werden.

Nachtrag zu dem ersten Theile dieser Abhandlung über die sog. *Nulliporen* des Pflanzenreichs.

Seit Veröffentlichung des ersten Theils dieser Abhandlung habe ich Gelegenheit gefunden, in der Bonner Universitäts-Sammlung mehrere Goldfuss'sche Originalexemplare vergleichen und untersuchen zu können. In Folge hiervon haben sich drei weitere Formen als zu *Lithothamnium* gehörig herausgestellt, nämlich:

Lithothamnium palmatum Goldf. sp.

Nullipora palmata Goldf. Or. zu T. VIII F. 1*)

Der Stock ist aus knollig walzenförmigen, unregelmässig verästelten, vielfachen zusammengewachsenen Theilen aufgebaut; die Enden der Zweige sind meist etwas verdickt kopfförmig (T. D IV F. L. 1^a). Die Zellendurchschnitte von rektangulären Form messen bei 7 Mic. Breite 8 Mic. in der Länge. Damit stimmt vollständig eine Form aus den sog. Gosauschichten der Alpen.

Vorkommen in der französichen Kreide und in der Gosau.

Abbildung: T. D IV Fig. L. 1^a und L. 1^b.

Lithothamnium racemosum Goldf. sp.

Millepora racemosa Goldf. Orig. zu T. VIII; Fig. 2.

Stock klein, aus vielen, zu einem lockeren Büschel von ungefähr 8 Mm. Höhe und 10 Mm. Breite verwachsenen, dünnen, traubig knolligen Aestchen bestehend; die schlanken Asttheile sind am Ende etwas verdickt

*) In Folge eines Druckfehlers ist im ersten Theile S. 36 Fig. 2 statt Fig. 1 stehen geblieben.

(T. D IV Fig. L. 2^a). Die fast quadratischen Zellendurchschnitte sind 10 Mic. lang und 9 Mic. breit (Taf. D IV. F. L. 2^b).

Vorkommen: Mastrichter Kreide.

Abbildung: Taf. D IV; F. L. 2^a und L. 2^b.

Ich habe nach Exemplaren der früheren v. Münster'schen, jetzt bayr. Staatssammlung im ersten Theile S. 35 die Species zu den Bryozoen verwiesen. Das Exemplar der Bonner Sammlung jedoch, das der Beschreibung und Abbildung bei Goldfuss speziell zu Grunde lag, hat mich eines Besseren belehrt, und dessen Zugehörigkeit zu *Lithothamnium* sicher erkennen lassen.

Lithothamnium Goldfussi n. sp.

Palmipora polymorpha Roem. Kr. 25.
Ceriopora polymorpha Goldf. Pet. S. 34 T. X F. 7.

Stock gross, ausgebreitet mit zu flügelartigen Lappen eng verwachsenen Aesten, deren Ende nur wenig aus der Verwachsung vorstehen und abgerundet kopfförmig sind (T. D IV. F. L. 3^a). Die sehr grossen Zellendurchschnitte messen durchschnittlich 70 Micr. in der Länge und 24 Micr. in der Breite.

Vorkommen: in den Kreideschichten.

Abbildung: Taf. D IV F. L. 3^a und L. 3^b.

Da es schon unter den Arten der gegenwärtigen Flora bereits ein *Lithothamnium polymorphum* giebt, musste der Art Name umgeändert werden.

Bei Besichtigung der Bonner Sammlung hat sich ferner ergeben, dass die unter der folgenden Bezeichnung in derselben aufbewahrten Exemplare den Charakter von *Lithothamnium* nicht besitzen:

Retepora lichenoides Goldf. Pet. T. IX Fig. 19, Originalexemplare von Mastricht.

Chrysaora spinosa Lx. von Ranville.

Ceriopora astroites Mü.

Erklärung der Abbildungen.

Taf. D. I.

Figur 1[a–e] *Haploporella eruca* P. a J. sp.

„ 1[a] Seitenansicht in 75maliger Vergrösserung; t rinnen-artige Einschnitte.

„ 1[b] Ansicht von Innen in 75. m. V.; m. die Mündungen der von der Kammerhöhlung ausgehenden Kanälchen.

„ 1[c] Ansicht von Aussen in 75. m. V.; t. die rinnen-artige Einschnitte, die bis zur Rückseite fortsetzen.

„ 1[d] Durchschnitt, parallel den Seitenflächen in 75. m. V.; c die Kammerhöhlungen; m die Mündungen der aus diesen führenden Kanälchen und r feine Zwischenkanälchen.

„ 1[e] Durchschnitt, parallel der Röhrchenseite in 75. m. V.; Buchstaben wie in 1[d].

„ 2[a]—2[e] *Haploporella annulus* P. a. J. sp.

„ 2[a] Horizontaldurchschnitt in 40 m. V. c, m und r in der Bedeutung wie F. 1[d].

„ 2[b] Ein Horizontalschnitt in einem Dünnschliffe in 300 m. V., die Struktur der porzellanartig dichten Schale zeigend, c die Kammerhöhlungen; r die Zwischenkanälchen und rr die in zickzackförmigen Windungen auslaufenden Kanälchen.

„ 2[c] Ein Ringglied von oben gesehen mit den einzelnen Kammerabtheilungen, in 20 m. V.

„ 2[d] Aufeinander liegende, zu einem Röhrchen verbundene Ringglieder in 20 m. V., n die Mündungen der Zwischenbodenkanälchen nach Aussen.

„ 2[e] Ein einzelnes Ringglied in 20 m. V. im Durchschnitt mit (c) den Kammerhöhlungen.

Figur 3[a]—3[b] *Haploporella reticulata* Defr. spec.

„ 3[a] Das Embryonalende eines Röhrchens in 20 m. V.

„ 3[b] Ein z. Th. zerbrochenes und oben corrodirtes Röhrchenstück in 20 m. V., c Kammerhöhlung; r Zwischenbodenkanälchen und ihre Mündungen; m corrodirten Theil mit den blossgelegten Kammerhöhlungen.

„ 4[a]—4[c] *Haploporella vesiculosa.*

„ 4[a] Ein unten aufgebrochenes Röhrchenstück in 15 m. V.

„ 4[b] Ein Theil der Oberfläche in 75 m. V., cc die Ausmündungen der Kanälchen.

„ 4[c] Ein Theil der inneren Fläche in 75 m. V., cc die Mündungen der Zwischenkanälchen, r die der Kammerhöhlungskanälchen.

„ 5[a]—5[b] *Haploporella biscutata* in 20 m. V.

„ 5[a] Ein Theil eines Röhrchens.

„ 5[b] Ein Horizontaldurchschnitt, etwas schief geführt, c Kammerhöhlungen, r Zwischenkanälchen.

„ 5[c] Ein Theil der inneren Wandfläche mit den Mündungen der Kanälchen.

„ 6 *Haploporella scrobiculata* in 15 m. V.

„ 7[a]—7[b] *Haploporella fasciculata.*

„ 7 10 m. V., in vertikaler (7[a]) und horizontaler (7[b]) Ansicht.

„ 8 *Gyroporella cylindrica* ein Stück der Röhre in schematischer Darstellung 30 m. V., c Zwischenkanälchen; t Eintiefungen auf der Innenseite; m Nähte der Ringglieder auf der Innenfläche, m' die Mündungen der Zwischenkanälchen; x wahrscheinliche Verdickung durch Inkrustirung; z Aushöhlungen der Ringglieder und ringförmiger Hohlraum bei ihrer Aufeinanderlage.

„ 9[a] und 9[b] *Dactyloporella cylindracea* Lam. in 75 m. V.

Figur 9[a] Horizontaldurchschnitt, c Kammerhöhlungen: r deren Kanäle; s Ringhöhlung; o Verbindungskanälchen mit dem Innern, i innere Wand, p Zwischenkanälchen.

„ 9[b] Vertikaldurchschnitt mit derselben Bedeutung der Buchstaben.

„ 10 *Dactyloporella saccata* in 75 m. V.; c Kammerhöhlungen; a Nebenhöhlungen; s Verbindungskanälchen; o Mündungen der Hauptkanälchen nach Innen; r der Zwischenkanälchen nach Aussen.

„ 11[a]—11[c] *Dactyloporella miocaenica* Karr. in 15 m. V.

„ 11[a] Ein oben abgebrochenes Exemplar die innere Wand mit e den Kanälchen, und c' Mündungen derselben an der Aussenfläche zeigend.

„ 11[b] Vertikaldurchschnitt. a die Ringhöhlungen, b die Kammerhöhlungen, c die Mündungen der Zwischenkanälchen, d die Verbindungskanälchen.

„ 11[c] Horizontaldurchschnitt mit derselben Bedeutung der Buchstaben, e die Mündungen der Verbindungskanälchen nach Innen, i innere Höhlung.

„ 12[a]—12[b] *Dactyloporella (?) elegans* in 10 m. V.

„ 12[a] Ein Exemplar oben mit verwitterter Oberfläche, wodurch (a) die Kammerhöhlungen zum Vorschein kommen.

„ 12[b] Vertikaldurchschnitt, a Kammerhöhlungen, z die theilweise zerstörten Ringhöhlungen.

„ 13[a]—13[b] *Thyrsoporella cribrosa* in 15 m. V.

„ 13[a] Ein Bruchstück, o die grösseren Kanälchen, rr die kleineren Kanälchen.

„ 13[b] Ein Theil der Aussenfläche mit o der Mündung der grösseren und rr der Mündung der kleineren Kanälchen.

„ 14[a]—14[b] *Thyrsoporella cancellata* in 75 m. V.

„ 14[a] Ein Röhrchenstück von Aussen gesehen.

„ 14[b] Ein Fragment von Innen gesehen, o die grösseren Kanälchen, r die von diesen ausgehenden kleineren Kanälchen.

Tafel D II.

Figur 1[a]—1[z] *Gyroporella annulata.*

„ 1[a] Eine Gruppe im Gestein in natürlicher Grösse.

„ 1[b] Ein einzelnes Röhrchen in natürlicher Grösse, oben als Steinkern verwittert.

„ 1[c] Ein verwitterter Steinkern in nat. Gr.

„ 1[d] Ein Röhrchenstück, oben abgebrochen, die Mündungen der Kanälchen nach Aussen und Innen zeigend in 10 m. V.

„ 1[e] Ein z. Th. ausgewittertes Exemplar mit dem abgerundeten Embryonalende in 5 m. V.

„ 1[f] Ein Horizontaldurchschnitt, c die Zwischenkanälchen, h der mit kalkspäthiger Steinmasse ausgefüllte innere Hohlraum, r ein schiefdurchschnittener Theil der Aushöhlungen der Ringfläche in 10 m. V.

„ 1[g] Ein (schiefer) Vertikaldurchschnitt im Dünnschliff mit derselben Bedeutung der Buchstaben wie 1[f] in 10 m. V.

„ 1[x] Ein Vertikaldurchschnitt im Dünnschliff mit c den Kanälchen, in z den Hohlkehlen.

„ 1[y] Ein Vertikaldurchschnitt in 5 m. V. mit einem inneren Steinkern.

„ 1[z] Ein Röhrchenstück z. T. ausgewittert und einen Theil der ausgewitterten Ausfüllungsmasse im Innern zeigend in 5 m. V.

Figur 2ª—2° *Gyroporella cylindrica.*

„ 2ª Eine Gruppe im Gestein in natürl. Grösse.

„ 2ªª Ein einzelnes Röhrchen in nat. G.

„ 2ᵇ Ein Röhrchenstück in 10 m. V.

„ 2ᶜ Ein oben abgebrochenes Röhrchenstück in 10 m. V., z die Ringhohlkehle zeigend.

„ 2ᵈ Ein Horizontaldurchschnitt durch ein Ringglied, die einfache Reihe der Zwischenkanälchen zeigend in 10 m. V.

„ 2ᵉ Ebenso die zwei Reihen zeigend in 10 m. V.

„ 2ᶠ Ein frei losgelöstes Ringglied von oben gesehen in 12 m. V., z die Ringhohlkehle.

„ 2ᵍ Ein Horizontaldurchschnitt, etwas schief gelegt in 10 m. V., z Ringhohlkehle.

„ 2ʰ Ein aufgebrochener Steinkern mit den in Ringen gestellten doppeltreihigen Kanälchen, rr Hohlraum durch zerstörte Schale, z Ringhohlkehle in 10 m. V.

„ 2ⁱ Ein aufgebrochener Steinkern, das geschlossene Embryonalende zeigend, r die Theile der Ringwände in 10 m. V.

„ 2ᵏ Ein durch Auswitterung freistehendes Embryonalende in 10 m. V.

„ 2ˡ Der Durchschnitt eines einzelnen Ringgliedes, z die Hohlkehle.

„ 2ᵐ Ein Vertikaldurchschnitt mit einem 2ten dünnen, schief stehenden (fremden) Röhrchen im inneren Hohlraum in 2 m. V.

„ 2ⁿ Ein Schalenstückchen im vert. Durchschnitte in 30 m. V., a äussere Wandfläche, c Zwischenkanälchen; h innerer Hohlraum; z Lage der trennenden Ringfläche; m Ausgangspunkt der Zwischenkanälchen.

„ 2° Ein etwas schief gelegter Vertikaldurckschnitt im Dünnschliff in 10 m V., c die Zwischenkanälchen; h der innere Hohlraum; z die durch Brauneisensubstanz ausgefüllten Ringhohlkehlen.

„ 3ª—3ᵇ *Gyroporella debilis.*

„ 3ª Ein Steinkernstück in n. G.

„ 3ᵇ Dasselbe in 8 m. V.

„ 4ª—4ᵇ *Gyroporella macrostoma.*

„ 4ª Ein Steinkernstück in nat. Gr.

„ 4ᵇ Dasselbe in 8 m. V., z ausgefüllte Ringhohlkehlchen.

Tafel D III.

Figur 1 *Gyroporella dissita* im schiefen Vertikaldurchschnitte in 10 m. V.

„ 2ª—2ᶠ *Gyroporella pauciforata.*

„ 2ª Vertikaldurchschnitte in 12 m. V., b die Reste der Ringzwischenwände darstellend.

„ 2ᵇ Vertikaldurchschnitt nahe an eine Röhrchensaite gelegt in 12 m. V.

„ 2ᶜ Vertikaldurchschnitt eines kleinen Exemplars, c Kanälchen, h innere Höhlung, b Reste der Ringgliederzwischenwände in 10 m. V.

„ 2ᵈ Ebenso der Schnitt näher gegen die Seite geführt.

„ 2ᵉ Horizontaldurchschnitt in 10 m. V.

„ 2ᶠ Ein Theil eines Horizontaldurchschnittes, c die Kanälchen mit ihren Mündungen, a nach Aussen, b nach Innen.

„ 3ª—3ᵇ Eine der *Gyroporella pauciforata* sehr ähnliche Form aus dem oberschlesischen Muschelkalke in 15 m. V.

„ 4ª—4ᵇ *Gyroporella minuta* in verschiedenen Längsdurchschnitten in 12 m. V.

Figur 5[a]—5[b] Eine der *Gyroporella minuta* ähnliche Form aus dem oberschlesischen Muschelkalke in 15 m. V. von der Seite und von oben gesehen.
„ 6 *Gyroporella silesiaca* ein durch Verwitterung blossgelegtes Stück in 15 m. V.
„ 7[a]—7[b] Desgleichen im Durchschnitt in nat. Gr. und 7[b] in 5 m V.
„ 8[a]—8[c] *Gyroporella infundibuliformis.*
„ 8[a] in nat. Gr. 8[b] und 8[c] in 5 m. V., im vertikalen und horizontalen Durchschnitte.
„ 9 Durchschnitt einer an die voranstehenden Arten sich anschliessenden Form aus der Höttinger Alpe in 5 m. V., h innerer Hohlraum; r Ringeinkerbungen.
„ 10 Desgleichen vom Csiker Berge in 15 m. V., h innerer Hohlraum; c Zwischenkanälchen.
„ 11[a]—11[d] *Gyroporella multiserialis.*
„ 11[a]—11[b] Dusch Verwitternng blossgelegte Röhrchen mit dem Embryonalende in n. Gr.
„ 11[c] Ein vertikaler Durchschnitt und Aufbruch in 5 m. V.
„ 11[d] Ein horizontaler Durchschnitt im Dünnschliff in 5 m. V.
„ 12[a]—12[f] *Gyroporella triasina* Schaur.
„ 12[a] Eine Gruppe im Gestein in n. Gr.
„ 12[b] Ein einzelnes Röhrchen in n. Gr.
„ 12[c] Ein Vertikaldurchschnitt (etwas schief geführt) in 5 m. V.
„ 12[d] Ein durch die Mitte gelegter Vertikalschnitt im Dünnschliff in 10 m. V., z die Ringeinkerbungen.
„ 12[e] Ein Vertikaldurchschnitt mit deutlicher Ringabgliederung in 3 m. V.
„ 12[f] Ein Horizontaldurchschnitt in 5 V.
„ 13[a]—13[b] *Gyroporella triasina* Schaur. aus dem Mendola-Dolomite in n. G. uud 13[b] in 5 m. V
„ 14[a]—14[c] *Gyroporella aequalis* aus dem Wetterlingskalke.
„ 14[a] Eine Gruppe im Gestein in n. Gr.
„ 14[b] Ein Horizontaldurchschnitt in 5 m. V.
„ 14[c] Ein Vertikaldurchschnitt in 5 m. V.
„ 15 Ein Stück eines Horizontaldurchschnittes im Dünnschliff von *Gyroporella vesiculifera*, die blasen-artig angeschwollenen Zwischenkanälchen zeigend, in x warzenartige Vorsprünge auf der Oberfläche, y Durchschnitte solcher warzenartigen Vorsprünge.

Tafel D IV.

Figur 1[a]—1[g] *Gyroporella aequalis* aus dem Höttinger Graben.
„ 1[a] Ein Röhrchen in nat. Grösse.
„ 1[b] Ein Stück desselben in 2 m. V.
„ 1[c] Ein Stückchen der Aussenfläche in 15 m. V.
„ 1[d] Ein Horizontalschnitt in 4 m. V.
„ 1[e] Ein Stückchen der Schale im Vertikalschnitte in 15 m. V., die Zwischenkanälchen zeigend.
„ 1[f] Ein Stück der Schale im Horizontalschnitte in 15 m. V., das Durchziehen der Zwischenkanälchen zeigend.
„ 1[g] Ein Stückchen im Horizontaldurchschnitte, c mit blasen-artig erweiterten Kanälchen, einer anderen Species angehörend in 15 m. V.
„ 2[a]—2[d] *Gyroporella curvata.*
„ 2[a] Eine Gruppe im Gestein in nat. Gr.
„ 2[b] Ein isolirtes Röhrchen in 15 m. V.

Figur 2[c] Ein Horizontaldurchschnitt in 15 m. V.
„ 2[d] Ein Vertikaldurchschnitt (etwas schief gelegt).
„ 3[a]—3[e] *Gyroporella vesiculifera.*
„ 3[a] Eine Gruppe der Röhrchen in n. Gr.
„ 3[b] Ein Rörchen in 5 m. V., oben mit dem Abdruck der inneren Fläche, auf dem der Hohlraum ausfüllende Steinkern.
„ 3[c] Vertikaldurchschnitt in 8 m. V. mit den blasen-förmigen Zwischenkanälchen.
„ 3[d] Horizontaldurchschnitt in 5 m. V.
„ 3[e] Vertikaldurchschnitt in 5 m. V.
„ 4[a]—4[d] Problematische Röhrchen *(Cylindrella silesiaca)* aus dem oberschlessischen Muschelkalk.
„ 4[a] Ein freistehendes Röhrchen in nat. Gr.
„ 4[b] Dasselbe in 15 m. V.
„ 4[c] Ein freistehendes Röhrchen mit erhaltener Oberfläche in n. Gr.
„ 4[d] Ein durchbrochenes Stückchen in der vertikalen Ansicht in 15 m. V.
„ 5[a]—5[b] *Uteria encrinella* Mich.
„ 5[a] Ein an der Seite aufgebrochenes Exemplar das Innere zeigend in 20 m. V.
„ 5[b] Dasselbe von oben gesehen in 20 m. V. mit den Furchen (r) der Zwischenkanälchen.
„ 6[a]—6[b] (Copie nach Carpenter) *Haploporella marginoporella.*
„ 6[a] Horizontaldurchschnitt.
„ 6[b] Vertikaldurchschnitt.
„ 7[a]—7[b] (Copie nach Carpenter) *Haploporella digitata* P. a. J.
„ 7[a] Horizontaldurchschnitt.
„ 7[b] Eine Kammer im Vertikaldurchschnitte.
„ L 1[a]—1[b] *Lithothamnium palmatum* Goldf. spec.
„ L 1[a] Ein Stock in nat. Grösse.
„ L 1[b] Ein Durchschnitt der Zellen in 320 m. V.
„ L 2[a]—2[b] *Lithothamnium racemosum* Goldf. sp.
„ L 2[a] Ein Stock in nat. Gr.
„ L 2[b] Zellendurchschnitte in 320 m. V.
„ L 3[a]—3[b] *Lithothamnium Goldfussi* Gümb.
„ L 3[a] Ein Stock in nat. Gr.
„ L 3[b] Zellendurchschnitte in 320 m. V.

BRITISH MUSEUM
NATURAL HISTORY.

BRITISH MUSEUM NATURAL HISTORY

BRITISH MUSEUM NATURAL HISTORY

lath phys Cl. XI. 1

Gümbel: Die sogenannten Nulliporen II. Abth.

NATURAL HISTORY

Inhalt.

Seite

Ueber die Grenzwerthe eines unendlichen Potenzausdruckes der Form $x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}$ von *L. Seidel* 1

Die sogenannten Nulliporen (Lithothamnium und Dactylopora). und ihre Betheiligung an der Zusammensetzung der Kalkgesteine. Erster Theil: die Nulliporen des Pflanzenreichs (Lithothamnium). Von *C. W. Gümbel* mit 2 Tafeln . . . 11

Ueber das Problem der drei Körper. Von *Otto Hesse* 53

Ein Apparat zur mechanischen Lösung der nach Pothenot, Hansen u. A. benannten geodätischen Aufgaben von *Carl Max Bauernfeind*. Mit einer Steindrucktafel 81

Untersuchungen über die Salzseen im westlichen Tíbet und in Turkistán. I. Theil. Rúpchu und Pankóng; das Gebiet der Salzseen im westlichen Tíbet. Von *Hermann von Schlagintweit-Sakünlünski* 101

Ein Cyclus von Determinanten-Gleichungen. (Eine analytische Erweiterung des Pascal'schen Theoremes.) Von *Otto Hesse* 175

Die Mineraliensammlung des Bayerischen Staates. Von *Franz von Kobell* . . 193

Die sogenannten Nulliporen (Lithothamnium und Dactylopora). und ihre Betheiligung an der Zusammensetzung der Kalkgesteine. Zweiter Theil: die Nulliporen des Thierreiches (Dactyloporideae) nebst Nachtrag zum ersten Theile. Von *C. W. Gümbel.* Mit 4 Tafeln 229

Akademische Buchdruckerei von F. STRAUB in München.

ABHANDLUNGEN

DER

MATHEMATISCH-PHYSIKALISCHEN CLASSE

DER KÖNIGLICH BAYERISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

EILFTEN BANDES

ZWEITE ABTHEILUNG.

IN DER REIHE DER DENKSCHRIFTEN DER XL. BAND.

MÜNCHEN,

1873,

VERLAG DER K. AKADEMIE,

IN COMMISSION BEI G. FRANZ.

ABHANDLUNGEN

DER

MATHEMATISCH-PHYSIKALISCHEN CLASSE

DER KÖNIGLICH BAYERISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

EILFTEN BANDES

ZWEITE ABTHEILUNG.

BRITISH MUSEUM
NATURAL HISTORY

ABHANDLUNGEN

DER

MATHEMATISCH-PHYSIKALISCHEN CLASSE

DER KÖNIGLICH BAYERISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

EILFTEN BANDES

ZWEITE ABTHEILUNG.

IN DER REIHE DER DENKSCHRIFTEN DER XL. BAND.

MÜNCHEN,
1872,

VERLAG DER K. AKADEMIE,
IN COMMISSION BEI G. FRANZ.

BRITISH
NATURAL HISTORY.

Inhalt.

Seite

Geodaetische Bestimmung der Erdkrümmung und Lothablenkung. Mit 10 Holzschnitten. Von *Carl Max v. Bauernfeind* 1

Das Bayerische Präcisions-Nivellement. Zweite Mittheilung. Von *Carl Max v. Bauernfeind* 41

Von einem Kettenbruche Euler's und einem Theorem von Wallis. Von *G. Bauer* 97

Anatomische Beschreibung eines mikrocephalen 8jährigen Mädchens Helene Becker aus Offenbach. Mit 5 Tafeln in Lichtdruck. Von *Th. L. W. v. Bischoff* 117

Geodaetische Bestimmung

der

Erdkrümmung und Lothablenkung

von

Carl Max Bauernfeind.

Mit 10 Holzschnitten.

(Der math.-phys. Classe der k. Akademie vorgelegt am 2. März 1872.)

Begründung eines rein geodaetischen Verfahrens zur Bestimmung der Erdkrümmung und Lothablenkung

von

Carl Max Bauernfeind.

Bei Ausarbeitung eines im Jahre 1866 gehaltenen öffentlichen Vortrags über die Bedeutung moderner Gradmessungen kam ich auf den Gedanken, grössere Lothablenkungen durch trigonometrische Höhenmessungen und exactes Nivelliren aufzufinden,[1]) und bei der zweiten allgemeinen Conferenz der europäischen Gradmessung zu Berlin im Jahre 1867 stellte ich die Behauptung auf, dass der polygonale Abschluss eines Nivellements allein noch keine ausreichende Garantie für dessen Genauigkeit gewähre. Diese Behauptung gründete ich vorzüglich auf die vielfach bestätigte Erfahrung, dass in einem grossen Nivellement merkliche Fehler von gleicher Grösse und entgegengesetztem Vorzeichen, welche sich zwar beim Abschlusse aufheben, aber in einer Reihe von Zwischenpunkten verbleiben und auf andere Höhenbestimmungen übergehen, möglich sind, theilweise aber auch auf die Ueberzeugung, dass selbst ein ganz fehlerfrei nivellirtes Polygon nicht nothwendig mit einer der Anfangscote gleichen Endcote abzuschliessen braucht, wenn die in der vertikalen Mantelfläche dieses Polygons vorkommenden Störungen

---

1) Man vergleiche: „Die Bedeutung moderner Gradmessungen." Vortrag in der öffentlichen Sitzung der k. Akademie der Wissenschaften am 25. Juli 1866 gehalten von C. M. Bauernfeind, S. 34 und 41. Dann: „Die atmosphärische Strahlenbrechung auf Grund einer neuen Aufstellung über die physicalische Constitution der Atmosphäre." II Abschnitt: Astronomische Nachrichten Nr. 1590, S. 85, und Separatabdruck, 2 Heft, S. 27.

der Schwere-Richtung nicht gleich und entgegengesetzt sind, oder wenn bei der Berechnung des Nivellements auf die Aenderungen der Schwere-Intensität keine Rücksicht genommen wird. In meiner Schrift über das Bayerische Präcisionsnivellement [1]) fand ich abermals Veranlassung, der Einwirkung der Schwereänderungen auf die Schlussfehler vollständig nivellirter Polygone zu gedenken, und es würde für mich nunmehr die Pflicht erwachsen, die mehrmals ausgesprochene Ansicht zu begründen, wenn mir hierin Herr Consistorialrath Theodor Wand nicht theilweise zuvorgekommen wäre, veranlasst (wie er mir persönlich mittheilte) durch meine eben genannte Abhandlung über das in Bayern ausgeführte Präcisionsnivellement. Herr Wand zeigt nämlich in § 36 seiner gehaltvollen Schrift über die Principien der mathematischen Physik, [2]) dass bei Nichtberücksichtigung der veränderlichen Intensität der Schwere am Schlusse eines fehlerfrei nivellirten Polygons eine Differenz sich ergeben muss, die zwar im Allgemeinen unbedeutend ist, theoretisch aber doch besteht und bei Polygonen von grosser horizontaler Ausdehnung in der Richtung der Mittagslinie und bedeutender Erhebung im vertikalen Sinne immerhin auch Beachtung verdient. In welcher Weise ich mir den Einfluss der gestörten Richtung der Schwerkraft, also der Lothabweichungen, auf den Schluss vollständig nivellirter Polygone dachte und noch denke, werde ich im § 7 dieser Abhandlung näher erörtern.

1. Ueber den Begriff des Höhenunterschieds zweier Punkte.

In allen Schriften über Geodäsie wird der Höhenunterschied zweier Punkte als der normale Abstand der durch diese Punkte gelegten wahren Horizontalflächen definirt, und es werden unter diesen Flächen in der Regel die Kugeln verstanden, welche man vom Erdmittelpunkt aus durch die gegebenen Punkte gelegt denken kann. Bei strengerer Auffassung versteht man unter den wahren Horizontalflächen zweier Punkte die concentrischen Umdrehungsellipsoide, welche durch diese Punkte gehen und dem

---

1) Der vollständige Titel ist: „Ergebnisse des in Verbindung mit der europäischen Gradmessung in Bayern ausgeführten Präcisions-Nivellements.“ Abhandlungen der K. Bayerischen Akademie der Wissenschaften, II Cl., X. Bd., III. Abthlg., München 1870, Verlag der Akademie.

2) Man vergleiche: „Die Principien der mathematischen Physik und die Potentialtheorie“ von Theodor Wand, Consistorialassessor und Mitglied der Bayer. Abgeordnetenkammer. Leipzig 1871, Verlag von B. G. Teubner.

Bessel'schen Ellipsoid ähnlich sind. Der Höhenunterschied zweier Punkte, die durch eine Reihe von Zwischenpunkten getrennt sind, deren gegenseitige Höhenlage sich also nicht unmittelbar finden lässt, erscheint demnach als die algebraische Summe aller Höhenunterschiede, welche zwischen jenen zwei Punkten erhoben worden sind. Kennt man den Abstand eines dieser Punkte von der Meeresfläche (welche allgemein als Vertreterin der idealen Erdoberfläche oder des Bessel'schen Ellipsoids angesehen wird, während sie in der That nur eine Niveaufläche ist, die von diesem mittlereen Ellipsoid mehr oder weniger abweicht), so kann man auch die Abstände der übrigen Punkte von der Meeresfläche, beziehungsweise von dem Bessel'schen Endellipsoid berechnen.

Diese principielle Grundlage aller technischen und Präcisionsnivellements hat meines Wissens bis jetzt nur e i n e Beanstandung gefunden: Herr Th. Wand führt nämlich auf Seite 130 und 131 seiner vorhin genannten Schrift über die Principien der mathematischen Physik an, dass man die Höhe eines Ortes in der allein richtigen Weisse bloss durch die Potentialfunction der Erde an diesem Orte bestimmen und folglich die Höhendifferenz zwischen zwei Orten nur durch die Arbeit ausdrücken könne, welche nothwendig ist, um eine bestimmte Masseneinheit von dem einen Orte zum anderen zu heben. Unmittelbare Folge dieser Theorie ist, dass man, um ein Längennivellement herzustellen, die zwischen je zwei aufeinander folgenden Punkten ermittelten Höhenunterschiede noch mit den in den Stationen wirkenden Schwerkräften (die des ersten Punktes = 1 gesetzt) multipliciren und die Produckte dann algebraisch addiren muss.

Gegen die Ausstellung des Herrn Th. Wand an dem bisher festgehaltenen Princip des Nivellirens lässt sich vom rein theoretischen Standpunkte aus wohl nichts einwenden, umsomehr aber ist sie vom praktischen Standtpunkte aus abzulehnen. Sehen wir nämlich von der ungeheuren Schwierigkeit, die Intensität der Schwere an allen Punkten des Nivellements zu messen, ganz ab, so würde uns das Wand'sche Präcisionsnivellement doch nur dann ein klares Bild von den Erhöhungen und Vertiefungen des Terrains geben können, wenn wir die Niveauflächen auf das Besselsche Umdrehungsellipsoid beziehen. Es ist aber nirgends gesagt, wie man an jedem beliebigen Orte der Erde die

gegenseitige Lage oder wenigstens den Abstand der Niveaufläche und des Ellipsoids finden kann, während es doch gewiss ist, dass diese beiden Flächen in den wenigstens Fällen sich decken. Die Wand'schen Höhencoten sind somit auf eine Fläche bezogen, von der wir zwar als Fläche gleichen Drucks eine kurze Definition aber so lange keine klare geometrische Anschauung haben, als wir diese Fläche nicht auf dem mehrfach erwähnten Ellipsoid construiren. Es wird folglich besser sein, bei dem Beziehungsmittel, wovon wir eine bestimmte Vorstellung haben, zu verharren, zumal da die Aenderung, welche der Wand'sche Schwerefactor an der Höhendifferenz zweier Punkte bewirkt, ganz unbedeutend ist. Um diese Aenderung kennen zu lernen, bemerke man, dass für irgend einen Ort der Erde unter der Breite φ die Beschleunigung der Schwere ausgedrückt ist durch die Gleichung

$$G = 9{,}^{m}83139 - 0{,}^{m}05091 \cos^2\varphi,$$

und dass somit die Aenderung $\triangle G$ von G, welche einer Aenderung $\Delta\varphi$ der Breite φ entspricht, gleich ist

$$\Delta G = 0{,}^{m}05091 \sin 2\varphi . \Delta\varphi.$$

Setzen wir $\varphi = 45^0$, so ist $G = 9{,}^{m}80594$ und $\Delta G = 0{,}^{m}05091\ \Delta\varphi$. Wird nun $\Delta\varphi$ zu 5 Sekunden angenommen, was schon einer ziemlich langen Nivellirstation entspricht, da deren Länge über 150^m beträgt, so ist der Werth von $\Delta\varphi$ in Bogenmass = 0,00002424 und folglich $\Delta G = 0{,}^{m}000001234$. Läge nun die Station von 45^0 Breite auf dem Meridian um $5''$ gegen den Aequator, so wäre die Höhendifferenz h mit $(1 - 0{,}0000001)$, und wenn sie um $5''$ gegen den Pol zu läge, mit $(1 + 0{,}0000001)$ zu multipliciren. Es würde somit 1^m Höhenunterschied in dem ersten Falle um $0{,}^{mm}0001$ kleiner und in dem zweiten Falle um eben so viel grösser werden. Da man aber bei der angenommenen Stationslänge schon $0{,}1^{mm}$ nicht mehr ablesen kann, so verliert selbstverständlich der Schwerefactor jede Bedeutung, d. h. er ist immer als 1 anzusehen. Auch auf weit ausgedehnte Nivellements hat er keinen merklichen Einfluss, wenn nicht zugleich ein sehr grosser Höhenunterschied zwischen dem äussersten südlichen und nördlichen Punkte der nivellirten Linie stattfindet. Denn dehnte sich ein solches Nivellement von der Ostsee bis zum adriatischen Meere, also über 9 Breitengrade

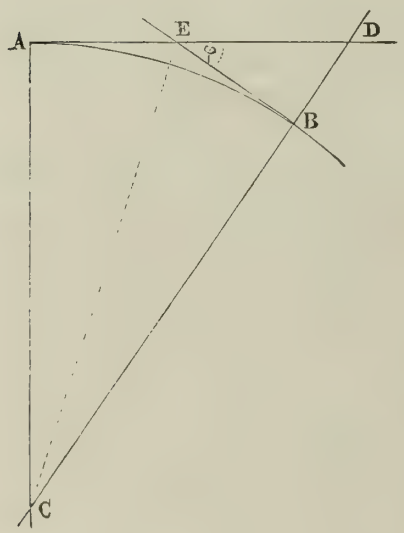
oder mit Rücksicht auf die Krümmungen über 300 geographische Meilen aus, so betrüge der aus Vernachlässigung des Schwerefactors entspringende Fehler auf diese grosse Strecke, welche $9 \cdot 60 \cdot 12 = 6480$ Stationen à 5 Sek. Ausdehnung in der Richtung des Meridians umfasst, erst 0,000648 h, d. i. $0^{mm}648$ auf 1^m oder 0^m648 auf 1000^m Höhendifferenz; dieser Fehler vermöchte also zwar den Niveauunterschied eines am adriatischen Meere 1550^m sich erhebenden Berggipfels um einen Meter, den der Ostsee und des adriatischen Meeres aber, welcher sicherlich kleiner als 1^m ist, nicht einmal um einen ganzen Millimeter zu beeinträchtigen.

Wenn nun durch diese Betrachtung erwiesen ist, dass der Einwurf des Herrn Th. Wand gegen das allgemein angenommene Princip des Nivellirens keine praktische Bedeutung hat, so soll damit keineswegs gesagt sein, dass es gegen dieses Princip überhaupt nichts zu erinnern gäbe. Es gibt in der That einen begründeten Vorwurf, und dieser besteht darin, dass man die scheinbaren Horizontallinien, welche das Fernrohr mit Libelle anzeigt, als Tangenten an das ideale Erdellipsoid behandelt, welche auf den Normalen dieses Ellipsoids senkrecht stehen, während sie in Wirklichkeit Tangenten der Niveauflächen sind und jederzeit nur auf den Schwererichtungen senkrecht stehen; mit anderen Worten: der Vorwurf, welcher dem allgemein üblichen Nivellirverfahren gemacht werden kann, ist die dabei stattfindende Vernachlässigung der Lothabweichungen. Mir ist kein Buch und keine Abhandlung bekannt, worin auf diesen Umstand auch nur aufmerksam gemacht, geschweige denn versucht worden wäre, die Lothabweichungen welche längst einer nivellirten Linie vorkommen, durch die Operation des Nivellirens selbst zu bestimmen. Wenn ich nun zeige, wie man mit Hilfe des Nivellirinstruments nicht bloss die Erdkrümmung sondern auch die Ablenkung des Loths an jedem beliebigen Orte der Erde bestimmen und somit auch die Niveauflächen auf dem z. Z. giltigen Bessel'schen Erdellipsoid darstellen kann, so habe ich demnach in diesem Unternehmen keinen Vorgänger, obwohl es nicht an Nachfolgern fehlen wird, die sich einbilden, die meinem Verfahren zu Grunde liegende Idee verstehe ich so von selbst, dass sie jeder andere Sachverständige sofort auch hätte haben können.

2. Die Erhöhung des scheinbaren Horizonts über dem wahren Horizont eines Punktes.

Es wird selten eine gerade Eisenbahnstrecke geben, welche 1 Meile lang ist: die Seitenlängen der Polygone der auf Eisenbahnen auszuführenden Präcisionsnivellements werden daher auch in der Regel weniger als 1 Meile betragen. Angenommen aber auch, eine Seite wäre 1 Meile lang, so umschlösse sie doch nur einen Bogen von 4 Minuten, und ein solches Bogenstück irgend eines vertikalen Schnitts des Erdellipsoids kann unter allen Umständen als ein Kreisbogen angesehen werden, der mit dem Krümmungshalbmesser des Ellipsoids an der betreffenden Stelle und in der Vertikalebene des Bogens beschrieben ist. Die oben bezeichnete Aufgabe lässt sich daher auch so ausdrücken: für eine gegebene Entfernung vom Berührungspunkt den Abstand der Tangente eines Kreisbogens von diesem Bogen zu bestimmen.

Fig. 1.



Ist in Fig. 1 AB der gegebene Kreisbogen vom Halbmesser r und der Amplitude φ, also der Länge $b = r\varphi$, und AD eine Tagente in A, so findet man für deren Abstand BD = F aus dem rechtwinkeligen Dreiecke BDE, in welchem der Winkel $BED = \varphi$ und die Tangente $BE = r \operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi$ ist, sofort den Ausdruck

$$F = r \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} \varphi,$$

und wenn man mit hinreichender Genauigkeit

$\operatorname{tg}\varphi = \varphi + \frac{1}{3}\varphi^3$ und $\operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi = \frac{1}{2}\varphi + \frac{1}{24}\varphi^3$

setzt und berücksichtigt, dass $\varphi = \frac{b}{r}$ ist, so wird schliesslich

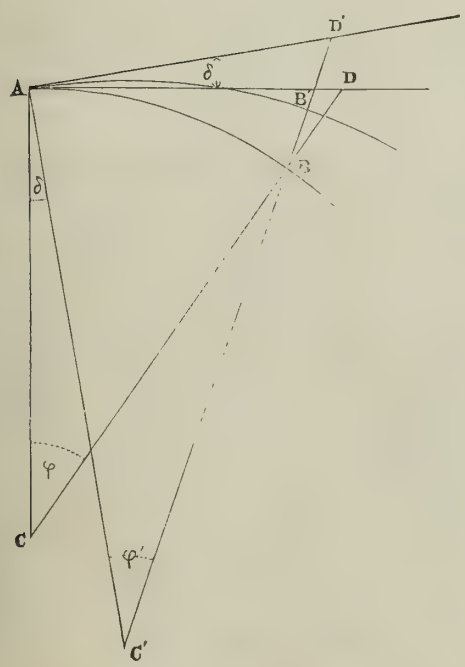
$$F = \frac{b^2}{2r}\left(1 + \frac{5}{12}\frac{b^2}{r^2}\right) \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

Das zweite Glied dieses Ausdrucks kann man fast immer vernachlässigen, da es für b = 1 Meile nur 0,000000564 und folglich für b = 10 Meilen nur 0,0000564 gegen 1 beträgt, demnach

in dem ersten Falle nur einen absoluten Werth von $0^{mm}0024$ und in dem zweiten von $0^{mm}24$ hat.

So lange man wie bisher annimmt, dass die horizontalgestellte Visirlinie des Nivellirinstruments mit der Tangente des elliptischen Schnitts AB zusammenfällt, bedeutet allerdings F die Erhöhung des scheinbaren Horizonts über dem wahren; wenn aber AB nicht der wahre Horizont ist, so kann auch AD nicht der scheinbare sein, und es bedeutet in diesem Falle F lediglich den Abstand der Tangente AD vom Bogen AB für die Entfernung AB. Stellt man sich vor, es fände in A eine Lothablenkung $\delta = CAC'$ statt und es sei $AC' = C'B' = r'$ der Halbmesser der wirklichen Erdkrümmung AB' an dieser Stelle, während $AC = r$ der Halbmesser des Besselschen Ellipsoids oder der idealen Krümmung AB vorstellt, so ist AB' der wahre und AD' der scheinbare Horizont von A, und es beträgt die Erhöhung des letzteren über dem ersteren nach der eben entwickelten Formel $B'D'$ oder

Fig. 2.



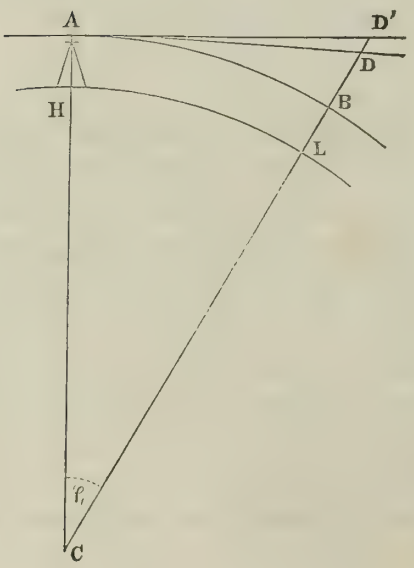
$$F' = \frac{b^2}{2r'}\left(1 + \frac{5}{12}\frac{b^2}{r'^2}\right).$$

Es gehört wesentlich zu der hier zu lösenden Aufgabe: für je zwei aufeinander folgende Standorte des Nivellirinstruments die gegenseitige Lage der Tangenten AD und AD', wovon letztere durch das Fernrohr des Nivellirinstruments angezeigt wird, zu finden; denn der Winkel dieser Tangenten DAD' ist der Lothabweichung δ gleich und steht in einfacher Beziehung zu dem Krümmungswinkel φ', die wir beide suchen, um damit und aus den sonst gegebenen Grössen den Abstand BB' der Niveaufläche vom Erdellipsoid zu berechnen.

Die Höhe eines Punktes über einem anderen im Sinne der in Nr. 1 gegebenen Definition wird bekanntlich dadurch gefunden, dass man erst jede Lattenablesung mit Hilfe von F auf den wahren Horizont reducirt und dann die reducirten Lattenhöhen von einander abzieht. Die Wirkung dieses Verfahrens ist der gleich, welche sich unmittelbar äussern würde, wenn man nach der Richtung des wahren Horizonts visiren könnte und die so erhaltenen Lattenablesungen von einander abzöge. Für unseren gegenwärtigen Zweck bedürfen wir eines solchen Verfahrens nicht, da es sich zunächst nicht um die Höhe von gegebenen Punkten, sondern nur um die gegenseitige Lage der Lothlinien und Normalen in diesen handelt. Hiebei kommt alles darauf an, den Lattenabschnitt genau zu erhalten, welcher zwischen der scheinbaren Horizontalebene des Nivellirinstruments und dem Fusspunkt der Latte liegt. Dieser Abschnitt hängt aber theilweise von der terrestrischen Strahlenbrechung ab, wesshalb hierüber Einiges zu erörtern ist.

3. Der Einfluss der terrestrischen Strahlenbrechung auf die Ergebnisse des Nivellirens.

Fig. 3.



Bei regelmässiger Beschaffenheit der Atmosphäre der Erde wird die Wirkung der Strahlenbrechung der Luft auf die Beobachtung eines Gegenstandes immer darin bestehen, dass sie den Gegenstand höher zeigt als er ist. Wir lesen also beim Nivelliren auf der Latte nach Fig. 3 einen Punkt D ab, der um den Refractionswinkel DAD' tiefer liegt als der scheinbare Horizont AD', den uns das Nivellirinstrument AH angibt, und finden die Zahl D', welche von diesem Horizont getroffen wird, nur dadurch, dass wir zur Ablesung LD den Betrag $c' = DD'$ der Refractionswirkung addiren. Wie gross ist aber c'?

In meiner Theorie der atmosphärischen Strahlenbrechung[1]) habe ich gezeigt, dass man die Höhe x eines Gegenstands über dem wahren Horizont der Axe, um welche das Fernrohr des Theodolithen oder Nivellirinstruments gedreht wird, aus folgender Formel findet:

$$x = r_0\varphi\left(\cot z + \frac{\cos^2 z + 1 - v}{2\sin^2 z}\varphi + \frac{2v\cot z}{3m\sin^2 z}\varphi^2 + \right.$$
$$\left. + \frac{v(\cos^2 z + 1 - v)}{6m\sin^4 z}\varphi^3 + \ldots\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

In diesem Ausdruck bedeutet

r_0 den Krümmungsmesser der Erde bis zur Instrumentenaxe,

φ die Amplitude zwischen den Lothen, welche durch den Beobachtungsort und den beobachteten Gegenstand gezogen sind,

z die Zenithdistanz der Visirlinie nach dem Gegenstand,

m das Verhältniss der Atmosphärenhöhe h zu dem Erdhalbmesser r_0 und

v das Verhältniss von $5\alpha : m$, wobei α die Refractionsconstante der atmosphärischen Luft vorstellt.

Für den mit der geographischen Breite veränderlichen mittleren Werth von m habe ich auf S. 72 der Nr. 1589 der Astron. Nachrichten und auf S. 622 der dritten Auflage meiner „Elemente der Vermessungskunde“ eine Tafel mitgetheilt, woraus sich für jede Breite der einer Temperatur von $9^0{,}31$ C und einem Luftdruck von $751{,}^{mm}71$ entsprechende mittlere Werth von $m = m_0$ finden lässt. Will man diesen Mittelwerth nicht ohne weiteres anwenden, sondern ihn nach den auf den Stationen beobachteten Baro- und Thermometerständen b und t verbessern, so ist zu bemerken, dass der aus der Tafel genommene Werth von m_0 noch mit der Luftdichtigkeit

$$d = \frac{272{,}8 + 9{,}31}{272{,}8 + t} \cdot \frac{b}{751{,}71} = \frac{3\,b}{2182 + 8\,t} \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

---

1) „Die atmosphärische Strahlenbrechung auf Grund einer neuen Aufstellung über die physicalische Constitution der Atmosphäre.“ I. Abschnitt: die astronomische Strahlenbrechung (Astron. Nachrichten Nr. 1478 bis 1460). II. Abschnitt: die terrestrische Strahlenbrechung (Astron. Nachrichten Nr. 1587 bis 1590). Beide Abschnitte sind auch als Separatabdrücke in der lit. artist. Anstalt von J. G. Cotta in München erschienen: 1864 und 1866.

worin t die Temperatur der Luft in Centigraden und b den Barometerstand in Millimetern bedeutet, dividirt werden muss, da $m = \frac{m_0}{d}$ ist.

Was den Werth von $\mathfrak{v}$ anlangt, so kann man ihn aus den Formeln

$$v = \frac{5\alpha}{m} \text{ und } \alpha = d\,\alpha_0$$

berechnen, da

$$\alpha_0 = 0{,}00027895 \text{ und } \log \alpha_0 = 6{,}4455264 - 10$$

ist. Uebrigens folgt aus den Werthen von α und m die Zahl

$$v = \frac{5\,\alpha_0}{m_0} \cdot d^2 = v_0\, d^2.$$

Bleibt daher die geringe Aenderung des Werths von m_0 mit der geographischen Breite unberücksichtigt, so lässt sich aus dem mittleren Werthe von

$$v_0 = 0{,}186865, \quad \log v_0 = 9{,}2715281 - 10$$

der von v jederzeit erhalten, wenn man v_0 mit dem Quadrat der Luftdichtigkeit multiplicirt.

Wenden wir den Ausdruck für die Höhe x auf den vorliegenden Fall an, so ist

$$z = 90^0 \;,\; r_0 = r_1 \;,\; \varphi = \varphi_1 \;,\; x = x_1$$

zu setzen, wodurch erhalten wird:

$$x_1 = \tfrac{1}{2} r_1 \varphi_1^2 (1 - v)\left(1 + \frac{v}{3m} \varphi_1^2\right). \quad \ldots \quad (4)$$

Diese Höhe ist offenbar $= f' - c'$, und man findet aus der Gleichung $c' = f' - x_1$, wenn $f' = r_1 \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} \varphi_1 \operatorname{tg} \varphi_1$ gesetzt und entwickelt wird:

$$c' = \tfrac{1}{2} r_1 \varphi_1^2 v \left(1 - \frac{4v(1-v) - 5m}{12mv} \varphi_1^2\right). \quad \ldots \quad (5)$$

Da das zweite Glied des Ausdrucks für c' nur bei weit ausgedehnten trigonometrischen Höhenbestimmungen einen merklichen Werth erlangt, so kann man es in unserem Falle, wo es sich nur um Nivellirstationen oder höchstens Polygonseiten von einer Meile Länge handelt, weglassen und daher

$$c' = \tfrac{1}{2} r_1 \varphi_1^2 v = \frac{b_1^2}{2 r_1} v \quad \ldots \quad (6)$$

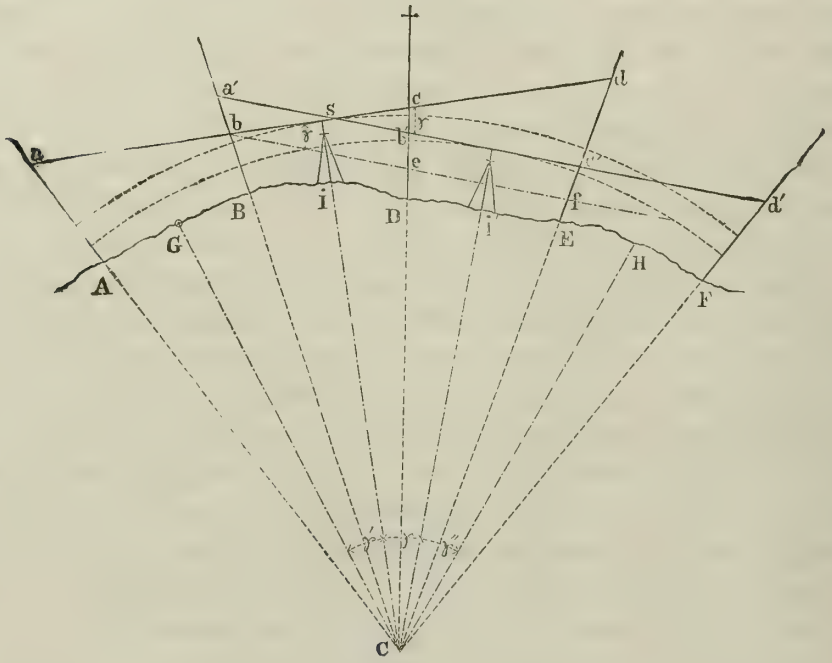
setzen. Bei der Berechnung von Präcisionsnivellements wird man übrigens die den beobachteten Stationslängen, Baro- und Thermometerständen etc. entsprechenden Werthe von c' aus einer besonders angelegten Tafel entnehmen, um sie sofort den betreffenden Ablesungen beizufügen. Auf dieser Verbesserung der Ablesungen muss hier, wo nach einer Methode nivellirt wird, bei der sich Erdkrümmung und Strahlenbrechung im Allgemeinen nicht eliminiren lassen, durchaus bestanden werden. Ich setze sie im Folgenden als vollzogen voraus, d. h. ich nehme an, dass die Ablesung a bedeute: die wirklich abgelesene Lattenhöhe LD = l vermehrt um die Refractionswirkung $c' = DD'$ (Fig. 3), so dass jederzeit $a = l + c'$ und c' dem obigen Ausdrucke so lange gleich ist, als man keine besonderen Formeln für die terrestrische Strahlenbrechung in geringer Höhe über den Boden besitzt. Meine Theorie dieser Refraction gilt allerdings nur für solche Luftschichten, auf welche die strahlende Wärme des Bodens keinen merklichen Einfluss mehr äussert, wie dieses bei den trigonometrischen Höhenmessungen nahezu der Fall ist, und ich gebe gerne zu, dass an sehr warmen sonnigen Tagen der Ausdruck für c' eine Modification erleiden muss; ich bin aber andererseits auch überzeugt, dass die bekannten bisherigen Aufstellungen über die Grösse der terrestrischen Strahlenbrechung, welche auf Temperatur und Luftdruck gar keine Rücksicht nehmen, in dem angezeigten Falle noch mehr von der Wahrheit abweichen müssen, als der Werth von c' und ich kann daher nur wiederholt den Wunsch aussprechen, dass diejenigen Geodäten, welche mehr Zeit dazu haben als ich, Beobachtungen und Untersuchungen über die Grösse der atmosphärischen Strahlenbrechung in den unteren Luftschichten der Erde anstellen und veröffentlichen möchten. Ich würde dann dem praktischen Theile dieser Abhandlung, welcher dem gegenwärtigen theoretischen folgen wird, eine Tafel beifügen, aus der man sofort die erforderlichen Werthe von c' entnehmen könnte.

4. Den Neigungswinkel zweier Lothlinien durch exactes Nivelliren zu bestimmen.

Der Neigungswinkel der horizontalen Visirlinien zweier ziemlich entfernt von einander stehenden Nivellirinstrumente ist gleich dem Neigungswinkel der durch die vertikalen Instrumentenaxen gezogenen Lothlinien.

Sobald ich also den Winkel der Visirlinie abcd des Instruments I (Fig. 4.) und der Visirlinie a′ b′ c′ d′ des Instruments I′ bestimmen kann, habe

Fig. 4.



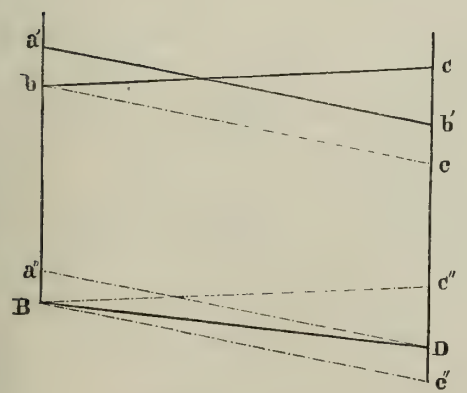
ich auch den Centriwinkel ICI′ = γ gefunden. Das Mittel, den Winkel γ zu messen, besteht aber darin, die Visirlinien der beiden Instrumente sich kreuzen zu lassen, und auf unseren Latten abzulesen, wie es in der genannten Figur angedeutet ist.[1]) Für das Instrument I

1) Herr Prof. Börsch beschreibt zwar in seiner vortrefflichen Schrift „die Nivellirinstrumente des mathematisch-mechanischen Instituts von F. W. Breithaupt und Sohn in Cassel", 1871, S. 48 ein mit gleichzeitigen Controlnivellement verbundenes Verfahren, aus der Mitte zu nivelliren, wobei auch an den Enden der Stationen die Visirlinien übereinander greifen; er hat jedoch diese Anordnung der Lattenstellung nur gewählt, „um nicht allein die normale oder abnormale Refraction zu erkennen und dadurch ein möglichst scharfes sondern auch gleichzeitig ein doppeltes Nivellement und vielleicht sogar für die Folge die Elemente zur Berechnung der Refraction zu erhalten", und es ist dieselbe daher nicht bloss dem Zwecke sondern auch der Form nach von der meinigen verschieden, was jeder Sachverständige sofort anerkennen wird.

seien in A, B, D, E und für I′ in B, D, E, F vier Nivellirlatten aufgestellt, und es seien die bezüglichen Ablesungen auf denselben (mit Einrechnung der Refractionswirkung c′, von welcher in Nr. 3 die Rede war) a, b, c, d und a′, b′, c′, d′, so dass also a den Abstand aA, b den bB, c den cD, d den dE u. s. w. vorstellt. Die Entfernungen des Instruments I von den Lattenstandpunkten A, B, D, E und eben so die des Instruments I′ von B, D, E, F ergeben sich aus den Lattenablesungen, da das Nivellirfernrohr auch zum Distanzmessen eingerichtet ist. (Die Genauigkeit dieser Längenmessung ist in dem vorliegenden Falle ausreichend, obgleich es sich um sehr exacte Winkelmessungen oder vielmehr um Messung kleinster Theile von Winkeln handelt: da nämlich die relative Genauigkeit dieser kleinsten Winkel nicht gross sein kann, so braucht es auch die der Längenmessungen nicht zu sein.) Nennen wir die Entfernungen der Latten von I, auf welchen die Ablesungen a, b, c, d gemacht werden, beziehlich $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, und jene vom Instrumente I′, welche die Ablesungen a′, b′, c′, d′ liefern, beziehungsweise $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}'$, $\mathfrak{d}'$, so ist nach Fig. 5, welche den Vorgang in der Station I darstellt:

$$Dc'' = c - b = -(b - c)\; De'' = Ba'' = a' - b',$$

Fig. 5.



mithin durch Addition der Werthe von Dc″ und De″:

$$c''e'' = (a' - b') - (b - c) = \\ = -[(b - c) - (a' - b')],$$

folglich auch, wenn man vom Vorzeichen absieht, und wegen Kleinheit des Winkels $\operatorname{tg}\gamma = \gamma \sin 1''$ setzt:

$$\gamma = \frac{(b - c) - (a' - b')}{(b + c)\sin 1''}. \quad . \quad (7)$$

In gleicher Weise findet man aus den Beobachtungen in der Station I′:

$$\gamma = \frac{(c - d) - (b' - c')}{(b' + c')\sin 1''}, \quad . \quad (7,a)$$

und durch Verbindung der Beobachtungen in beiden Stationen:

$$\gamma = \frac{(b - d) - (a' - c')\ ^{1})}{(b + c + b' + c') \sin 1''}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7,b)$$

Würde also in jeder Station auf jeder Latte nur Einmal abgelesen, so erhielte man schon 3 Werthe von γ; da aber das Fernrohr drei Horizontalfäden hat, so wird man, was auch schon der Distanzmessung wegen nothwendig ist, an jedem Faden ablesen und so 3mal 3 oder 9 Werthe von γ erhalten. Wird dann überdiess noch das Fernrohr um seine optische Axe gedreht und auf jeder Latte wiederholt abgelesen, so ergeben sich 9 weitere Werthe von γ, wodurch es also möglich ist, einen Mittelwerth von γ aus 18 Beobachtungen desselben zu berechnen. Wenn schliesslich die Beobachtungsreihen mit umgesetzter Libelle gemacht werden, so lässt sich der Winkel γ sogar aus 36 Beobachtungen berechnen und demnach möglichst fehlerfrei erhalten.

Ueber die Ausführung des eben beschriebenen Nivellements habe ich noch Folgendes zu bemerken.

Die Fernrohre der zu exacten Nivellements verwendbaren Instrumente gestatten sehr grosse Lattenabstände. Bei dem mit Ertelschen Instrumenten ausgeführten bayrischen Präcisionsnivellement sind zwar nur grösste Abstände von 100 Meter vorgekommen, Prof. Börsch gibt jedoch in § 20 seiner schon erwähnten Beschreibung der Breithaupt'schen Nivellirinstrumente an, dass man bei bedecktem Himmel aber reiner mässig warmer Luft und Windstille mit den grössten jener Instrumente noch Lattenabstände von 300 und mehr Meter nehmen und die zuverlässigsten Beobachtungen erhalten kann. Selbstverständlich ist hier gemeint, dass man bei diesen Entfernungen auf den Latten noch deutlich ablesen kann. Nehmen wir bei 300^{m} Entfernung der Latte die Genauigkeit der Ablesung zu 0,6 Millimeter an, so würde der Fehler in der Höhenbestimmung, so weit er vom Ablesen herrührt, nicht mehr als 0,4 Sekunden betragen, und hiemit stimmen auch die Versuche überein, welche Prof. Stampfer über die Genauigkeit der Visur mit Fernrohren angestellt hat. Es fand nämlich diese Genauigkeit $= \frac{15''}{v}$,

---

1) Es bedarf wohl kaum der Erinnerung, dass man auch die Entfernung $b + c + b' + c' = b + b = a' + c'$ setzen kann.

wenn v die (mässige) Vergrösserung des Fernrohrs bedeutet, und hieraus berechnet sich für v = 36 die Genauigkeit der Visur = 0″,4.

Zu dem Fehler der Einstellung und Ablesung kommt noch jener, welcher von der namentlich bei Sonnenschein eintretenden Veränderlichkeit der Strahlenbrechung herrührt und von dem schon in § 3 bemerkt wurde, dass er nicht genau zu schätzen ist, da er von verschiedenen Einflüssen abhängt. Dass aber der in Rede stehende Fehler nicht bedeutend sein kann, geht aus der Grösse der Strahlenbrechung selbst hervor, indem diese hier 0″,7 nicht überschreiten wird. Denn nimmt man die grösste Entfernung der Latte vom Instrument zu $308^{m}67$ Bogen oder 10″ Centriwinkel und den Strahlenbrechungscoefficienten im Mittel zu 0,14 an, so wird nach unserer Formel Nr. 6 die Correctionsgrösse, welche zur Ablesung auf der Latte zu addiren ist, $c' = 0''{,}7$ oder $= 1{,}^{mm}04$, und dieser Werth ist (wenn die richtige Zeit zur Beobachtung gewählt wird, was bei genauen Arbeiten stets geschehen muss) wohl kaum um mehr als 0″,2 oder 0″,3 von der Wahrheit entfernt. Es würde demnach aus den angegebenen Gründen eine Beobachtung um $0''{,}4 + 0''{,}3 = 0''{,}7$ unsicher sein können; nehmen wir aber selbst 1″ als mittleren Fehler einer Beobachtung an, so wird das aus allen Beobachtungen berechnete Mittel des Winkels γ jedenfalls um nicht mehr als 0″,3 bis 0″,5 falsch sein, und diese Genauigkeitsgrenze ist für unsere Untersuchungen genügend.

Wenn es sich bloss um die Bestimmung des Neigungswinkels γ eines einzigen Paares von Lothlinien (Fig. 4) handelte, so würde die Aufstellung und Ablesung der Latten in A und F ganz überflüssig sein. Diese Latten und die Ablesungen auf ihnen sind nur für die Messung von Krümmungswinkeln, welche sich links an das Loth IC und rechts an I′C anschliessen, nothwendig; wir haben sie aber hier angedeutet, um die für die folgende Aufgabe auch in den Stationen I und I′ nothwendigen Beobachtungen zu bezeichnen.

Was die Grösse der Stationen betrifft, so hat man dieselbe der Leistungsfähigkeit der Nivellirinstrumente anzupassen. Lässt sich mit diesen auf 300^{m} Entfernung noch gut ablesen, so kann man die Lattenabstände zu etwa 200^{m} annehmen und die Instrumente in der Mitte zwischen den Latten, also 100^{m} von den ersten und 300^{m} von den zweiten

entfernt, aufstellen. Der zu messende Centriwinkel γ wird alsdann etwas über 6 Sekunden, wenn die Erdkrümmung nahezu normal ist. Setzen wir dieselbe $3 \cdot 2'',06 = 6'',18$, so werden die Zähler der 3 mit Nr. 7, 7_a, 7_b bezeichneten Brüche, von denen jeder einen Werth von γ liefert, folgende:

$$(b - c) - (a' - b') = 0^m,006$$
$$(c - d) - (b' - c') = 0,006$$
$$(b - d) - (a' - c') = 0,012,$$

und es ist hiedurch klar, dass die Bestimmung des Winkels γ durch das Nivellirinstrument nicht etwa desshalb, weil man es mit gar zu kleinen Grössen zu thun hätte, als unausführbar erscheint. Würde man die Stationen auf die Hälfte ihrer dermaligen Längen, also die grösste Lattenweite auf 150^m zurückführen, so erhielte man für die oben genannten drei Zähler zwar nur die Hälften ihrer Werthe, aber immerhin noch solche Grössen, aus denen sich die Werthe von γ mit der erforderlichen Zuverlässigkeit berechnen liessen.

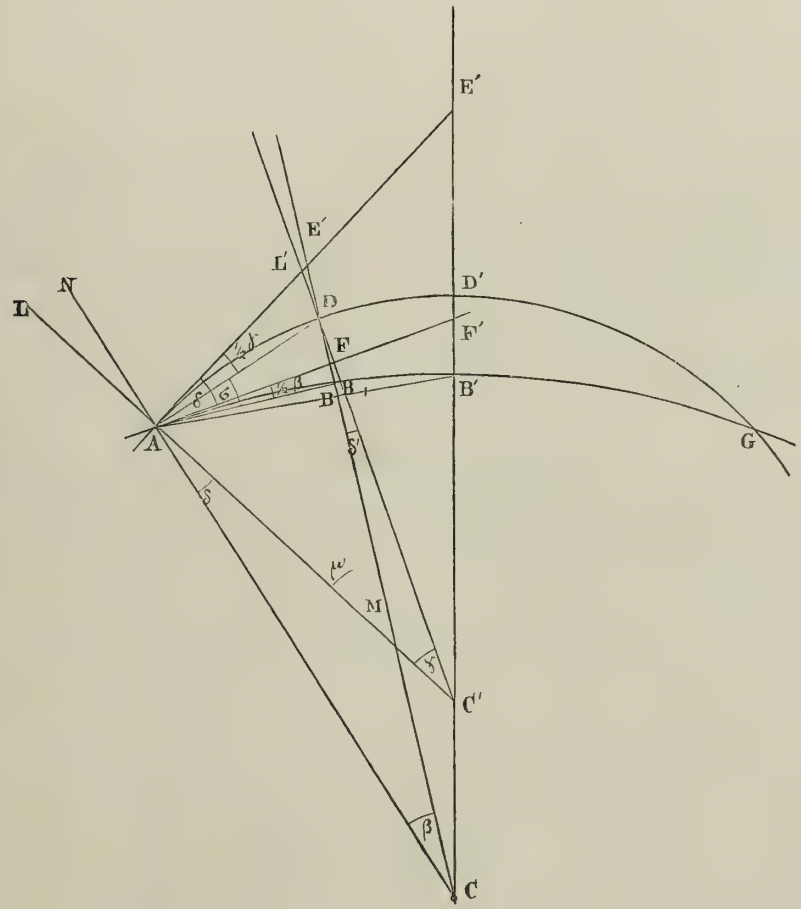
Es bedarf keiner besonderen Erörterung, dass man den Neigungswinkel zweier Lothlinien, deren Fusspunkte G und H (Fig. 4) weiter von einander entfernt sind als die in Fig. 4 dargestellte grösste Nivellirstation II' lang ist (deren Entfernung also bei einer Maximalleistung des Fernrohrs von 300^m mehr als 200^m beträgt) durch Wiederholung des eben beschriebenen Verfahrens nach G und H hin findet. Nach Fig. 4 hätte man von G und I aus den Winkel γ', von I und I' aus den Winkel γ, und von I' und H aus den Winkel γ'' zu messen, um den Gesammtwinkel $\gamma + \gamma' + \gamma'' = GCH$ zu erhalten.

5. Die Ablenkung der Lothlinien zweier oder mehrerer Punkte der Erdoberfläche von den diesen Punkten angehörigen Normalen des Ellipsoids durch exactes Nivelliren zu bestimmen.

In Fig. 5 stelle der Bogen ABB'G einen Vertikalschnitt des Erdellipsoids und ADD'G einen Schnitt der durch A gehenden Niveaufläche vor. Diese Bögen seien so klein, dass man sie als Kreise von den Halbmessern AC = R und AC' = r ansehen kann. Das Loth in A habe die Richtung LAC' und die Normale daselbst die Richtung NAC;

es ist folglich die Lothablenkung in A, um deren Bestimmung es sich handelt, gleich $LAN = CAC' = \delta$.

Fig. 6



Wenn AD der Schnitt einer Niveaufläche ist, so kann man offenbar den Winkel der Lothe in A und D, nämlich $LC'L' = \gamma$ nach Nr. 4 durch exactes Nivelliren bestimmen; wir können also diesen Winkel als bekannt ansehen, und eben so ist aus den Bessel'schen Dimensionen des

Erdsphäroids der Winkel β der Normalen in A und D zu berechnen, sobald die Länge des Bogens AD = AB bekannt ist. Dieser lässt sich aber unmittelbar messen, und es erfordert diese Messung keinen besonderen Grad der Genauigkeit. Es ist also auch β eine bekannte Grösse. Bezeichnet man die Lothablenkung in D oder den Winkel L'DE = CDC' mit δ', so findet nach der Figur die Beziehung statt:

$$\beta + \delta = \gamma + \delta'$$

woraus die Differenz der beiden Lothablenkungen

$$\delta - \delta' = \gamma - \beta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

folgt; diese Differenz kann somit aus γ und β berechnet werden. Die Summe der beiden δ lässt sich allerdings nur durch eine unbekannte Grösse ausdrücken. Bezeichnet man nämlich den Winkel BAD der beiden Sehnen AB und AD mit σ, so wird nach der Figur

$$\sigma = \delta - {}^1/_2 (\gamma - \beta) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

und hieraus folgt, mit Rücksicht darauf, dass $\gamma - \beta = \delta - \delta'$ ist:

$$\delta + \delta' = 2\sigma. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Will man den in der Richtung der Normale des Erdellipsoids gemessenen Abstand BD = x der Niveaufläche ADD' von diesem Ellipsoid ABB' berechnen, so kann dieses mit Hilfe des Dreiecks ABD geschehen, welches $BD : AD = \sin\sigma : \cos {}^1/_2\beta$ und damit, wenn die Sehne AD mit s bezeichnet wird,

$$x = \frac{s \sin\sigma}{\cos {}^1/_2\beta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

liefert. Das Dreieck ADB_1 gibt den in der Richtung des Loths gemessenen Abstand DB_1 oder

$$x' = \frac{s \sin\sigma}{\cos(\sigma - {}^1/_2\gamma)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11_a)$$

Diese beiden Werthe können wohl in allen Fällen, jedenfalls aber bei Berechnung der Abstände x für die einzelnen Nivellirstationen, einander und gleich

$$x = b\,[\delta - {}^1/_2(\gamma - \beta)] \sin 1''$$

oder, wenn man die Differenz $\gamma - \beta = \varepsilon$ schreibt, gleich

$$x = {}^1/_2 b (2\delta - \varepsilon) \sin 1'' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

gesetzt werden, wobei b den Bogen AD vorstellt und δ und ε in Sekunden ausgedrückt sind.

Für eine Reihe von Stationen, die sich aneinander schliessen und die Längen b_1, b_2, b_3 . . . . haben, erhält man für die Abstände x_1, x_2, x_3 . . . folgende Werthe:

$$\begin{aligned} x_1 &= \tfrac{1}{2} b_1 (2\,\delta \;\; - \;\; \varepsilon_1) \sin 1'' \\ x_2 &= \tfrac{1}{2} b_2 (2\,\delta_1 \;\; - \;\; \varepsilon_2) \sin 1'' \\ x_3 &= \tfrac{1}{2} b_3 (2\,\delta_2 \;\; - \;\; \varepsilon_3) \sin 1'' \\ &\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ x_n &= \tfrac{1}{2} b_n (2\,\delta_{n-1} - \varepsilon_n) \sin 1''. \end{aligned} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (13)$$

Da die Grössen b_1, b_2, b_3 . . . und ε_1, ε_2, ε_3 . . . bekannt sind, und da

$B_1D_1 = x_2$, $B_2D_2 = x_1 + x_2$, $B_3D_3 = x_1 + x_2 + x_3$ u. s. w.

ist, so würde man für die Punkte A, D_1, D_2, D_3 . . . der Erdoberfläche die Abstände der Niveaufläche und des Umdrehungsellipsoids erhalten, wenn die Winkel δ, δ_1, δ_2, δ_3 . . . bekannt wären. Nun ist aber nach Figur 7:

$$\begin{aligned} \delta &= \delta_1 + \gamma_1 - \beta_1 = \delta_1 + \varepsilon_1 \\ \delta_1 &= \delta_2 + \gamma_2 - \beta_2 = \delta_2 + \varepsilon_2 \\ \delta_2 &= \delta_3 + \gamma_3 - \beta_3 = \delta_3 + \varepsilon_3 \\ &\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\ \delta_{n-1} &= \delta_n + \gamma_n - \beta_n = \delta_n + \varepsilon_n \end{aligned} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (14)$$

daher auch, wenn man diese Gleichungen addirt und $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \ldots = \Sigma(\varepsilon)$ setzt:

$$\delta = \delta_n + \Sigma(\varepsilon). \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (15)$$

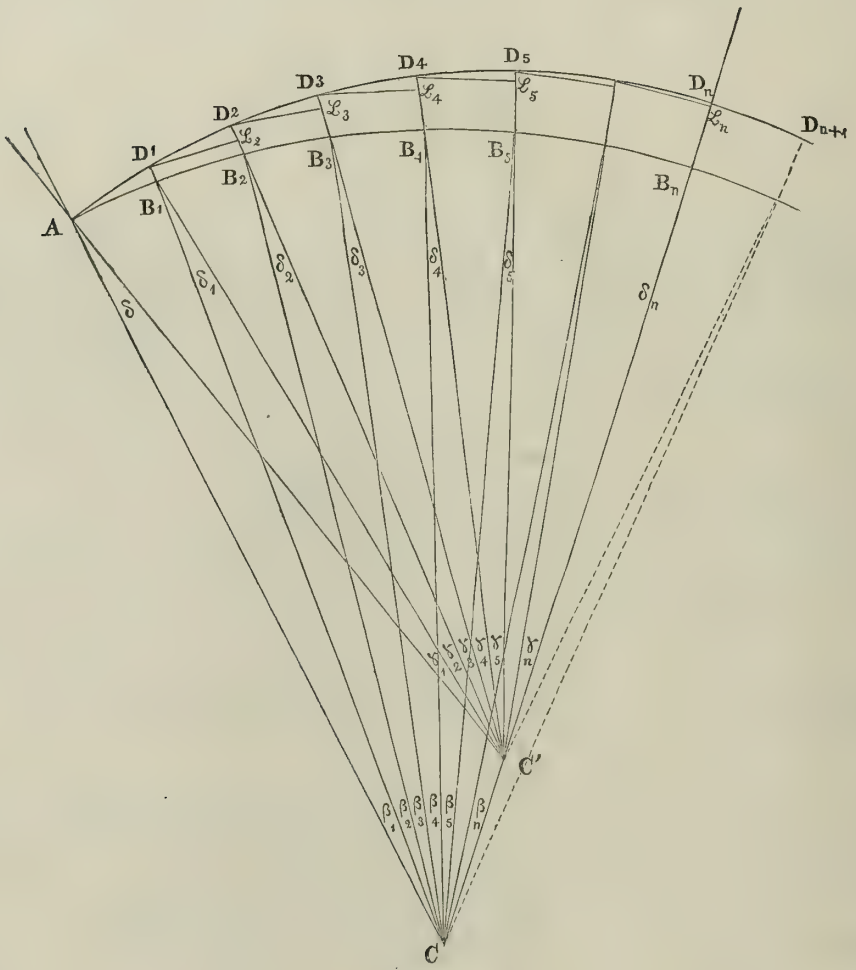
Nivellirt man nun nach dem hier beschriebenen System von A bis zu einem Punkte D_n fort, für welchen die Differenz $\gamma - \beta = \varepsilon = 0$ wird, also die ideale mit der wahren Niveaufläche zusammenfällt, so ist für diesen Punkt auch $\delta_n = 0$ und daher die Lothabweichung in A oder

$$\delta = \Sigma(\varepsilon)_n^1. \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (16)$$

Man ist in diesem Falle an der Stelle der Erdoberfläche angekommen, für welche Loth und Normale zusammenfallen. Wäre man von dieser Stelle ausgegangen und hätte rückwärts gegen A hin operirt, so würde sich δ aus derselben Reihe von Gleichungen (Nr. 14), nur in

umgekehrter Ordnung geschrieben und gleich gross ergeben haben. Ebenso ist klar, dass man die Stelle, wo $\delta_n = 0$ ist, nicht zu suchen

Fig. 7.



braucht, wenn für irgend einen astronomischen Punkt einer Haupttriangulation die Lothabweichung schon bekannt ist; denn wäre in dem Gleichungssystem (Nr. 14) δ_n die Lothabweichung des genannten Punkts, so fände man, von diesem ausgehend, nacheinander:

$$\begin{aligned}
\delta_{n-1} &= \delta_n + \varepsilon_n \\
\delta_{n-2} &= \delta_{n-1} + \varepsilon_{n-1} \\
&\vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\
\delta_1 &= \delta_2 + \varepsilon_2 \\
\delta &= \delta_1 + \varepsilon_1 . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)
\end{aligned}$$

Es unterliegt also keinem Zweifel, dass man in jedem Vertikalschnitt alle Lothabweichungen auffinden kann, sobald man nur eine derselben kennt, oder beim Nivelliren von einem Punkte ausgeht, in dem Loth und Normale sich decken. Damit ist aber die vorliegende Aufgabe gelöst.

6. Aus den beobachteten Lothablenkungen einer Reihe von Punkten, welche in einer Vertikalebene liegen, die Abstände des vertikalen Schnitts der Niveaufläche der Erde vom Erdellipsoid zu berechnen.

Nach Fig. 7 kann man die Bogenstücke AB_1, AB_2, AB_3 .... des elliptischen Schnitts AB_n der Erdoberfläche als Abcissen und die lothrechten Abstände B_1D_1, B_2D_2, B_3D_3 .... der Punkte D_1, D_2, D_3 .... der Niveaufläche als Ordianten dieser Punkte ansehen. Denkt man sich die Bogenstücke B_1B_2, B_2B_3, B_3B_4 .... nacheinander und in paralleler Richtung bis D_1B_2, D_2B_3, D_3B_4 .... verschoben, so sind die lothrechten Abstände D_2B_2, D_3B_3, D_4B_4 .... die zu den Abscissen D_1B_2, D_2B_3, D_3B_4 .... gehörigen Ordinaten, und es setzen sich (nach den Formeln Nr. 13) die Abstände der Niveauflächen-Punkte vom Erdellipsoid wie folgt zusammen:

$$\begin{aligned}
B_1D_1 &= b_1 (\delta - 1/2\,\varepsilon_1) \sin 1'' \\
B_2D_2 &= b_2 (\delta_1 - 1/2\,\varepsilon_2) \sin 1'' + B_1D_1 \\
B_3D_3 &= b_3 (\delta_2 - 1/2\,\varepsilon_3) \sin 1'' + B_2D_2 \\
B_4D_4 &= b_4 (\delta_3 - 1/2\,\varepsilon_4) \sin 1'' + B_3D_3 \\
&\text{u. s. w.} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)
\end{aligned}$$

Allgemein erhält man den Abstand des Punktes D_μ des Schnitts der Niveaufläche von dem des Erdellipsoids oder

$$B_\mu D_\mu = y_\mu = \Sigma(x)'_\mu \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

wobei das letzte Zeichen die Summe aller in den Gleichungen Nr. 13 enthaltenen x-Werthe vo x_1 bis x_μ bezeichnet. Da für den n ten Punkt D_n

die Lothabweichung $\delta_n = 0$ ist, so wird für diese Stelle nach Gl (9)

$$\sigma = \tfrac{1}{2}\delta \text{ und}$$

$$y_n = \frac{S \sin \tfrac{1}{2}\delta}{\cos \tfrac{1}{2} B}$$

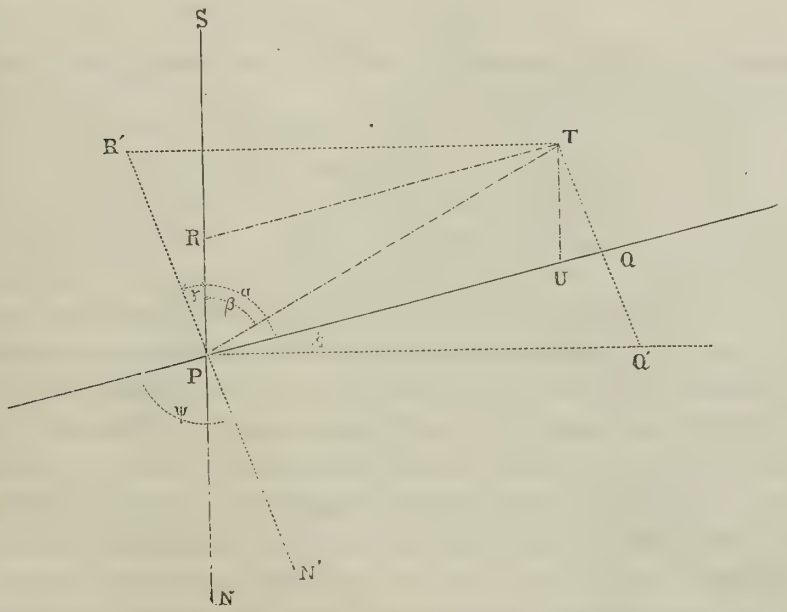
wobei B nach Fig. 7 den Winkel $ACB_n = \Sigma(\beta)_n^1$ und S die Sehne des Bogens AD, dessen Mittelpunktswinkel $\gamma = AC'D_n = \Sigma(\gamma)_n^1$ ist, vorstellt. Für diese Sehne kann man übrigens ohne alles Bedenken den horizontalen Bogen $AD_n = \Sigma(b)_n^1$ selbst setzen, da sie von diesem nur um eine Grösse dritter Ordnung abweicht und y_n, wofür man in den meisten Fällen $\tfrac{1}{2} S \delta \sin 1''$ schreiben darf, niemals einen grossen Werth erlangt. Hat man über einen grossen Terrainbezirk ein Höhennetz erster Ordnung gelegt und das Präcisionsnivellement nach den in § 4 dieser Abhandlung niedergelegten principiellen Bestimmungen ausgeführt, so lassen sich folglich für alle einnivellirten Punkte die Abstände der Niveaufläche der Erde von deren idealen Form, dem Umdrehungsellipsoid, berechnen, und mit diesen Abständen kann man die Gestalt der Niveaufläche in derselben Weise durch Schichtenlinien anschaulich machen, wie dieses in topographischen Plänen bezüglich der Bodengestaltung durch Horizontalcurven geschieht. Nur hat man sich hier unter den schneidenden Flächen nicht horizontale Ebenen sondern nur concentrische sphäroidische Flächen von gleichen Vertikalabständen zu denken.

Würde die ganze feste Erdoberfläche oder doch ein grosser Theil derselben nach der von mir angegebenen Methode in exactester Weise nivellirt, so liesse sich die wirkliche mathematische Erdgestalt oder die zur Erdschwere gehörige Niveaufläche aus direkten Beobachtungen ableiten, und es zählten alsdann die Präcisionsnivellements, weil sie für jeden Punkt der Erde Krümmung und Lothabweichung anzugeben im Stande sind, zu den unentbehrlichsten und wichtigsten Gradmessungsarbeiten, während sie zur Zeit noch eine untergeordnete Rolle desshalb spielen, weil sie lediglich nur zur Bestimmung der gegenseitigen Höhenlage von Punkten der wirklichen Erdoberfläche dienen.

Es bedarf wohl kaum der Erinnerung, dass ich meiner Methode, die Erdkrümmung und Lothablenkung durch exactes Nivelliren zu bestimmen, keine solche Bedeutung zuschreibe, dass dadurch die bisherige

astronomische Methode überflüssig würde; im Gegentheile sollen durch das hier beschriebene und überall durchführbare rein geodätische Verfahren, die Ergebnisse der astronomischen Lothablenkungs-Bestimmungen erst recht verwerthet werden, indem man die zur Kenntniss der Niveaufläche der Erde führenden Präcisionsnivellements an diese Bestimmungen anschliesst. Dieser Anschluss würde um so leichter erfolgen können, je mehr solcher Punkte vorhanden sind und je mehr man sich bemüht, an denselben die Lothabweichung nicht bloss in der Meridianebene sondern auch im ersten Vertikal oder einer anderen die erste schneidenden Ebene zu bestimmen; denn alsdann liesse sich die aus beiden Ablenkungen resultirende wahre Lothrichtung berechnen und es wäre für jede durch den gegebenen Punkt gelegte Vertikalebene die Ablenkung des Loths δ_n bekannt, welche man (nach § 6) kennen muss, wenn man ohne Weiteres aus dem Präcisionsnivellement in dieser Ebene den durch letztere veranlassten Schnitt der Erdniveaufläche construiren will.

Fig. 8.



Beträgt nämlich in der Meridianebene SN eines Orts P (Fig. 8) die Lothablenkung λ_1 und in einer anderen Ebene PQ, welcher das

Azimuth SPQ $= \alpha$ zukommt, λ_2, so findet man den Winkel λ, welchen die Schwererichtung mit der Normale von P (auf die auch λ_1 und λ_2 bezogen sind) einschliesst, aus einem Kräfte-Parallelepiped, dessen horizontale Grundfläche die Seiten

$$s_1 = PR = g \operatorname{tg} \lambda_1 = g \lambda_1 \sin 1''$$
$$s_2 = PU = g \operatorname{tg} \lambda_2 = g \lambda_2 \sin 1''$$

hat, wenn g die Grösse dsr Schwerkraft in der Richtung der Normale und folglich die Höhe des genannten Parallelepipeds vorstellt. Hieraus ergibt sich die Länge der Diagonale PT der Grundfläche gleich

$$s = g \sin 1'' \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 - 2 \lambda_1 \lambda_2 \cos \alpha} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

und aus dem nach PT geführten Diagonalschnitt des Parallelepipeds

$$\operatorname{tg} \lambda = \frac{s}{g} = \lambda \sin 1'',$$

woraus schliesslich folgt:

$$R = \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 - 2 \lambda_1 \lambda_2 \cos \alpha} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

Das Azimuth β der Diagonale PT erhält man nach der Figur sofort aus einer der Gleichungen:

$$\sin(\alpha - \beta) = \frac{s_1}{s} \sin \alpha = \frac{\lambda_1}{\lambda} \sin \alpha$$

$$\sin \beta = \frac{s_2}{s} \sin \alpha = \frac{d_2}{\lambda} \sin \alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

Wäre SN nicht die Mittagslinie, sondern der Schnitt irgend einer anderen Vertikalebene mit dem Erdellipsoid, so blieben selbstverständlich die vorhergehenden Formeln doch bestehen und es wären nur α und β keine Azimuthe mehr, sondern die Winkel erstens der Seiten PR und PU, dann zweitens der Seite PR mit der Diagonale PT der Grundfläche des Kräfteparallelepipeds: die Azimuthe dieser Seiten würden dann um das Azimuth der Seite PS zu vermehren oder zu vermindern sein.

Nachdem λ und β aus λ_1, λ_2 und α gefunden sind, kann man durch weitere Zerlegungen der Schwerkraft nach dem Kräfteparallelepiped die Lothabweichungen des Punktes P in irgend zwei Ebenen, z. B. in PR' und PQ' finden, welche unter sich den Winkel R'PQ' $= \psi$ und mit PQ die

Winkel ξ und $\psi - \xi$ bilden. Da hier, wegen Geringfügigkeit der die Lothablenkungen vorstellenden Winkel, die Seiten des Parallelogramms PR'TS' den gesuchten Lothablenkungen proportional sind, so hat man nach Fig. 8 sofort die Ablenkung nach PR' oder

$$\lambda' = \lambda \frac{\sin(\alpha + \xi - \beta)}{\sin \psi} = \lambda \frac{\sin \psi}{\sin \psi} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

und die Ablenkung nach PQ' oder

$$\lambda'' = \lambda \frac{\sin(\psi - \alpha - \xi + \beta)}{\sin \psi} = \lambda \frac{\sin(\psi - \varphi)}{\sin \psi} \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

wobei $\alpha + \xi - \beta = \varphi$ gesetzt ist.

Man kann also, wenn an einem astronomischen Punkt für zwei Ebenen (PR, PQ) die Lothabweichungen λ_1, λ_2 bekannt sind, für irgend zwei andere Ebenen (PR', PQ') die Ablenkungen λ', λ'', deren man vielleicht für ein Präcisionsnivellement nach diesen Ebenen bedarf, sehr leicht finden.

7. Der Schlussfehler eines in exactester Weise nivellirten Polygons.

Ich habe schon im Eingange dieser Abhandlung erwähnt, dass ich bei der zweiten allgemeinen Conferenz der europäischen Gradmessung die Behauptung aufgestellt habe, der polygonale Abschluss eines Nivellements, d. i. die Gleichheit der Coten des Anfangs- und Endpunktes eines Polygons, sei noch keine hinreichende Controle für die Genauigkeit des Nivellements, indem diese Gleichheit bei fehlerfrei gedachter Arbeit wohl eintreten kann, aber nicht nothwendig eintreten muss.

Zu dieser Behauptung bin ich, von den bereits im Eingange dieser Abhandlung angegebenen Gründen abgesehen, durch folgende Betrachtung gekommen. Ein vollkommen berichtigtes Nivellirinstrument gibt bei einspielender Libelle eine horizontale (auf der Schwererichtung senkrechte und die Niveaufläche der Erde berührende) Absehlinie, und der Unterschied der Ablesungen auf zwei vom Instrumente gleichweit entfernten Nivellirlatten ist der Höhenunterschied der Fusspunkte dieser Latten. Wenn die Libelle nicht einspielt, und sowohl bei Rück- als Vorblick einen bestimmten Ausschlag a nach einer und derselben

Seite hin, z. B. in der Richtung des Vorblicks bildet, so liest man nach einer geneigten Visirlinie ab, und es ist der Neigungswinkel w = ma Sekunden, wenn ein Theil des Ausschlags einem Winkel von m Sekunden entspricht. Der Fehler v in dem Höhenunterschiede der beiden um e Meter von einander entfernten Punkte ist

$$v = e\,tg\,w = e\,w\sin 1'' = m\,a\,e\sin 1'', \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

d. h. um so viel Meter findet man (bei der angenommenen Richtung des Fehlers) die Ablesung auf der anderen Latte grösser als sie sein würde, wenn man durch die von der Visirlinie getroffene Stelle eine Horizontalebene legte und durch deren Schnitt mit der Vorderlatte die Ablesung auf dieser bestimmen liesse: um v Meter erscheint daher auch in Folge der Subtraction der beiden Ablesungen der Standpunkt der vorderen Latte tiefer als jener der hinteren Latte. Wiederholt sich der Fehler v mehrmals in dem gleichen Sinne, so entsteht hieraus ein Gesammtfehler

$$v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_n = \Sigma(v)_n^1; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26)$$

kommt er aber auch p mal im entgegengesetzten Sinne vor, so dass der absolute Werth von

$$v' + v'' + v''' + \ldots + v^n = \Sigma(v')_p^1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27)$$

ist, so wird sich lediglich in Folge falscher Libellenstellung in den Coten des Anfangs- und Endpunktes des Polygons ein Unterschied

$$u = \Sigma(v)_n^1 - \Sigma(v')_p^1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

ergeben, und zwar wird, wenn dieser Unterschied positiv ist, in dem vorliegenden Fall der Endpunkt um u Meter tiefer erscheinen als er liegt, und folglich sein Abstand von einem über dem Terrain gelegenen Generalhorizont um eben so viel grösser sein als der des Anfangspunkts, obwohl beide Punkte in einen zusammenfallen.

Genau eben so wie die hier angenommenen falschen Libellenstellungen wirken die unregelmässigen Schwererichtungen oder die Lothabweichungen: die einspielende Libelle steht nämlich senkrecht zur Schwererichtung, während wir, in Ermangelung eines Anhaltspunktes für die Voraussetzung einer Lothablenkung, glauben dass sie zur Normale des Erdellipoids senkrecht stehe: die Libelle und die ihr parallele Absehlinie

des Fernrohrs bilden folglich mit der Tangentialebene zum Erdellipsoid denselben Winkel, welchen die Schwererichtung und die Normale des Ellipsoids an dem Beobachtungsorte einschliessen, d. h. den Winkel, welcher die Lothablenkung dieses Orts heisst. Wenn nun die Lothabweichungen in n Stationen eben so viele positive Fehler von der Gesammtgrösse $\Sigma(v)_n^1$ und in p Stationen p negative Fehler von der Grösse $\Sigma(v')_p^1$ erzeugen, so muss sich nothwendig die Cote des Endpunktes eines ganz fehlerfrei nivellirten Polygons um die Länge $u = \Sigma(v)_n^1 - \Sigma(v')_p^1$ von der Cote desselben Punkts, welcher als Anfangspunkt diente, unterscheiden, wobei selbstverständlich u null, positiv oder negativ sein kann.

Gegen diese Betrachtung wird sich ein anderer gegründeter Einwand nicht vorbringen lassen, als dass sie nicht ganz abgeschlossen ist, indem sie die Frage noch offen lässt, ob nicht in jedem Falle die von den Lothablenkungen herrührende Cotendifferenz null sein muss. Diese Frage ist offenbar mehr physicalischer als mathematischer Natur und lässt sich mit Sicherheit nur dann beantworten, wenn man über die Vertheilung der Schwerkräfte der Erde in Bezug auf Grösse und Richtung auf Grund von ausreichenden genauen Beobachtungen ganz im Klaren ist. Diese Klarheit ist aber noch nicht erreicht, da Lothablenkungen erst in neuerer Zeit und gewöhnlich nur in der Richtung der Mittagslinie gemessen zu werden pflegen, die Ergebnisse aber zum Theil den theoretischen Erwartungen widersprechen, wie dieses namentlich aus den in der Umgebung des Kaukasus vom kais. russischen Obersten Stebnizki in Tiflis angestellten Lothablenkungs-Beobachtungen zu folgen scheint, worüber Herr Staatsrath v. Struve in der dritten Sitzung der Wiener allgemeinen europäischen Gradmessungsconferenz vom Jahre 1871 berichtet hat.[1])

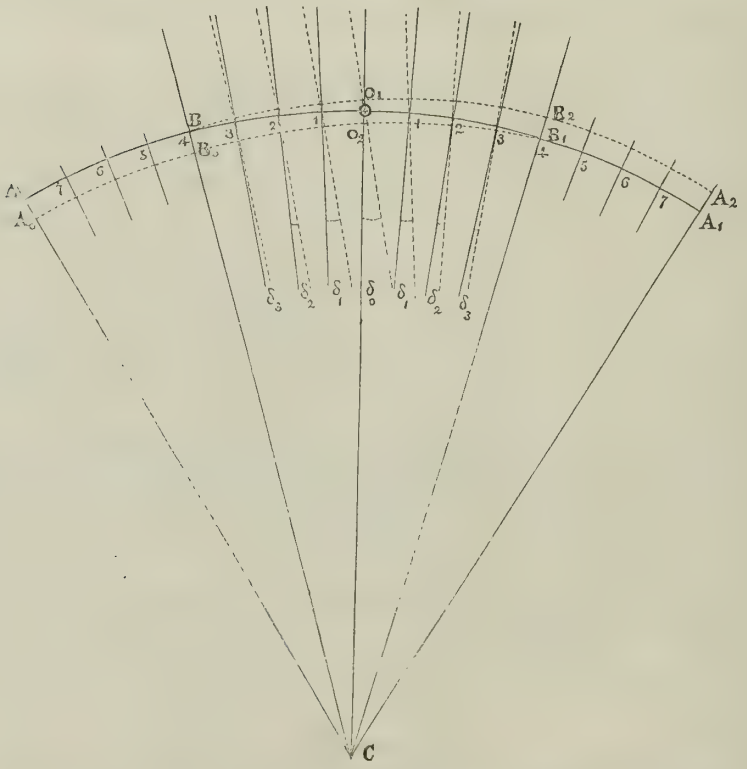
Ich will den Einfluss gegebener Lothabweichungen auf den polygonalen Abschluss eines Nivellements an folgendem hypothetischen Fall erläutern. In Fig. 9 stelle der Kreisausschnitt AOA_1CA ein in einer Ebene abgewickeltes Polygon vor, dessen Seiten alle auf dem idealen

---

1) Vergleiche: „Generalbericht der Europäischen Gradmessung für das Jahr 1871, zugleich Bericht über die dritte allgemeine Conferenz in Wien etc.

Erdellipsoid (hier auf der dasselbe ersetzenden Kugel) liegend gedacht sind. Die punktirten Linien sollen die gestörten Schwererichtungen andeuten, welche in O ihre grösste Abweichung haben und von dort aus sowohl nach links als nach rechts immer weniger abgelenkt sind, bis sie in den Punkten 4^l und 4^r mit den Normalen des Ellipsoids (hier der Kugel) wieder zusammenfallen. Die Grösse δ der sehr kleinen

Fig. 9.



Ablenkungswinkel, welche nach den bisherigen Erfahrungen eine Minute nicht überschreiten, sei durch den Ausdruck

$$\delta = \delta_0 \left(1 - \frac{z}{b}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29)$$

vorgestellt, worin δ_0 den grössten Ablenkungswinkel bei O, z die rechts

und links von O bis 1, 2, 3 .... gezählten veränderlichen Bogenstücke und b die gegebenen constanten Bögen OB = OB_1 bezeichnet. Man sieht, dass der vorstehende Ausdruck für z = o die Ablenkung $\delta = \delta_0$ und für z = b den Werth δ = o liefert, wie wir es wünschen.

Nivellirt man nun die von dem Anfangspunkte A des Polygons aus bis B fort, so ist der Bogen AB, welcher auf den vereinigten Normalen und Lothen senkrecht steht, der Horizont des Nivellements und daher bis dahin eine Erhebung oder Senkung der Niveaulinie in Bezug auf die ideale Erdgestalt nicht vorhanden. Die Erhebung der Niveaulinie beginnt aber bei B oder dem Punkte 4 links und steigt fortwährend an, bis sie bei dem Punkte B_1 oder 4 rechts ihre höchste Erhebung $B_1 B_2$ erreicht hat. Von dort ab bis A_2 steht der Bogen $B_2 A_2$ wieder senkrecht auf den vereinigten Lothen und Normalen des Bogens $B_1 A_1$. Wenn die hier vorausgesetzten Schwerestörungen stattfinden, so unterliegt es keinem Zweifel, dass sich zwischen den Punkten B und B_1 des Polygons die Niveaulinie um die Grösse $B_1 B_2$ über den Schnitt des Erdellipsoids (hier der Kugel) erhebt, und dass diese Erhebung sich bis zum Endpunkte A_1 des Polygons, welcher mit dem Anfangspunkte A identisch ist, fortpflanzt, also die Cote des Punktes A_1 um den Abstand $B_1 B_2$ grösser macht.

Wäre das Nivellement vom Punkte A_1 ausgegangen und in einer der vorigen entgegengesetzten Richtung ausgeführt worden, so würde sich von B_1 an die Niveaulinie unter den Schnitt des Erdellipsoids gesenkt und bei Punkt B oder 4 links ihre grösste Senkung = $BB_0 = B_1 B_2$ erreicht haben, welche sich in gleicher Grösse bis A forterhalten hätte, so dass die Cote des Endpunktes A um $AA_0 = B_1 B_2 = A_1 A_2$ kleiner geworden wäre als die des Anfangspunkts A_1, was mit dem ersten Nivellement übereinstimmen würde. Will man die Grösse der Erhebung $BB_0 = O_1O_2 = B_1B_2 = 2OO_1 = 2x$ berechnen, so überlege man, dass der Winkel δ, welchen der Ausdruck (12) liefert, zugleich der Winkel ist, den die Niveaulinie mit dem Schnitt BOB_1 des Erdellipsoids bildet, dass daher dieser letztere Ausdruck für je einen Bogenzweig OB_1 und OB in der Form

$$\frac{dx}{dz} = \delta_0 \sin 1'' \left(1 - \frac{z}{b}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30)$$

geschrieben und dadurch zur Differentialgleichung der Trajectorie $O_1B_2 = O_1B$ umgestaltet werden kann, woraus sich sofort durch Integration

$$2x = \delta_0 \sin 1'' \left(2 - \frac{z}{b}\right) z \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31)$$

ergibt. (Für z = b erhält man, wie früher (Gl 12) $2x = b\,\delta_0 \sin 1''$, da in diesem Falle in jener Gleichung $\varepsilon = \gamma - \beta = \delta$ ist und hier δ_0 für δ steht). Betrüge die Lothabweichung in O beispielsweise $20'',6$ und wäre sie in Entfernungen von je 1 Kilometer rechts und links von O null, so hätte man, um die Gesammterhebung der Niveaulinie zu finden, $z = b = 1000^m$ zu setzen, wodurch sich $2x = 0^m,1$ ergäbe. Diese Differenz würde sich im ganzen Polygon erhalten, wenn eine weitere Lothablenkung als die angenommene nicht vorhanden wäre: der Schlussfehler würde folglich auch $2x = 0^m,1$ sein, und wer hieran zweifeln wollte, könnte seine Bedenken nur mehr gegen die hier angenommene Vertheilung der Lothablenkungen richten. In der That scheint diese Vertheilung, gegen die der abstracte mathematische Verstand zwar keinerlei Einwendung erhebt, bei der Erde nicht vorzukommen, weil sich eine Folgerung aus ihr ziehen lässt, die mit den bisherigen Ermittelungen über die Erdgestalt nicht übereinstimmt, nämlich die Folge, dass die Niveauflächen der Erde stellenweise discontinuirlich sein können. Wenn sich auch noch andere Vertheilungen der Schwerkraftsrichtungen, aus denen ein unvollkommener vertikaler Schluss eines nivellirten Polygons folgt, angeben lassen, so ziehen sie doch stets die eben erörterte mit der Wirklichkeit kaum vereinbare Folgerung nach sich, und es bleibt daher nichts anderes übrig als die Continuität aller Niveauflächen der Erde anzunehmen und den von den Lothabweichungen herrührenden Schlussfehler auf jene kleine Grösse zu beschränken, welche darin liegt, dass die Nivellirstationen beträchtliche Ausdehnungen haben, während die Theorie für das genaue Insichzurückkehren der Niveaulinie ausserordentlich kleine Stationen fordert. Da indessen diese Differenz keine grössere Bedeutung hat als die, welche sich von der Nichtberücksichtigung der veränderlichen Intensität der Schwere herschreibt (§ 1), so muss weiter zugegeben werden, dass es für praktische Zwecke und auch für Präcisionsnivellements gestattet ist, vollständig nivellirte Polygone unter

der Voraussetzung gleicher Coten des Anfangs- und Endpunktes auszugleichen. Mit dieser Anerkennung der Zulässigkeit des bisherigen Ausgleichungsverfahrens ist jedoch keineswegs zugestanden, dass ein einfaches Nivellement, welches gut schliesst, schon dieses Schlusses wegen als in allen seinen Theilen richtig anzusehen sei; ich muss vielmehr auch heute noch meine ursprüngliche Behauptung aufrecht erhalten, dass der polygonale Abschluss eines Nivellements für sich allein noch keine ausreichende Garantie für dessen Genauigkeit gewähre, und dass letztere nur dann als gegeben zu erachten sei, wenn alle einnivellirten Fixpunkte durch ein zweites Nivellement controlirt sind.[1])

Die Frage über die wirkliche Gestalt der Niveaufläche der Erde wird sich a priori kaum jemals lösen lassen, da es unmöglich ist, den gegenwärtigen geognostischen Zustand unseres Planeten, der sich von den bei Aufstellung der Differentialgleichungen der Niveauflächen gemachten Hypothesen ganz und gar unterscheidet, analytisch aufzufassen. Es bleibt daher nur der empirische Weg der Lösung übrig, und dieser besteht in der Bestimmung einer sehr grossen Zahl von Lothabweichungen und einer übersichtlichen Zusammenfassung derselben in einer empirischen analytischen Formel oder in einer graphischen Darstellung. Hiezu aber wird, wie ich hoffe, die vorliegende Arbeit, der in Jahresfrist ein praktischer Theil mit Detailangaben über Messung und Rechnung folgen soll, einen Beitrag liefern.

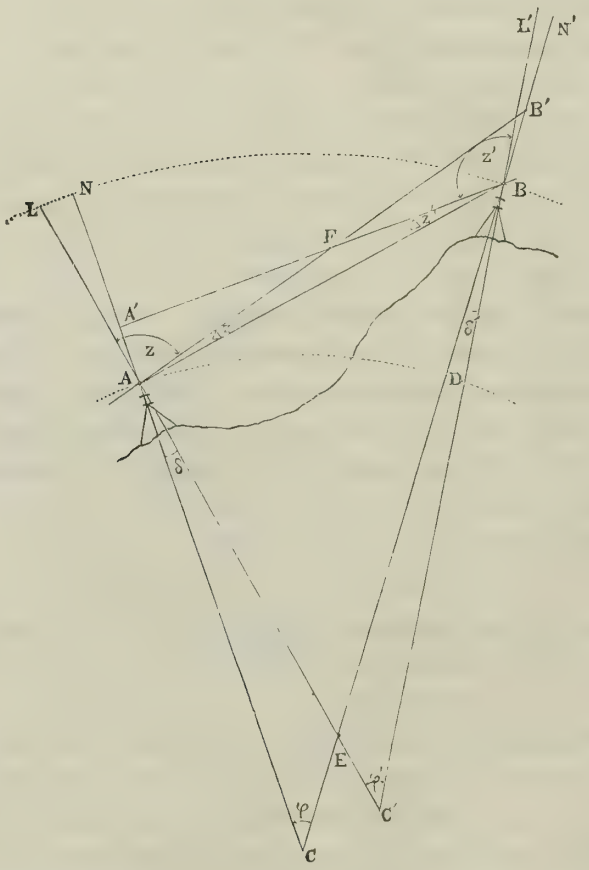
8. Die Erdkrümmung und Lothabweichung durch exactes trigonometrisches Höhenmessen zu bestimmen.

Mit der Darlegung meiner Idee, die Erdkrümmung und Lothabweichung durch exactes Nivelliren zu finden, ist selbstverständlich auch deren Erweiterung auf die gleichnamige Bestimmung durch Messung vertikaler Winkel gegeben, da diese Art der Bestimmung dem Nivelliren gegenüber lediglich der allgemeine Fall und in der That auch der

1) Man vergleiche S. 145 und 147 des „Berichts über die Verhandlungen der vom 30. Septbr bis 7. Octbr 1867 zu Berlin abgehaltenen allgemeinen Conferenz der Europäischen Gradmessung.“ Berlin 1868, bei G. Reiner.

Ausgangspunkt für die vorliegende Arbeit ist. Es liegt nämlich in dem bekannten trigonometrischen Höhenmessen mit gleichzeitigen und gegenseitigen Zenithdistanzen, welches bisher lediglich wegen der Elimination der Strahlenbrechung angewandt wurde, das Ueberschneiden der hori-

Fig. 10.



zontalen Visirlinien der Nivellirinstrumente, deren Winkel ich durch Aufstellung und Ablesung mehrerer Latten messe, versteckt und es kam nur darauf an es zu bemerken und praktisch zu verwerthen. Will man jedoch in besonderen Fällen nicht vom Nivelliren sondern vom Höhenmessen Gebrauch machen, so kann es in folgender Weise geschehen.

Stellen A und B in Fig. 10 die beiden Instrumenten-Standpunkte, deren horizontale Entfernung AD = $r_0\varphi$ und deren Höhenunterschied BD = h gegeben ist, vor und bezeichnen LAB' = z und L'BA' = z' die in A und B mit Bezug auf die Lothe LAC' und L'BC' gemessenen Zenithwinkel; nennt man ferner Δz = BAB' und $\Delta z'$ = ABA' die an z und z' wegen der Strahlenbrechung anzubringenden Verbesserungen, und δ = CAC' und δ' = CBC' die in A und B stattfindenden Lothabweichungen, von denen wir eine als bekannt annehmen: so ist klar, dass man die andere

$$\delta' = \delta + \varphi - \varphi' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (32)$$

auch kennt, sobald der Neigungswinkel φ' der Schwererichtungen AC' und BC' bestimmt ist.

Nach der Figur findet zwischen den eben definirten Grössen die Beziehung statt:

$$z + z' + \Delta z + \Delta z' = 180^0 + \varphi'. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (33)$$

Da nun $\Delta z + \Delta z'$ = r die Strahlenbrechung zwischen A und B und im Allgemeinen, wenn man unter k den mit α, m, y veränderlichen Coefficienten der Strahlenbrechung versteht, $\gamma = k\varphi'$ ist, so wird

$$\psi' = \frac{z + z' - 180^0}{1 - k}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (34)$$

Was den Coefficienten k betrifft, so hat es mit demselben folgende Bewandtniss. Bekanntlich ist die auf Polarcordianten bezogene Differentialgleichung der Strahlenbrechung nach meinen Bezeichnungen (Astron. Nachr. Nr. 1587, Seite 47, Gl 18, Separatabdruck 2. Heft, S. 8)

$$dr = \frac{5\alpha}{m}(1 + my)(1 - y)^4 . d\varphi$$

woraus sich durch Integration zwischen den Grenzen φ = o und $\varphi = \varphi$ die Strahlenbrechung

$$r = \frac{5\alpha}{m}\int_0^{\varphi}(1 + my)(1 - y)^4 . d\varphi'$$

ergibt. Wendet man auf diesen Ausdruck die mechanische Quadratur an, indem man $(1 + my)(1 - y)^4 = Y$ setzt, so wird nach den Formeln

von Cotes (Klügels mathem. Wörterbuch 4 Theil, Seite 136), wenn man mit Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 die Werthe von Y bezeichnet, welche sich nacheinander für $y_1 = 0$, $y_2 = {}^1/_3 y$, $y_3 = {}^2/_3 y$, $y_4 = y$ ergeben, und wenn man ferner die ein oder mehrfachen Werthe von m gegen die Zahlen 1, 2 u. s. w. vernachlässigt, erhalten:

$$\int_0^{\varphi} (1 + my)(1 - y)^4 \, d\varphi' = {}^1/_8 \varphi' (Y_1 + 3 Y_2 + 3 Y_3 + Y_4) \quad . \quad (35)$$

und nach vollzogener Substitution und Reduction:

$$r = \frac{5\alpha}{m} (1 - 2y + 2y^2 - y^3 + \cdots) \varphi' = k\varphi'. \quad . \quad . \quad . \quad (36)$$

Der Coefficient der terrestrischen Strahlenbrechung

$$k = \frac{5\alpha}{m} (1 - 2y + 2y^2 - y^3 + \cdots) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (37)$$

lässt sich auch so schreiben:

$$k = \frac{5\alpha}{m} \cdot \frac{1 - (1 - y)^5}{5y} = \frac{1 - (1 - y)^5}{my} \alpha \quad . \quad . \quad . \quad (38)$$

und da nach meiner Abhandlung in den Astronomischen Nachrichten Nr. 1478, S. 214 und 215 (Separatabdruck 1 Heft, S. 3 und 4)

$$my = \frac{h}{r_0} \cdot \frac{x}{h} = \frac{x}{r_0}$$

$$(1 - y)^5 = \frac{\varrho'}{\varrho} = \frac{\beta' \Theta}{\beta \Theta'}$$

wobei

ϱ, ϱ' die Luftdichtigkeiten,

β, β' die Barometerstände,

Θ, Θ' die absoluten Temperaturen

an den Beobachtungsorten A, B bezeichnen, so wird

$$k = \frac{r_0}{x} \left(1 - \frac{\beta' \Theta}{\beta \Theta'}\right) \alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (39)$$

$$\varphi' = \frac{z + z' - 180^0}{1 - \frac{r^0}{x}\left(1 - \frac{\beta'\Theta}{\beta\Theta'}\right)\alpha} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (40)$$

Wäre φ' vom Beobachtungsorte B aus zu bestimmen, so änderte sich in der vorstehenden Formel nichts als der Ausdruck für k, obgleich sein Werth derselbe bleiben müsste, wie man leicht beweisen kann. Denn da für den Punkt B der Werth x negativ ist, so wird hiefür

$$y' = -\frac{x}{h - x} = -\frac{y}{1 - y}$$

$$m' = \frac{h - x}{r_0 + x} = \frac{m(1 - y)}{1 + my}$$

$$m'y' = \frac{my}{1 + my}$$

wofür man, da der mittlere Werth von m = 0,0074 und bei terrestrischen Messungen jener von y stets kleiner als 0,1 ist, auch $m'y' = my$ schreiben kann.

Für den Punkt B hat man, wenn α' die Refractionsconstant desselben bezeichnet, mit Rücksicht auf den negativen Werth von y':

$$k' = \frac{5\alpha'}{m'}(1 + 2y'^2 + y'^3 + \cdots) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (41)$$

$$k' = \frac{5\alpha'}{m'} \cdot \frac{1 - (1 + y')^5}{-5y'} = \frac{(1 + y')^5 - 1}{m'y'}\alpha' \quad . \quad . \quad . \quad (42)$$

Nun ist, wenn man für y' und $m'y'$ ihre Werthe setzt:

$$(1 + y')^5 = \frac{1}{(1 - y)^5} = \frac{\varrho}{\varrho'} = \frac{\beta\Theta'}{\beta'\Theta}$$

$$\alpha' = \frac{\varrho'}{\varrho}\alpha = \frac{\beta'\Theta}{\Theta'\beta}\alpha$$

$$k' = \frac{r_0}{x}\left(\frac{\beta\Theta'}{\beta'\Theta} - 1\right)\alpha' = \frac{r_0}{x}\left(1 - \frac{\beta'\Theta}{\beta\Theta'}\right)\alpha = k \quad . \quad . \quad . \quad (43)$$

was zu beweisen war. (Was die Werthe von α und α' betrifft, so werden diese bekanntlich aus

$$\alpha = \frac{\beta\Theta_0}{\beta_0\Theta}\alpha_0 \text{ und } \alpha' = \frac{\beta'\Theta_0}{\beta_0\Theta'}\alpha_0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (44)$$

berechnet, wobei nach der Abhandlung in den Astron. Nachr. Nr. 1479, S. 226, Separatabdruck 1 Heft, S. 9: $\alpha_0 = 0{,}00027895$, $\beta_0 = 333''',22 = 751^{mm}71$ und $\Theta_0 = 225^0{,}64$ R $= 282^0{,}05$ C ist.)

Wenden wir die Formeln (39) und (40) auf die vierte der in dem zweiten Theile meiner Theorie der Strahlenbrechung (Astr. Nachr. Nr. 1590, S. 83, Separatabdruck 2, S. 26) enthaltenen Baeyer'schen Refractionsbeobachtungen am Harz an, so ist für den Beobachtungsort A (Kupferkuhle):

$$\begin{aligned} r_0 &= 3278237^t \quad , \quad \log r_0 = 6{,}515{\cdot}6271 \\ \beta &= 331''',34 \quad , \quad \log\beta = 2{,}520{\cdot}2739 \\ \Theta &= 218{,}2 + 14{,}7, \quad \log\Theta = 7{,}632{\cdot}8305 \\ \alpha &= 0{,}0002687 \quad , \quad \log\alpha = 6{,}429{\cdot}2766\ ^{1}) \\ z &= 89^0\ 0'\ 59'',97 \end{aligned}$$

für den Beobachtungsort B (Brocken):

$$\begin{aligned} x &= 498^t{,}155 \quad , \quad \log x = 2{,}697{\cdot}3645 \\ \beta' &= 295''',41 \quad , \quad \log\beta' = 2{,}470{\cdot}4252 \\ \Theta' &= 218{,}2 + 10{,}7, \quad \log\Theta' = 2{,}359{\cdot}6458 \\ z' &= 91^0 20' 40'',15. \end{aligned}$$

Hieraus berechnet sich zunächst ein Strahlenbrechungscoefficient

$$k = 0{,}1642$$

und mit diesem nach Formel (40) eine Amplitude zwischen A und B:

$$\varphi' = 1555'',516$$

während nach Baeyer (Astr. Nachr. Nr. 1590, S. 82) der Winkel der Normalen in A und B, also die Erdkrümmung

---

1) Den Werth von $\log\alpha$ erhält man aus $\log\alpha_0 = 6{,}4455464$, wenn man ihn mit $\log\frac{\varrho}{\varrho_0} = \log\frac{\beta\Theta_0}{\beta_0\Theta} = 9{,}9837893$ multiplicirt.

$$\varphi = 1544'',566$$

beträgt. Es ist also in dem vorliegenden Falle die Lothabweichung zwischen Kupferstuhle und Brocken:

$$\delta - \delta' = \varphi' - \varphi = 10'',95.$$

C. F. Gauss macht in seiner „Bestimmung des Breitenunterschieds zwischen den Sternwarten von Göttingen und Altona“ S. 72 folgende Bemerkung:

> „Während nun die astronomischen Beobachtungen die Polhöhe von Altona 5″,52 kleiner gegeben haben, geben die von Hrn. v. Zach auf dem Brocken angestellten Beobachtungen die Polhöhe dieses Punkts 10 bis 11″ grösser, ein Unterschied, von dem doch jedenfalls nur ein kleiner Theil dem Instrumente und den in der Rechnung gebrauchten Declinationen zur Last fallen kann. Die Vergleichung des Breitenunterschieds zwischen Altona und dem Brocken mit der Krümmung, welche dem sich der Erde im Ganzen am besten anschliessenden Sphäroid entspricht, würde daher eine Abweichung von 16″ geben.

Vergleicht man diese Bemerkung mit dem Ergebniss meiner auf fremde Beobachtungen gestützten Rechnung, welche ebenfalls in der Umgebung des Brockens eine Lothabweichung von 11″ anzeigt, so dürfte diese Uebereinstimmung zweier Aussagen, die sich auf ganz verschiedenen Wegen ergeben haben, nicht ohne Bedeutung sein und jedenfalls zu einer näheren Prüfung und Würdigung meiner Theorie der atmosphärischen Strahlenbrechung auffordern. Denn von ihr hängt die Genauigkeit des hier beschriebenen Verfahrens zur Bestimmung der Erdkrümmung und Lothabweichung wesentlich ab, wie ich schon vor sechs Jahren in meinem Eingangs erwähnten Vortrage (S. 34) in dem Satze andeutete, dass eine strenge Theorie der Strahlenbrechung ein Mittel werden würde, örtliche Störungen in der Richtung des Loths aufzufinden.

Das

Bayerische Präcisions-Nivellement.

Zweite Mittheilung

von

Carl Max Bauernfeind.

Ergebnisse

des in

Verbindung mit der Europäischen Gradmessung in Bayern

ausgeführten

Präcisions-Nivellements.

Zweite Mittheilung

von

Carl Max Bauernfeind.

Vor zwei Jahren habe ich in den Denkschriften der k. Akademie der Wissenschaften eine erste Mittheilung über das unter meiner Leitung in den Jahren 1868 und 1869 ausgeführte „Bayerische Präcisionsnivellement" gemacht [1]) und von der mathematisch-physicalischen Classe die Erlaubniss zu weiteren Mittheilungen über diesen Gegenstand in ihren Abhandlungen erhalten.

Von dieser Erlaubniss mache ich nunmehr Gebrauch, indem ich über die Ergebnisse der Beobachtungs- und Rechnungsarbeiten, welche die Geodätische Section der bei unserer Akademie bestehenden Commission für die Europäische Gradmessung in der Zeit vom Herbste 1870 bis zum Sommer 1872 zu Tage gefördert hat, hiemit öffentlich berichte.

---

1) Vergl. die Abhandlungen der II. Classe, Band X, Abtheilung 3, Seite 89 bis 196.

Dieser Bericht kann um so kürzer sein, als seit 1868 weder in dem Messungs- und Rechnungspersonale noch in den Apparaten und Methoden ein Wechsel stattfand: die Ausführung des Nivellements in den neuen Strecken besorgten demnach wie früher die Herren Assistenten August Vogler und Ferdinand Löwe mit den alten bereits eingeübten Messgehilfen und den in der ersten Mittheilung beschriebenen Ertel'schen Nivellirinstrumenten, nach den eben daselbst dargelegten Nivellirmethoden und Rechnungsvorschriften, unter Benützung derjenigen Erfahrungen, welche in den vorhergehenden Jahren gemacht worden waren.

Uebersicht der Nivellements-Arbeiten.

Der Beginn der Arbeiten im Jahre 1870 musste wegen des Kriegs mit Frankreich bis zum 23. September verschoben werden; von da ab bis zum 5. November wurde mit zwei und noch weitere acht Tage mit nur einem Instrumente gearbeitet. In 53 Reisetagen, wovon jedoch 22 zu Beobachtungen nicht verwendet werden konnten, wurden die Strecken Ulm — Augsburg — München und Holzkirchen — Rosenheim in einer Länge von 183 Kilometer oder 24,6 geographischen Meilen nivellirt. Dazu kamen im Jahre 1871, in welchem vom 30. März bis 3. Mai, dann vom 23. Mai bis 8. Juni und vom 2. bis 18. November mit einem, vom 28. August bis 2. November aber mit zwei Instrumenten gearbeitet wurde, die Strecken München — Holzkirchen, Rosenheim — Kufstein, Rosenheim — Salzburg, Ulm — Kempten und Kahl — Aschaffenburg — Würzburg — Bamberg, in einer Gesammtlänge von 448 Kilometer oder 60,4 geographischen Meilen. Von den hierauf verwendeten 125 Reisetagen waren 45 zu auswärtigen Arbeiten unbrauchbar.

Es wurden somit in den Jahren 1870 und 1871, welche den Gegenstand dieser Mittheilung bilden, 631 Kilometer oder 85 geographische Meilen nivellirt, und es beträgt folglich, wenn man diese Länge zu der in den Jahren 1868 und 1869 hergestellten fügt, die Ausdehnung des Bayerischen Präcisionsnivellements bis heute (Mitte Juli 1872) im Ganzen 1444 Kilometer oder 194,6 geographische Meilen.

Da es für die Veranschlagung der Kosten von Präcissionsnivellements von Wichtigkeit ist, die Leistungsfähigkeit geübter Ingenieure und guter Apparate in der zu Beobachtungen geeigneten Zeit zu kennen, so sei

weiter über die Ausführung der Bayerischen geodätischen Nivellirungsarbeiten in den Jahren 1870 und 1871 bemerkt, dass von den 111 Beobachtungentagen 66 zur gemeinsamen Arbeit der beiden Assistentn verwendet wurden und an den übrigen 45 nur das Instrument des Herrn Vogler thätig war. Als mittlere Tagesleistungen ergaben sich Strecken von 6,7 und beziehungsweise 4,2 Kilometer. An diesen Leistungen fällt zweierlei auf: erstens, dass die durchschnittliche Arbeit mit zwei Instrumenten in der Campagne von 1870 und 71 um 6,70 — 5,25 = 1,45 Kilometer mehr betrug als in 1868 und 69, und zweitens, dass mit Einem Instrumente beträchtlich mehr als die Hälfte dessen, wass zwei Instrumente vermögen (4,2 auf 6,7 Kilometer), geleistet wurde.

Sieht man von der grösseren Fertigkeit im Beobachten, welche die beiden Ingenieure in der zweiten Periode offenbar erlangt hatten, ferner von dem kleinen Unterschiede dieser Fertigkeiten zwischen beiden Beobachtern, sowie von der vermehrten Geschicklichkeit der Messgehilfen ab, so wird die erstere Mehrleistung zum Theil der Vervollständigung des Nivellirapparates und der bequemeren Berechnungsweise am Instrumente, vielleicht auch der durchschnittlichen Verkleinerung der Zielweiten, wodurch die Wiederholungen der Beobachtungen in dem Verhältnisse von 29 auf 31 vermindert wurden, zuzuschreiben sein, während die Mehrleistung von 25 Procent des einzelnen Instruments gegenüber der gemeinsamen Arbeit zum Theil davon herrührt, dass jenes von Stand zu Stand einen kürzeren Weg zurückzulegen hatte, und dadurch bei günstigem Wetter und Zielweiten von 60 bis 70^{m} auf 10 bis 11 Minuten, welche von Doppelstand zu Doppelstand verflossen, 90 bis 100 Sekunden um welche es früher zur Aufstellung gelangte, ersparte [1]).

Die Bruttoleistung der Ingenieure und ihrer Gehilfen betrug in den Jahren 1870 und 71 auf jeden der 178 Reisetage 3,55 Kilometer, während sie sich im Jahre 1869 auf etwas weniger, nämlich 3,30 Kilometer belief. In der ersten Campagne trafen 22, in der zweiten nur 19 Arbeits-

1) Man darf hieraus nicht sofort den Schluss ziehen, dass es vortheilhafter sei mit einfachen statt mit doppelten Ständen zu arbeiten; denn jene fordern einen Lattenträger mehr, während diese eine geringere Zahl von Zwischenfixpunkten, rascheres Durcheilen belebter Bahnstrecken, grössere Sicherheit im Erreichen vorbereiteter Anschlusspunkte, vor Allem aber vermehrte Controle der Arbeit gestatten.

tage auf den Monat, wobei jedoch zu berücksichtigen ist, dass im Jahre 1871 wegen anderweitiger dienstlicher Beschäftigungen der Ingenieure die Reisezeit verhältnissmässig grösser war als im Jahre 1869.

Auf den in den Jahren 1870 und 1871 nivellirten Strecken von 631 Kilometer Länge sind 383 Fixpunkte, darunter 75 metallene Höhenmarken [O] enthalten. Diese Punkte sind durch 5110 Instrumentenstände miteinander verbunden worden, wovon 1376 auf das erste der beiden Jahre treffen. Im Jahre 1869 betrug die mittlere Zielweite $d = 69^m$, im Jahre 1870 sank sie auf $66{,}5^m$ und 1871 auf 60^m herab: der Grund dafür ist bereits angegeben, nämlich die Möglichkeit die Zahl der Wiederholungen von Beobachtungen zu vermindern, beziehungsweise den Grenzwerth des Zielfehlers in der That auf die theoretische Forderung von $\sqrt{d}$ Decimillimeter herabzudrücken, was den Ingenieuren im Jahre 1869 bei etwas grösserer durchschnittlicher Zielweite nicht in erwünschtem Masse gelungen war.

Der Nivellirapparat.

Ich habe bereits angeführt, dass der Nivellirapparat eine Vervollständigung erhalten hat. Zunächst wurde nämlich unter dem linken Trägerarm des Fernrohrs eine feine Dosenlibelle angebracht, um damit den Alhidadenzapfen leichter und schneller vertical stellen zu können; ferner erhielt das Ocular des Fernrohrs zum Schutze gegen allzu grelle Lattenbeleuchtung ein dünnes blaues Blendglas, und die Scala der Röhrenlibelle wurde mit einem halbcylindrischen Glasdeckel versehen, um einseitige Erwärmungen derselben zu verhindern.

Die Ziellatten blieben ganz und gar unverändert, nachdem es aus technischen und anderen Gründen nicht möglich war, den auf Seite 17 der ersten Mittheilung enthaltenen Vorschlag Latten mit doppelter Scala auf dünnem Stahlblech herzustellen, zur Ausführung zu bringen. Dagegen wurde in Folge Beschlusses der dritten Allgemeinen Conferenz der Europäischen Gradmessung auf der Eidgenössischen Aichstätte in Bern eine unserer Ziellatten auf ihre Meterlänge und Theilung untersucht, und dadurch eine Vergleichung derselben mit allen in Europa zu Präcisionsnivellements verwendeten Ziellatten möglich gemacht. Ueber das Er-

gebniss dieser Vergleichung werde ich in dem von der Latten-Untersuchung handelnden Abschnitte (Seite 50) berichten.

Jede obere Fussplatte erhielt im Jahre 1870 einen neuen Stahlknopf zum Aufsetzen der Latte. Der höchste Punkt dieses Knopfes liegt durchschnittlich $3{,}6^{cm}$ über dem höchsten Punkt der unteren, die Einzelabstände (bis auf $^1/_{10}$ Millimeter genau) sind folgende:

für das Plattenpaar 1,2 ist m = $0{,}^m0358$
„ „ „ 3,4 „ = 0, 0364
„ „ „ 5,6 „ = 0, 0371
„ „ „ 7,8 „ = 0, 0360.

Die Constanten der Instrumente.

Der Abstand der äusseren Fäden

ist seit 1869 unberührt geblieben und wurde am 7. März 1871 und am 6. Januar 1872 neu bestimmt. Am erstgenannten Tage ergab sich für das Instrument

Nro. I: $\cot\varphi$ = 137, 932 $\pm$ 0, 024
φ = 1495″, 41 $\pm$ 0″, 27
Nro. II: $\cot\varphi$ = 136, 394 $\pm$ 0, 014
φ = 1512″, 27 $\pm$ 0, 16

und am 6. Januar d. J. wurde für das Instrument

Nro. I: $\cot\varphi$ = 137, 757 $\pm$ 0, 033
φ = 1497″, 31 $\pm$ 0″, 35
Nro. II: $\cot\varphi$ = 136, 329 $\pm$ 0, 026
φ = 1512″, 99 $\pm$ 0″, 28

gefunden. Die Aenderungen seit 1869 waren somit nur unbedeutend (vergl. Erste Mittheilung S. 25) und es wurden desshalb nahezu dieselben Ausdrücke wie früher zur Bestimmung der Entfernungen E und der davon abhangigen Höhencorrectionen c benützt, nämlich

für die Messungen im Jahre 1870 und das Instrument

Nro. I: E = 137,67a + 0^m,78
Nro. II: E = 136,36a + 0^m,78

für die Messungen im Jahre 1871 und das Instrument

Nro. I: E = 137,84a + 0^m,78
Nro. II: E = 136,36a + 0^m,78.

Die Ungleichheit der Ringdurchmesser

wurde bei der Untersuchung im März 1871 etwas grösser gefunden als im Jahre 1868: es ist nämlich an beiden Fernrohren der Ocularring der stärkere und es beträgt die Neigung der Fernrohraxe gegen die gemeinschaftliche Kegelseite der Ringe bei Instrument Nro. I: 0″,5 und bei Instrument Nro. II: 1″,0. Dieser Unterschied wird indessen durch das Messungsverfahren, wie bekannt, ausgeglichen.

Die Neigung der Ocularröhre

gegen die Fernrohraxe (vergl. Erste Mittheilung Seite 18, Nro. 5) ergab sich ebenfalls etwas grösser als bei früheren Versuchen und scheint erst bei Zielweiten von mehr als 25^m zu verschwinden. Für das Instrument Nro. II betrug die Neigung bei 20^m Entfernung etwa 1″, bei 12^m etwa 13″ und bei 8^m etwa 17″ in dem Sinne, dass die Visirlinie um diese Beträge erhöht wird. An dem Instrument Nro. I wurde die Visirlinie bei 20^m Entfernung um 1,5″ gegen das Ziel erhöht und bei 12^m Lattenabstand um 10″ gesenkt. Wie viel davon einer fehlerhaften Centrirung des Objektivs zuzuschreiben ist, war durch das angewendete Untersuchungsverfahren, das in Bestimmung der Fernrohrcollimation mittelst Libelle bei unendlicher und kleiner Zielweite bestand, nicht zu ermitteln.

Correctionstafeln.

Eine Tafel der Entfernungen wurde schon im Jahre 1870 nicht mehr berechnet, dagegen eine neue Tafel für die Höhencorrection wegen geneigter Libelle nach dem in der Ersten Mittheilung (S. 31 und 32, Figur 9) enthaltenen Vorschlage entworfen, gezeichnet und photographisch auf ein Fünftel verkleinert und vervielfältigt. In die Gleichung

$$206265c = 1000\ p \cot\varphi\ (a + k\ tg\varphi)\ l$$

wurden folgende mittlere Constanten eingeführt:

$$\cot\varphi = 137{,}5;\ p = 4''{,}35;\ k = 78^{cm}.$$

Drückt man a wie k in Centimeter und l in Vierzigstel-Libellentheilen aus, so findet man die Höhencorrection c in Decimillimeter aus der Gleichung:

$$c = 0{,}00725\ (a + 0{,}565)\ l.$$

Das Product $p \cot \varphi$ für beide Instrumente und bei mittlerer Temperatur durch Verstellen der Ocularfäden gleich gross zu machen, wurde wegen der Veränderlichkeit des Fadenabstandes und der Werthe der Libellentheile unterlassen.

Die photographische Tafel gibt auch die mittlere Temperaturcurve der beiden bisher benützten Libellen für eine Blasenlänge zwischen 10 und 44^p ($p = 1'''$ P), wobei die Temperatur zwischen — 7° und + 35° C schwankt. Zwei feine Striche geben ferner die mittleren jedoch unsicheren Werthe eines Libellentheils für verschiedene Blasenlängen und Temperaturen an, wie sie sich aus den auf S. 27 der Ersten Mittheilung erwähnten zahlreichen Versuchen (250) construiren liessen.

Um die Vortheile der Correctionstafeln gehörig zu verwerthen, erhielt das Schema für den Eintrag der Aufnahme pro Stand eine Zeile mehr, worin die auf eine horizontale Visur reducirten mittleren Lattenhöhen aller vier Blicke Platz fanden. Dadurch konnte auch die Fehlerbestimmung während der Arbeit rascher und strenger vollzogen werden. Für jeden Stand hatten nunmehr die Schreiber innerhalb 5 Minuten 190 Ziffern niederzuschreiben, darunter 108 diktirte, die übrigen wurden von ihnen theils im Kopf, theils auf Grund der Tafeln fertig berechnet. An Tagen mit 9 bis 10stündiger Arbeit wurden etwa 48 Doppelstände mit ungefähr 6 Wiederholungen ausgeführt und dabei an jedem Instrumente 10000 Ziffern niedergeschrieben. Diese Zahlen machen die Zeitersparniss anschaulich, welche durch die Trennung von Ablesung und Eintrag erreicht ward, während übrigens der grössere Vortheil dieser Trennung in der doppelten Rechnungscontrole liegt. Die unmittelbare Ausführung der letzteren am Instrument machte unbemerkte Ablesungsfehler fast unmöglich. Die spätere Berechnung der Aufnahmen erfolgte nach den in der Ersten Mittheilung (Seite 39 u. ff.) aufgestellten Regeln, welche bekanntlich die Befürchtung von Rechnungsfehlern mit einem hohen Grade von Wahrscheinlichkeit ausschliessen.

Untersuchung der Ziellatten.

Auf Grund des schon oben erwähnten Conferenzbeschlusses wurde die Ziellatte Nro. I an die Eidgenössische Aichstätte in Bern geschickt, um mit dem dortigen Normalmassstabe in vertikaler Stellung verglichen

zu werden. Die Vergleichung (jedoch nur bei horizontaler Lage der Latte) geschah am 19. Februar 1872 und hat folgende Resultate ergeben:

Latte Nro. I zwischen		Berner Eisenstab bei $14^0,2$		v^2
m	m	mm	mm	□mm
0,01 —	2,91	2901,087 —	1,323	0,0225
0,02 —	2,92	—	1,104	0,0049
0,03 —	2,93	—	1,064	0,0121
0,04 —	2,94	—	1,239	0,0049
0,05 —	2,95	—	1,362	0,0361
0,06 —	2,96	—	1,195	0,0004
0,07 —	2,97	—	1,017	0,0256
0,08 —	2,98	—	1,182	0,0001
0,09 —	2,99	—	0,997	0,0289
0,10 —	3,00	—	1,240	0,0049
		mm	mm	
Mittel		2901,087 —	1,172	$\Sigma v^2 = 0,1404$

Demnach ist die Länge von

290^{cm} der Latte Nro. I = $2899^{mm},915 \pm 0^{mm},039$

1^{m} derselben Latte = $0^{m},999971 \pm 0^{mm},014$

und der mittlere Theilfehler eines Strichs = $\pm 0^{mm},087$.

Zu dieser Tabelle bemerkt Herr Dr. A. Hirsch, Director der Sternwarte in Neuenburg, unter dessen Leitung die Vergleichung der Ziellatten sämmtlicher Länder in Europa, welche Präcisionsnivellements ausführen lassen, gestellt wurde, in einem Briefe an mich vom 29. April 1872 Folgendes:

„Die beifolgende Copie der in Bern gemachten Beobachtungen zeigt Ihnen, dass Ihre Latte nur um $0^{mm},03$ pro Meter zu klein ist; diese Grösse liegt übrigens, wenn sie auch den Fehler um das Doppelte übertrifft, nach meiner Erfahrung reichlich innerhalb der Variabilität solcher Latten. — Die angewandte Methode ist Ihnen aus unserm „Nivellement de précision“ bekannt. Ich erwähne nur noch, dass ich die Nulllinie als zu unsicher fortgelassen habe, dass die Einstellungen auf die Mittellinie der Centimetertheilung gemacht sind,

und dass, da jeder Theilstrich doppelt eingestellt worden ist, sich daraus der eigentliche Beobachtungsfehler ableiten liess; derselbe betrug für das Intervall zweier Striche $\pm$ 0,^{mm}024. Aus der Summe der Fehler-Quadrate aber folgt für den mittleren Fehler eines Intervalls von 2,90^{m}: $\pm$ 0,^{mm}125, also um den Beobachtungsfehler vermindert $\pm$ 0,^{mm}123, und daraus ergiebt sich für den mittleren Theilfehler eines Strichs $\pm$ 0,^{mm}087, was jedenfalls für eine solche Lattentheilung äusserst wenig ist."

Auf Grund dieser Mittheilung, von der wir hauptsächlich das Ergebniss über die Lattenlänge acceptiren, und da nach den hiesigen Vergleichungen mit den messingenen Meterstäben von Breithaupt in Cassel unsere drei Latten fast genau gleich sind (Erste Mittheilung S. 38), haben wir demnach keine Veranlassung die Coten der einnivellirten Fixpunkte wegen der Lattentheilung anders, als es bisher geschah, zu reduciren: auf die spätere Reduction kann nur mehr die Ausgleichung des Höhennetzes und die Feststellung eines Generalhorizonts für alle Nivellements einen Einfluss äussern.

Anschlüsse des Bayerischen Höhennetzes.

Die im Jahre 1869 nivellirte Fichtelgebirgschleife von 257 Kilometer Länge schloss bekanntlich mit 0,^{m}1080 $\pm$ 0,^{m}01135 ab (Erste Mittheilung S. 44), dagegen glückte es im Jahre 1871 die Allgäuschleife (Kempten — Augsburg — Ulm — Kempten) von 266 Kilometer Länge bis auf 0,^{m}0098 $\pm$ 0,^{m}00905 zu schliessen.

Nicht so befriedigend ist ein Theil der Anschlüsse des Bayerischen Höhennetzes an die der Nachbarländer, wie aus der nachstehenden Tabelle hervorgeht, zu der uns die Herren Professoren Börsch, Nagel und Schoder die ihre Heimathländer betreffenden Daten geliefert haben. Die folgenden Coten sind Swinemünder mittlere Seehöhen, deren Berechnung sich auf die von Professor Börsch mitgetheilte Seehöhe der Fixpunkte zu Kahl, einer hessischen Eisenbahnstation nahe an der Bayerischen Landesgrenze, stützt, und wobei die Schlussfehler unserer Polygone den Quadraten der wahrscheinlichen Fehler proportional vertheilt wurden.[1]) Die in der

1) Die erste Mittheilung enthält auf Seite 43 einen Druckfehler, den wir zu berichtigen bitten: es muss nämlich Zeile 6 von unten statt „den wahrscheinlichen Fehlern w proportional" heissen: „den Quadraten der wahrscheinlichen Fehler w^2 proportional."

Tabelle mit v^2 bezeichneten Quadrate der wahrscheinlichen Fehler der Bayerischen Strecken wurden von unserm Assistenten Herrn Vogler aus denen des Fixpunktverzeichnisses berechnet, welches auch die Längen dieser Strecken ergab, während Herr Professor Schoder die gleichnamigen Werthe für Württemberg geliefert hat.

Wir wollen hiebei nicht unterlassen zu bemerken, dass die von den Herren Commissären der Nachbarländer mitgetheilten Coten einer definitiven Ausgleichung noch nicht unterworfen wurden, sondern als vorläufige Ergebnisse der Cotenberechnung zu betrachten sind, und dass wir uns veranlasst finden, behufs Ergänzung und Prüfung des Bayerischen Höhennetzes noch mehrere Polygonseiten nivelliren zu lassen.

Nummer des Bayerischen Fixpunkt-Verzeichnisses	Entfernung in Kilometer vom Ausgangspunkt auf dem kürzesten Weg		v^2	Bayerische	Auswärtige	Coten-Differenz in Meter
	in Bayern	im Nachbarland	$\square^{mm}$	Cote in Meter		
881/82	Sockelecken zu Kahl, Mittel aus beiden					
	0	0	0	110,9832	110,9832	0
65	Höhenmarke zu Hof					
	335		147,01	505,2998	505,2900	0,0098
104	Höhenmarke zu Franzensbad					
	375		142,66	450,0835	449,9515	0,1320
942	□ auf Blechbalkenbrücke Nro. 28/29 bei Würzburg					
	0	0	0	185,5803	185,5803	0
943	Höhenmarke an der gewölbten Wegbrücke in der Kitzingerstrasse					
	0,6	0,6	0,06	194,1008	194,0918	0,0090
426	Württembergische Glasmarke Nro. 134 zu Nördlingen					
	255	156	100,24	430,0255	429,7723	0,2532
653	Höhenmarke im Bahnhof Neu-Ulm					
	408	254	142,22	471,2296	470,8028	0,4268
608	Glasmarke Nro. 233 in Nonnenhorn					
	522	377	174,17	420,2661	419 9083	0,3578

Verzeichniss der Fixpunkte.

Fortsetzung.

Erklärung der Ueberschriften und Zeichen.

Nr Laufende Nummer der Höhenmarke oder des Fixpunktes;
A Nummer einer Abtheilung zwischen zwei benachbarten Fixpunkten, nach der Reihenfolge der Aufnahme;
J Anzahl der Stände des Instruments in einer Abtheilung;
Z die in derselben angewendete mittlere Zielweite in Meter;
D die Distanz zweier sich folgender Fixpunkte in Meter;
H deren Höhenunterschied in Meter;
w Wahrscheinlicher Fehler von H in Millimeter*);
w' derselbe Fehler, reducirt auf D = 1 Kilometer, in Millimeter*);
⊙ Messingene Höhenmarken (Bolzen mit centraler Bohrung) in verticalen Wänden;
□ wagrechte, in Stein gehauene und mit einer Rinne umgebene Vierecke, welche zur Bezeichnung von Fixpunkten dienen;
⌂ desgleichen, mit den eingemeisselten Buchstaben HM (Höhenmarke), oder auch viereckige Cementplatten, in rauhe oder bröckelnde Steine eingesetzt;
= wagrecht geebnete Steinflächen zur Bezeichnung untergeordneter Fixpunkte;
Pl Planiehöhe (Schwellenoberfläche) der Eisenbahnen;
St Wegstunde, bezieht sich auf die in Bayern gebräuchliche Bezeichnung der Bahnstrecken.

Die Kunstbauten der Bahnen sind theils auf grössere Strecken durchlaufend, theils nur innerhalb der Bahnstunden numerirt und diese Nummern auf einigen Linien neben dem Bau auf einem kurzen Pfahl angebracht. Das vorliegende Verzeichniss drückt die durchlaufenden Nummern durch arabische, die Stundennummern durch römische Ziffern aus.

Die Coten in Meter gehen von einem Generalhorizont aus, welcher 1600' Bayr. = 466,976^{m} über dem Nullpunkt des Lindauer Bodenseepegels und (nach vorläufigen Ermittlungen) 862^{m} über dem Meeresspiegel liegt.

Die eingeklammerten Abtheilungen $\{ \ldots \}$ bilden Zweignivellements zu Höhenmarken und Fixpunkten, auf deren Coten das durchlaufende Nivellement sich nicht stützt.

---

*) In der ersten Abtheilung des Fixpunktverzeichnisses sind diese Fehler, welche indessen nur als ein Mass für die Sorgfalt und nicht des Erfolges der Arbeit betrachtet werden können, in Zehntelmillimeter ausgedrückt. Wenn man hier um eine Stelle weiter gegangen ist, so hat dieses lediglich einen äusseren Grund und für die Genauigkeit keine Bedeutung.

Augsburg — Ulm.

Nr	A	J	Z	D	± H	w	w^2	w'	Cote

Augsburg — Westheim.

462. Offener Bahndurchlass Nr. 1 der Ulmer Bahn, östliches Widerlager, nördlicher Stirnflügel, Deckplatte, □ Pl. bei St 0,6 + 8m, Cote dem Nivellement von 1869 entnommen und 1870 bestätigt

385,9203

612. □ auf dem Bahngrenzstein ohne Nummer südl. dem Damm bei St 0,8 + 353m

1 10 56 1107 — 3,8014 0,61 0,37 0,58 382,1189

613. Bahngrenzstein ohne Nummer südl. dem Damm an der Ueberfahrt, ⌓ bei St 1,4 + 140m

2 16 63 2016 — 3,6425 0,67 0,44 0,47 378,4764

614. = im Backsteinmauerwerk des Fundamentes unter der Höhenmarke zu Westheim bei St 1,7 + 85m

3 10 54 1083 + 0,3731 0,55 0,30 0,53 378,8495

615. ⊙ am Betriebsgebäude zu Westheim, nördl. Schmalseite, westl. Ecklisene

— 1,7727 377,0768

Westheim — Diedorf — Gessertshausen.

616. Gewölbter Bahndurchlass Nr. VII bei St 2,6 + 154m, Gesimsstein der südöstlichen Stirn, ⌓ über der Wölbung, Pl

1 27 64 3461 +13,3359 1,51 2,27 0,81 392,1854

617. Gewölbte Bahnbrücke Nr. II für den Anhauser Bach westlich Diedorf. Südl. Stirn, westl. Gesimsstein, □ Pl bei St 3,0 + 275m

2 16 50 1607 — 2,7266 0,78 0,61 0,62 389,4588

618. Gewölbter Bahndurchlass Nr. V mit einer Oeffnung, südöst. Stirn, = auf einem Gesimsstein bei St 3,3 + 240m

1 11 65 1435 — 2,7930 0,78 0,61 0,65 386,6658

619. □ auf der Kranzmauer der Wage zu Station Gessertshausen, südl. Langseite, westl. Ende derselben

2 17 65 2218 — 2,3612 0,76 0,56 0,50 384,3046

620. ⊙ am Betriebsgebäude zu Gessertshausen, südl. Ecke der Ostseite

3 1 19 37 — 1,8046 0,10 0,01 0,52 382,5000

Augsburg — Ulm.

Nr	A	J	Z	D	± H	w	w^2	w'	Cote
					Gessertshausen — Moedishofen — Dinkelscherben.				
621.	Gewölbte Bahnbrücke Nr. VI mit 2 Oeffnungen über die Schmutter, südl. Stirn, □ Pl innen an der Brüstung bei St 4,2 + 270^m								
	1	8	51	823	— 2,0068	0,50	0,25	0,55	382,2978
622.	Bahngrenzstein Nr. 28 südlich der Bahn, = bei St 5,3 + 85^m								
	2	27	72	3906	+ 3,5605	1,07	1,14	0,54	385,8583
623.	Gewölbter Bahndurchlass Nr. II, südl. Stirn, östlicher Gesimshaustein, = bei St 6,3 + 33^m unter Pl, westl. Station Mödishofen								
	3	31	59	3668	+11,9019	0,95	0,91	0,50	397,7602
624.	Gewölbter Bahndurchlass Nr. III, südl. Stirn, westl. Gesimsstein, □ wenig unter Pl bei St 6,4 + 98^m								
	1	5	44	437	+ 0,1508	0,25	0,06	0,37	397,9110
625.	Gewölbte Bahnbrücke Nr. V mit 2 Oeffnungen über die Zusam, südl. Stirn, westl. Gesimsstein, □ innen an der Brüstung, Pl bei St 6,6 + 285^m								
	2	8	58	930	+ 1,0746	0,47	0,22	0,49	398,9856
626.	⊙ am Betriebsgebäude zu Dinkelscherben, Perron, Südseite, Westecke des Mittelbaues								
	3	14	57	1595	— 1,2483	0,47	0,22	0,37	397,7373
					Dinkelscherben — Gabelbachergereuth — Jettingen.				
627.	Gedeckter Wegdurchlass für den östl. Bahngraben, südl. Stirn, mittlerer Deckstein, = bei St 7,8 + 56^m etwas über Pl								
	1	24	55	2649	—10,2922	0,75	0,56	0,46	387,4451
628.	Offener Bahndurchlass Nr. I, südöstl. Widerlager, Deckstein in der Doppelbahnachse, □ Pl bei St 9,0 + 87^m								
	2	36	62	4475	—22,8175	1,16	1,34	0,55	364,6276
629.	Gewölbter Bahndurchlass Nr. IV mit 1 Oeffnung, südl. Stirn, östl. Gesimsstein, □ nahezu Pl bei St 9,7 + 147^m								
	3	20	67	2661	— 0,5093	1,09	1,19	0,67	364,1183
—	Erster Bandstein am südl. Rand auf dem Bahndamm westl. der Ueberfahrt Nr. 4 bei St 9,9 + 200^m Pl, = ohne Dauer								
	1	8	50	793	+ 4,4670	0,61	0,37	0,68	368,5853

Augsburg — Ulm.

Nr	A	J	Z	D	± H	w	w^2	w'	Cote
—	Zweiter Bandstein am nördl. Rand des Bahndammes, dicht westl. an der Ueberfahrt Nr. 4 bei St 9,9 + 200m, = nahezu Pl ohne Dauer								
	1a	1	—	—	+ 0,0480	0,10	0,01	—	368,6333
630.	Bahngrenzstein Nr. 76 nordöstl. der Bahn, = bei St 10,7 + 260m								
	2	24	63	3024	+15,8586	0,84	0,71	0,48	384,4919
631.	⊙ am Betriebsgebäude zu Jettingen, nördl. Ecke der Ostseite								
	3	9	59	1068	+ 3,2693	0,41	0,17	0,40	387,7612
	Jettingen — Burgau — Offingen.								
632.	Offene Bahndurchfahrt Nr. I, nordw. Widerlager, südw. Stirnflügel, = bei St 11,1 + 275m nahezu Pl								
	1	5	53	525	+ 4,0466	0,27	0,07	0,37	391,8078
633.	Gewölbter Bahndurchlass Nr. III, südwestl. Stirn, südöstl. Gesimsstein, = bei St 11,3 + 195m tief unter Pl								
	2	6	55	664	+ 5,4298	0,57	0,33	0,70	397,2376
634.	Laderrampe in der Station Burgau, Stirnflügel für die östl. Böschung bei der Puffernische, = auf dem Anlaufstein über Pl								
	3	14	72	2016	+ 6,9815	0,61	0,37	0,43	404,2191
635.	Gewölbter Bahndurchlass Nr. I mit drei Oeffnungen, südwestl. Stirn, Brüstungsquader über dem nordwestl. Pfeiler, □ bei St 12,7 + 280m								
	1	29	57	3282	+ 8,5740	1,00	1,00	0,55	412,7931
636.	Wegdurchlass für den nordöstl. Bahngraben, nordöstl. Widerlager, Gesimsstein des nordwestl. Stirnflügels, □ bei St 13.6 + 340m etwas über Pl								
	2	25	68	3412	+ 7,5653	1,01	1,02	0,55	420,3584
637.	= unter der Höhenmarke am Betriebsgebäude zu Offingen, westl. Treppenwange neben dem Eingange von der Strasse aus, 0,63m über Pl								
	3	8	57	910	+ 1,0923	0,41	0,17	0,43	421,4507
638.	⊙ am Betriebsgebäude zu Offingen								
	—				— 1,6843				419,7664
	Offingen — Günzburg.								
—	Feldstein neben dem östl. Pfosten der Schubschranke nördl. der Bahn, an der Ueberfahrt Nr. 2, = bei St 14,7 + 303m, ohne Dauer								
	1	28	57	3162	+ 0,6685	0,88	0,78	0.50	422,1192

Augsburg — Ulm.

Nr	A	J	Z	D	± H	w	w^2	w'	Cote
—	Zweiter Feldstein an der Ueberfahrt Nr. 2, nördlich vom vorigen, ohne Dauer								
	1[a]	1	—	—	+ 0,1426	0,37	0,14	—	422,2618
—	Oberer Rand des Böschungspflasters auf der nördl. Dammseite, gegen die Donau, = bei St 15,4 + 69[m] unter Pl, ohne Dauer								
	2	20	59	2368	— 1,1762	0,80	0,63	0,52	421,0856
639.	⊙ an der Wegbrücke Nr. I für die Strasse von Reisensburg über die Donau, Südseite des steinernen Pfeilers, über dem Sockel								
	3	9	56	1006	— 3,4404	0,47	0,22	0,47	417,6452
640.	Gewölbter Bahndurchlass Nr. II, südl. Stirn, westl. Gesims, ⊓ bei St 15,7 + 94[m], wenig unter Pl								
	4	2	40	161	+ 1,5558	0,14	0,02	0,35	419,2010
—	Bahngrenzstein Nr. 40 südl. der Bahn, östl. der Chaussee Günzburg — Lauingen, = tief unter Pl								
	5	12	51	1221	— 0,4149	0,60	0,36	0,46	418,7861
641.	Strassendurchlass in der Chaussee Günzburg — Lauingen, etwa 40[m] südl. der Eisenbahn, östl. Stirn, □ auf dem Deckstein des nördl. Böschungsflügels, etwas über Pl								
	6	1	31	61	— 2,4663	0,54	0,29	—	416,3198
642.	□ auf der Umfassungsmauer der Wage zu Station Günzburg, südl. Langseite, westl. Deckstein								
	7	3	51	303	— 0,7617	0,17	0,03	0,31	415,5581

Günzburg — Leipheim — Nersingen.

643.	Schiefe Blechbalkenbrücke Nr. II mit 4 Oeffnungen über die Günz, östl. Widerlager, nördl. Stirnflügel, Brüstungsstein, □ 0,43[m] über Pl bei St 16,2 + 135[m]								
	1	3	58	349	— 0,3109	0,28	0,08	0,48	415,2472
644.	Offener Bahndurchlass Nr. I in der Station Leipheim, östl. Widerlager, südl. Stirnflügel, Gesimsstein, □ innen an der Brüstung bei St 17,5 + 40[m] Pl								
	2	41	58	4728	— 3,8079	1,01	1,03	0,47	411,4393
645.	Gewölbte Bahnbrücke Nr. I mit 2 Oeffnungen über den Biberbach, südl. Stirn, westl. Brüstungsstein, □ 0,36[m] über Pl bei St 18,3 + 107[m]								
	1	24	63	3043	— 3,6731	0,67	0,45	0,39	407,7662

Augsburg — Ulm.

Nr	A	J	Z	D	± H	w	w^2	w'	Cote
646.	Gewölbter Bahndurchlass Nr. II, südl. Stirn, Innenkante des westl. Gesimssteins, □ Pl bei St 18,9 + 277m								
	2	18	67	2403	— 3,6237	0,61	0,37	0,39	404,1425
647.	Gewölbter Bahndurchlass Nr. II mit 2 Oeffnungen für das Fluthwasser der Roth, südl. Stirn, westl. Brüstungsstein, □ 0,3m über Pl bei St 19,1 + 107m								
	3	5	57	574	— 0,6873	0,45	0,20	0,59	403,4552
648.	Gewölbter Bahndurchlass Nr. IV, südl. Stirn, westl. Gesimsstein, = bei St 19,3 + 358m Pl								
	4	10	50	993	— 0,1512	0,44	0,19	0,44	403,3040
649.	⏢ auf der Wage zu Station Nersingen, Umfassungsmauer vor der nordwestl. Wand der Güterhalle								
	5	6	58	698	— 1,2658	0,37	0,14	0,45	402,0382

Nersingen — Neuulm — Ulm.

650.	Gewölbter Bahndurchlass Nr. II, südl. Stirn, Gesimsstein, ⏢ bei St 21,7 + 170m, Pl der Station Neuulm								
	1	62	65	8021	—10,8834	1,11	1,23	0,39	391,1548
651.	Hölzerne Bahnbrücke Nr. I über den Festungsgraben nordöstl. vom Bahnhof, nordöstl. Widerlager (bei der Contre-escarpe) nordwestl. Deckstein ⏢ Pl der Station bei St 22,0 + 315m								
	2	10	63	1252	+ 0,0525	0,35	0,12	0,31	391,2073
652.	= in der Treppenstufe unter der Höhenmarke am Betriebsgebäude zu Neuulm, ohne Dauer								
	3	4	51	408	— 0,6641	0,22	0,05	0,34	390,5432
653.	⊙ am Betriebsgebäude der Station Neu-Ulm, welches jedoch demnächst abgebrochen wird; Südostseite am Perron, Mittelpfeiler								
					— 0,6973				389,8459
654.	Gewölbte Bahndurchfahrt Nr. III, nördl. Stirn, westl. Brüstungsstein, ⏢ 0,3m über Pl bei St 22,4 + 233m								
	1	9	56	1003	— 4,5604	0,37	0,14	0,37	385,9828
655.	Würtemberger Fixpunkt daneben, (in Stein gehauen)								
	2	1	—	—	— 0,0009	0,10	0,01	—	385,9819
656.	□ unter der Höhenmarke an der Donaubrücke Nr. IV bei St 22,5 + 100m Pl								
	3	2	60	240	— 0,6264	0,30	0,09	0,61	385,3564

Nr	A	J	Z	D	± H	w	w^2	w'	Cote
657.	⊙ an dem östl. Thor der gewölbten Donaubrücke Nr. IV mit 5 Oeffnungen. Südseite des nördlichen Thorpfeilers								
					— 1,3715				383,9849
658.	Würtemberger Fixpunkt auf dem Anschlagstein des westl. Thors derselben Brücke, auf dem Ufer der Stadt Ulm								
	4	1	57	114	— 0,1434	0,10	0,01	—	385,2130

Neuulm—Senden—Vöhringen.

Nr									
651.	Hölzerne Bahnbrücke Nr. I über den Festungsgraben nordöstl. vom Bahnhof Neuulm, nordöstl. Widerlager, nordwestl. Deckstein ⏢ Pl der Station								
									391,2073
659.	Gewölbter Bahndurchlass Nr. 1, südl. Stirndeckstein, □ etwa 0,14^m unter Pl bei St 0,3 + 37^m								
	1	8	49	781	+ 0,5995	0,55	0,30	0,62	391,8068
660.	Offner Schienendurchlass Nr. 3 bei St 0,6 + 155^m, südl. Widerlager, Deckstein des westl. Böschungsflügels, □ 0,04^m unter Pl								
	2	11	56	1233	— 1,2761	0,65	0,42	0,58	390,5307
661.	Offner Schienendurchlass Nr. 4, südl. Widerlager, westl. Flügeldeckstein □ 0,06^m unter Pl bei St 0,9 + 190^m								
	3	13	44	1152	— 2,9204	0,60	0,36	0,56	387,6103
662.	Offner Schienendurchlass Nr. 6, südl. Widerlager, westl. Flügeldeckstein, □ 0,08^m unter Pl bei St 1,4 + 300^m								
	4	16	61	1966	— 5,7739	0,79	0,63	0,57	381,8364
663.	= auf dem Bahngrenzstein ohne Nummer westl. der Bahn, tief unter Pl bei St 1,7 + 70^m								
	5	6	73	882	— 0,1553	0,62	0,39	0,67	381,6811
664.	= auf dem Bahngrenzstein ohne Nummer westl. der Bahn bei St 1,9 + 350^m								
	6	12	43	1023	— 2,2500	0,37	0,14	0,37	379,4311

Ulm — Memmingen — Kempten.

Nr	A	J	Z	D	± H	w	w^2	w'	Cote
665.	□ auf der Umfassungsmauer der Wage in der Station Senden, Südwestseite, gegen die Güterhalle hin								
	7	25	54	2706	— 4,4041	0,92	0,84	0,56	375,0270
666.	⊙ am Betriebsgebäude zu Senden, Nordostseite am Perron, Lisene neben dem Eingang zur Expedition								
	8	1	33	66	— 1,8490	0,10	0,01	0,39	373,1780
667.	Offner Bahndurchlass Nr. 8, südöstl. Widerlager, südwestl. Flügeldeckstein, □ 0,09^m unter Pl bei St 3,0 + 265^m								
	1	10	65	1294	— 2,4350	0,60	0,36	0,53	372,5920
668.	= auf dem Bahngrenzstein ohne Nummer nordöstl. der Bahn bei St 3,6 + 345^m								
	2	20	58	2308	— 5,9211	0,87	0,76	0,57	366,6709
669.	⊙ am Betriebsgebäude der Haltestelle Vöhringen, nordwestl. Schmalseite, nordöstl. Ecklisene								
	3	13	74	1917	— 5,6205	0,76	0,58	0,55	361,0504

Voehringen — Bellenberg — Illertissen.

670.	□ auf dem Bahngrenzstein ohne Nummer südwestl. der Bahn an der Chaussee Neuulm--Illertissen, bei St 4,5 + 280^m								
	1	10	72	1441	— 1,5428	0,59	0,35	0,49	359,5076
671.	Offner Schienendurchlass Nr. 11, nordwestl. der Haltestelle Bellenberg, südöstl. Widerlager, nordöstl. Flügeldeckstein, □ 0,27^m unter Pl bei St 4,9 + 150^m								
	2	12	57	1365	— 1,7155	0,54	0,29	0,46	357,7921
672.	Bahndurchlass Nr. 13 mit Blechträgern über eine Oeffnung, südl. Widerlager, Sandsteinquader über dem Auflagerstein, □ 0,05^m unter Pl bei St 5,1 + 295^m								
	1	9	49	887	— 1,9751	0,47	0,22	0,50	355,8170
673.	= auf dem Bahngrenzstein ohne Nummer östl. der Bahn. bei St 5,3 + 80^m								
	2	7	37	521	— 1,2117	0,42	0,18	0,59	354,6053
674.	= in der oberen Treppenstufe unter der Höhenmarke zu Illertissen, 0,19^m über Pl								
	3	22	52	2302	— 5,2693	0,78	0,60	0,51	349,3360
675.	⊙ am Betriebsgebäude zu Illertissen, Nordostseite gegen die Stadt, nordw. Wandpfeiler der Vorhalle								
	—				— 1,4658				347,8702

Nr	A	J	Z	D	± H	w	w^2	w'	Cote
					Illertissen — Altenstadt — Kellmünz.				
676.	Bahngrenzstein südwestl. der Bahn, an der Gartenecke neben der Strasse, = bei St 6,0 + 40^m								
	1	3	50	302	— 0,0010	0,15	0,02	0,28	349,3350
677.	Bahngrenzstein südwestl. der Bahn, nordwestl. der Ueberfahrt, = bei St 6,6 + 330 ^{m}								
	2	19	66	2513	— 6,1589	0,71	0,50	0,45	343,1761
678.	Bahndurchlass Nr. 14 mit Blechträgern (über 1 Oeffnung) für den Mühlkanal, südöstl. Widerlager, nordöstl. Flügeldeckstein, □ Pl bei St 7.3 + 200^m								
	3	18	69	2476	— 6,7803	0,85	0,73	0,54	336,3958
679.	□ auf der Umfassungsmauer der Wage im Bahnhof Altenstadt, Nordostseite gegen die Güterhalle hin, Pl								
	4	13	61	1585	— 3,9897	0,69	0,47	0,54	332,4061
680.	⊙ am Betriebsgebäude zu Altenstadt, Nordostseite gegen das Dorf, Lisene nordwestl. neben dem Haupteingang								
	5	2	20	81	— 1,4700	0,24	0,06	0,84	330,9361
681.	Offner Bahndurchlass Nr. 17, nordwestl. Widerlager, Gesimsstein des südwestl. Stirnflügels, □ 0,08^m unter Pl bei St 8,2 + 265^m								
	1	16	55	1762	— 2,1113	0,74	0,54	0,56	328,8248
682.	= auf dem Bahngrenzstein nordöstl. der Bahn bei St 8,7 + 90^m								
	2	13	65	1683	— 3,4182	0,82	0,67	0,63	325,4066
683.	⊙ am Betriebsgebäude zu Kellmünz, Nordostseite, Lisene südöstl. dem Haupteingang von dem Marktflecken her								
	3	14	47	1315	— 5,9527	0,60	0,36	0,52	319,4539
684.	□ auf der Umfassungsmauer der Wage, Nordostseite gegen die Güterhalle, Pl								
	4	2	46	186	+ 1,5400	0,18	0,03	0,42	320,9939
					Kellmünz — Fellheim — Heimertingen — Memmingen.				
685.	Gewölbter Bahndurchlass Nr. 19, Brüstungsstein der südwestl. Stirn, □ über Pl bei St 9,1 + 240^m								
	1	3	42	252	— 0,3608	0,38	0,15	0,77	320,6331
686.	Gewölbter Bahndurchlass Nr. 21, Gesimsstein der südwestl. Stirn, □ unter Pl bei St 9,7 + 90^m								
	2	16	65	2081	— 9,3137	0,97	0,95	0,67	311,3194

Ulm — Memmingen — Kempten.

Nr	A	J	Z	D	± H	w	w^2	w'	Cote
687.	□ auf der Wage im Bahnhof Fellheim, Westseite, südl. Ecke, Pl								
	3	29	63	3665	—15,9181	0,85	0,71	0,44	295,4013
688.	⊙ am Betriebsgebäude in Fellheim, Ostseite am Perron, Lisene zwischen mittlerer und südlicher Thür								
	4	1	37	74	— 1,8713	0,24	0,06	0,88	293,5300
689.	⊙ am Betriebsgebäude zu Heimertingen, nördl. Ecklisene der Westseite								
	1	35	57	4000	—16,5941	1,38	1,90	0,69	279,0072
690.	Gewölbter Bahndurchlass Nr. 25, östl. Stirn, = auf der obersten Deckplatte des nördl. Böschungsflügels etwa 1,5m unter Pl bei St 12,2 + 2m								
	1	11	54	1418	+ 5,6610	0,47	0,22	0,39	284,6682
691.	Gewölbter Bahndurchlass Nr. 31 über den Stadtbach im Bahnhof Memmingen, südl. Deckstein der östl. Stirn, □ 0,05m unter Pl bei St 13,5 + 20m								
	2	36	67	4837	—20,8541	1,12	1,24	0,51	263,8141
692.	= auf der obersten Treppenstufe unter der Höhenmarke zu Memmingen								
	3	2	26	105	— 0,3795	0,19	0,04	0,60	263,4346
693.	⊙ am Betriebshauptgebäude des Bahnhofes Memmingen östl. der Stadt, Westseite gegen die Maximiliansstrasse, nördl. Pfeiler der Vorhalle								
					— 1,3311				262,1035

Memmingen — Grönenbach — Dietmannsried.

694.	Bahngrenzstein ohne Nummer östl. der Bahn, = unter Pl bei St 15,0 + 0m								
	1	40	70	5547	—25,8203	1,17	1,36	0,50	237,9938
695.	= auf dem Bahngrenzstein östl. der Bahn bei St 16,2 + 140m								
	2	32	72	4590	—32,4425	1,23	1,51	0,57	205,5513
696.	= unter der Höhenmarke im Bahnhof Grönenbach, auf der mittleren Treppenstufe 0,36m über Pl bei St 17,0 + 185m								
	3	19	80	3020	— 19,5143	1,01	1,03	0,58	186,0370
697.	⊙ am Betriebsgebäude zu Station Grönenbach, Ostseite, Pfeiler der Vorhalle								
					— 1,4188				184,6182
698.	Offner Bahndurchlass Nr. 40, nördl. Widerlager, Auflagerstein für die Schienen, □ bei St 17,6 + 3m Pl								
	1	18	57	2044	- 12,3629	0,78	0,60	0,54	173,6741

Ulm — Memmingen — Kempten.

Nr	A	J	Z	D	± H	w	w^2	w'	Cote
699.	Gewölbter Bahndurchlass Nr. 45, unter Pl, westl. Stirn, oberste Deckplatte des südl. Böschungsflügels, = bei St 18,5 + 63m								
	2	26	65	3396	−15,9337	0,78	0,60	0,42	157,7404
700.	= auf der Treppenstufe unter der Höhenmarke zu Dietmannsried, 0,56m über Pl								
	3	28	59	3330	+14,5377	0,99	0,97	0,54	172,2781
701.	⊙ am Betriebsgebäude zu Dietmannsried, Ostseite am Perron, Lisene zwischen der mittleren und südlichen Thür								
					— 1,4604				170,8177

Dietmannsried — Häusing — Kempten.

702.	Offner Bahndurchlass Nr. 51, südl. Widerlager, östl. Flügeldeckstein, □ 0,08m unter Pl bei St 19,6 + 135m								
	1	9	45	813	+ 3,6280	0,51	0,26	0,56	175,9061
703.	Gewölbte Bahnbrücke Nr. 60 mit 5 Oeffnungen über die Leubas südl. Station Häusing, östl. Stirn, Gesimsstein, □ 0,07m unter Pl bei St 20,8 + 196m								
	2	30	75	4512	— 0,0337	1,26	1,59	0,59	175,8724
704.	⊙ an der Wegbrücke Nr. 61, Mitte des westl. Widerlagers bei St 21,0 + 41m								
	1	6	49	585	— 2,7695	0,46	0,21	0,60	173,1029
705.	Offner Bahndurchlass Nr. 67, südl. Widerlager, östl. Flügeldeckstein, = bei St 21,5 + 233m Pl								
	2	21	49	2050	— 6,5069	0,83	0,69	0,58	166,5960
706.	Offner Bahndurchlass Nr. 75, nördl. Widerlager, westl. Flügeldeckstein, = bei St 22,2 + 330m Pl								
	3	23	58	2660	— 6,4420	0,80	0,64	0,49	160,1540
516.	Bahngrenzstein Nr. 27 nordwestl. der Kempten—Augsburger Bahn, = bei St 27,0 + 283m								
	4	5	50	501	— 3,3889	0,59	0,35	0,83	156,7651
515.	Findling östl. der Bahn im Anschnitt nahe am Wärterhaus Nr. 102, gegenüber diesem Bahngrenzstein								
	3	1	—	—	— 1,0074	0,10	0,01	—	155,7577
	Cote desselben nach Seite 100 der Ersten Mittheilung								155,7479

Augsburg — München.

Nr	A	J	Z	D	± H	w	w^2	w'	Cote

Augsburg — Stierhof — Mering.

464. ☐ auf der nordwestlichen der 3 grossen Drehscheiben an der Einsteighalle zu Augsburg, westlich neben dem Hauptgeleise, Pl
372,2363

466. ⊙ ohne Vorplatte an dem südwestl. Pfeiler der Wegbrücke für die Strasse nach Göggingen, in der Mitte der Nordostseite des Pfeilers, über dem hohen Sockel in der Kämpferschichte
— 2,5615 369,6748

707. ⊙ an demselben Pfeiler, unter der ersten, über dem unteren Sockel
+ 0,9327 370,6075

708. Gitterbrücke Nr. 50 mit 2 Oeffnungen über den Lech, westl. Widerlager, mittlerer Deckstein, ☐ Pl bei St 15,5 + 170m
1 30 61 3656 + 4,5220 0,74 0,55 0,39 375,1295

709. ☐ auf dem östl. Widerlager derselben Brücke, dem ersten entsprechend angebracht, bei St 15,5 + 64m
2 1 53 105 — 0,0195 0,10 0,01 — 375,1100

710. Randstein des Perrons in der Station Stierhof, nördl. Perronende, ☐ 0,25m über Pl bei St 15,1 + 50m
3 13 58 1514 + 0,1226 0,52 0,27 0,42 375,2326

711. Gewölbter Bahndurchlass bei St 14,4 + 285m, östl. Stirn, Deckstein des südl. Böschungsflügels, ☐ 0,09m unter Pl
1 19 63 2379 — 6,5586 0,56 0,31 0,36 368,6740

712. Schiefer offner Bahndurchlass Nr. 47, nördl. Widerlager, oberer Deckstein des östl. Böschungsflügels, = bei St 13,8 + 155m fast Pl
2 16 74 2353 — 6,8783 0,75 0,56 0,49 361,7957

713. Wegdurchlass bei der Ueberfahrt Nr. 65 für den südwestl. Bahngraben, südöstl. Stirn, ☐ bei St 13,1 + 88m, nahezu Pl
3 17 78 2661 — 6,9381 0,72 0,52 0,44 354,8576

714. Gewölbter Bahndurchlass Nr. 46, Gesimsstein der südwestl. Stirn, ☐ wenig unter Pl bei St 12,6 + 180m
4 14 62 1746 — 4,3950 0,76 0,58 0,58 350,4626

715. ⊙ am Betriebsgebäude zu Mering, Nordostseite am Perron, südöstl. Ecke
5 4 60 481 — 2,8917 0,30 0,09 0,44 347,5709

Augsburg — München.

Nr	A	J	Z	D	± H	w	w^2	w'	Cote

Mering — Althegnenberg.

716. Gewölbter Bahndurchlass Nr. 44, Gesimsstein der nordöstl. Stirn, □ 0,07^m unter Pl bei St 12,2 + 89^m

1	11	53	1162	— 1,0245	0,47	0,22	0,44	346,5464

717. Gewölbter Bahndurchlass Nr. 43, Gesimsstein der nordöstl. Stirn, = bei St 12,1 + 87^m Pl

2	3	62	373	— 1,1312	0,14	0,02	0,23	345,4152

718. Gewölbte Bahndurchfahrt Nr. 42, Gesimsstein der südl. Stirn, □ über dem Gewölbscheitel bei St 11,9 + 6^m, nahezu Pl

3	6	69	823	— 2,6932	0,40	0,16	0,44	342,7220

719. Gewölbte Bahndurchfahrt Nr. 41, südl. Stirn, Deckstein des westl. Böschungsflügels, = bei St 11,7 + 19^m Pl

4	6	61	730	— 2,4870	0,51	0,26	0,60	340,2350

720. Gewölbte Bahndurchfahrt Nr. 40, Gesimsstein der nördl. Stirn, □ bei St 11,4 + 78^m nahezu Pl

5	8	66	1055	— 3,5055	0,46	0,21	0,45	336,7295

721. Gewölbte Bahndurchfahrt Nr. 37, Gesimsstein der südwestl. Stirn, □ über dem Gewölbscheitel wenig unter Pl bei St 11,0 + 180^m

6	9	77	1383	— 4,6274	0,47	0,22	0,40	332,1021

722. Gewölbter Bahndurchlass Nr. 36 östl. Station Althegnenberg, Gesimsstein der südl. Stirn, □ bei St 10,6 + 292^m nahezu Pl

7	9	76	1371	— 4,7824	0,46	0,21	0,39	327,3197

723. ⊙ an der Wegbrücke Nr. 35 für die Strasse Augsburg—München, nordöstl. Widerlager, Südwestseite, über dem Sockel, 1,48^m über Pl, bei St 10,5 + 290^m

8	3	62	373	— 3,0206	0,42	0,18	0,69	324,2991

Althegnenberg — Haspelmoor.

724. Gewölbter Bahndurchlass Nr. 34, Gesimsstein der nördlichen Stirn, □ bei St 10,3 + 270^m nahezu Pl

1	6	63	761	— 1,0873	0,32	0,10	0,36	323,2118

725. Gewölbter Bahndurchlass Nr. 33, Gesimsstein der nördlichen Stirn, = bei St 10,1 + 305^m Pl

2	6	59	710	— 2,5423	0,30	0,09	0,35	320,6695

Augsburg — München.

Nr	A	J	Z	D	± H	w	w^2	w'	Cote
726.	Gewölbter Bahndurchlass Nr. 32, Gesimsstein der nördlichen Stirn, □ bei St 9,6 + 115^m nahezu Bahnhof-Pl								
	3	16	64	2051	— 1,1120	0,83	0,69	0,58	319,5575
727.	⊙ an der Wegbrücke Nr. 31 für den Hattenhofer Weg, östl. der Station Haspelmoor, südl. Pfeiler, Nordseite, bei St 9,5 ± 0								
	4	4	62	492	— 1,6904	0,42	0,18	0,60	317,8671

Haspelmoor — Nannhofen — Maisach.

728.	Gewölbter Bahndurchlass Nr. 30, nördl. Stirn, östl. Gesimsstein, □ bei St 9,2 + 62^m, nahezu Pl								
	1	9	59	1053	+ 4,0584	0,26	0,07	0,26	321,9255
729.	Gewölbter Bahndurchlass Nr. 28. südl. Stirn, östl. Gesimsstein, □ nahezu Pl bei St 8,9 + 10^m								
	2	8	73	1167	+ 3,8152	0,42	0,18	0,39	325,7407
730.	Gewölbter Bahndurchlass Nr. 27, südl. Stirn, östl. Gesimsstein, □ nahezu Pl bei St 8,6 + 146^m								
	3	8	61	979	+ 3,2056	0,42	0,18	0,43	328,9463
731.	Gewölbter Bahndurchlass Nr. 26 mit 2 Oeffnungen, westl. Station Nannhofen, Gesimsstein der nördl. Stirn, □ nahezu Pl bei St 8,4 + 43^m								
	4	7	60	846	+ 2,5816	0,58	0,34	0,63	331,5279
732.	Gewölbter Bahndurchlass Nr. 24, nördl. Stirn, östl. Gesimsstein, □ nahezu Pl bei St 8,2 + 205^m								
	1	5	58	579	+ 1,8372	0,42	0,18	0,57	333,3651
733.	Offner Bahndurchlass Nr. 22, westl. Widerlager, Deckstein der Berme des nördl. Böschungsflügels, □ tief unter Pl bei St 7,6 + 200^m								
	2	16	70	2232	+ 6,4779	0,86	0,74	0,58	339,8430
734.	Gewölbter Bahndurchlass Nr. 20, Gesimsstein der nördl. Stirn, □ nahezu Pl bei St 7,3 + 206^m								
	3	8	69	1109	+ 2,0450	0,60	0,36	0,57	341,8880
735.	Gewölbter Bahndurchlass Nr. 19^b, nördl. Stirn, östl. Gesimsstein, □ nahezu Pl bei St 7,1 + 240^m								
	4	5	71	710	+ 1,1545	0,40	0,16	0,48	343,0425
736.	Gewölbter Bahndurchlass Nr. 19^a mit 2 Oeffnungen in dem Bahnhof Maisach, Gesimsstein der südl. Stirn, □ bei St 6,7 + 14^m, Pl								
	5	13	66	1704	+ 3,1352	1,02	1,04	0,78	346,1777

Augsburg — München.

Nr	A	J	Z	D	± H	w	w^2	w'	Cote
737.	⊙ an dem Wechselwärterhaus am Ostende des Bahnhofs Maisach, östl. der Strasse nach Fürstenfeldbruck, östl. Ecke der nördlichen Giebelseite								
	6	1	19	37	— 1,4839	0,14	0,02	0,74	344,6938

Maisach — Olching — Lochhausen — Pasing.

738.	Gewölbte Bahnbrücke Nr. 18 mit 5 Oeffnungen über die Amper, westlich der Station Olching, südl. Stirn, Gesimsstein über der östl. Oeffnung, □ innen an der Brüstung bei St 5,3 + 227^m Pl								
	1	31	80	4957	+11,0837	0,85	0,72	0,38	355,7775
739.	⊙ an der Wegbrücke Nr. 7 nordwestl. Station Lochhausen, Nordostseite des südwestl. Widerlagers, bei St 3,4 + 222^m								
	1	42	84	7042	— 9,9285	1,28	1,65	0,48	345,8490
740.	Gewölbter Bahndurchlass Nr. 4, Gesimsstein der südwestl. Stirn, □ Pl bei St 3,1 + 122^m								
	1	8	76	1211	— 1,4583	0,64	0,41	0,58	344,3907
741.	Gewölbte Bahnbrücke Nr. 2 mit 1 Oeffnung über den Würmkanal im Bahnhofe Pasing, nördl. Stirn, östl. Gesimsstein, ⏢ Pl bei St 2,0 + 265^m								
	2	28	70	3939	— 8,2881	0,89	0,80	0,45	336,1026

Pasing — München.

742.	Electrische Signal-Glockensäule bei Bahnwärterhaus Nr. 11 am Ende des Bahnhofs München, Sockelstein, □ über Pl bei St 0,7 + 110^m								
	1	39	64	5009	+ 0,3345	1,18	1,38	0,53	336,4371
743.	Signal-Glockensäule östlich neben dem 3. Pfeiler (von Norden her) der Wegbrücke für die Salzstrasse im Bahnhof München, □ über Pl bei St 0,2 + 120^m								
	2	12	77	1844	+ 3,7034	0,51	0,26	0,38	340,1405
744.	⊙ an der Wegbrücke für die Salzstrasse im Bahnhof München, 3. Pfeiler von Norden her, für den westl. Träger, Nordseite, bei St 0,2 + 130^m								
	3	1	—	—	— 1,5052	0,10	0,01	—	338,6353
745.	= unter der Höhenmarke am Staatsschulden-Tilgungsgebäude in München, in den Pflasterstein gehauen								
	4	12	69	1663	+ 3,4917	0,60	0,36	0,46	343,6322
746.	⊙ neben dem Haupteingang zu diesem Gebäude vom Karlsplatz her, westl. Thorgewände								
					— 1,5768				342,0554

Augsburg — München.

Nr	A	J	Z	D	± H	w	w^2	w'	Cote
747.	□ auf der steinernen Sockelbank, welche den Mittelbau der polytechnischen Schule auf der Seite der Arcisstrasse umgibt. Nordseite, 0,3m unter Fussbodenhöhe des Vestibules, dicht an der Ecke des profilirten Sockels								
	5a	8	69	1110	+ 1,7008	0,40	0,16	0,38	345,3330
748.	Cementplatte ⏍, in die oberste marmorne Treppenstufe vor dem Haupteingange in der Façade der Frauenkirche eingelassen								
	5b	6	46	548	— 0,5394	0,53	0,28	0,71	343,0928
749.	⊙ an der südl. Wand des nördl. Frauenthurms								
	6	1	—	—	— 1,1618	0,17	0,03	—	341,9310
—	Generalfixpunkt (G. F. P.) der trigonometrischen Höhenmessungen in Bayern, durch 2 in den Sockel der beiden Frauenthürme eingehauene wagrechte Striche bezeichnet, an den gegen das Portal gerichteten Thurmwänden								
									343,105

München — Holzkirchen — Rosenheim.

München — Mittersendling.

744.	⊙ an der Salzstrassenbrücke im Bahnhof München, 3. Pfeiler von Norden her								
									338,6353
743.	Glockensäule neben diesem Pfeiler								
					+ 1,5052	0,10	0,01	—	340,1405
750.	Offner Bahndurchlass bei St 0,2 + 280m, mittlere Gesimsplatte auf gemeinschaftlichem Flügel zwischen beiden Bahnen nach Rosenheim, ⏍ nahezu Pl								
	1	17	50	1694	— 3,8863	0,52	0,27	0,40	336,2542
751.	Offner Bahndurchlass bei St 0,5 + 210m, südöstl. Widerlager, südwestl. Stirnflügel, Gesimsplatte, □ nahezu Pl								
	2	9	58	1046	— 3,5916	0,71	0,50	0,69	332,6626
752.	⊙ am Betriebsgebäude der Station Mittersendling, Westseite am Perron, nördl. Ecklisene des Mittelbaues								
	3	30	56	2945	—18,2662	0,82	0,68	0,48	314,3964

München — Holzkirchen — Rosenheim.

Nr	A	J	Z	D	± H	w	w^2	w'	Cote

Mittersendling — Grosshesselohe — Deisenhofen.

753. ⊙ am Betriebsgebäude zu Grosshesselohe, östl. Flügelbau, nördl. Ecklisene der Ostseite

1 45 50 4384 —14,5668 0,98 0,96 0,47 299,8296

754. Eiserne Fischbauchträgerbrücke Nr. 2 über die Isar bei Grosshesselohe, südl. Stirn des östl. Widerlagers, Cementplatte ⏢ in den Pflasterquader eingelassen, an der Brüstung, bei St 2,6 + 30m

1 5 46 460 + 1,9766 0,22 0,05 0,32 301,8062

755. Bahngrenzstein östl. der Bahn, nördl. der Ueberfahrt, = bei St 2,9 + 195m

2 12 53 1271 — 5,4835 0,63 0,40 0,56 296,3227

756. ⊙ am Betriebsgebäude zu Deisenhofen neben der Thür in der südl. Seitenwand

3 46 67 6154 —31,6891 1,15 1,32 0,46 264,6336

Deisenhofen — Sauerlach — Holzkirchen.

757. Gewölbter Bahndurchlass Nr. 4a, östl. Stirn, südl. Gesimsstein, □ nahezu Pl bei St 6,5 + 175m

1 62 60 7381 —20,0180 1,44 2,07 0,53 244,6156

758. ⊙ am Betriebsgebäude in Sauerlach, Ostseite am Perron, südl. neben dem grossen mittleren Hauptfenster

2 2 63 251 — 1,9619 0,28 0,08 0,56 242,6537

759. Wegdurchlass für den östl. Bahngraben unter Ueberfahrt Nr. 37, südl. Stirndeckstein, = bei St 6,8 + 65m

1 6 64 772 — 1,7051 0,57 0,33 0,65 240,9486

760. Gewölbter Bahndurchlass Nr. 6, Gesimsstein der östl. Stirn, □ bei St 8,1+124m Pl

2 35 69 4880 —35,9367 1,08 1,16 0,49 205,0119

761. Bahngrenzstein östl. der Bahn, nördl. der Ueberfahrt Nr. 49, □ bei St 8,8+96m

3 19 68 2577 —19,6904 0,64 0,41 0,40 185,3215

⊙ am Betriebsgebäude zu Holzkirchen, Nordseite am Perron, Mittelbau

4 19 60 2289 — 9,4465 0,63 0,40 0,42 175,8750

München — Holzkirchen — Rosenheim.

Nr	A	J	Z	D	± H	w	w^2	w'	Cote
					Holzkirchen — Westerham.				
763.	Offner Bahndurchlass Nr. I, südl. Widerlager, westl. Anlaufstein, □ 0,58^m unter Pl bei St 10,0 + 68^m								
	1	14	76	2137	+22,0870	0,97	0,95	0,67	197,9620
764.	Schiefer gewölbter Bahndurchlass Nr. IV mit 1 Oeffnung, nordwestl. Stirn, nordöstl. Brüstungsstein, □ 0,37^m über Pl bei St 10,9 + 180^m								
	2	20	86	3435	+32,1781	0,75	0,56	0,40	230,1401
765.	Gewölbter Bahndurchlass Nr. I, nördl. Stirn, östl. Gesimsstein, □ über Pl bei St 11,0 + 144^m								
	3	3	56	338	+ 3,3327	0,17	0,03	0,29	233,4728
766.	Schiefe offne Bahndurchfahrt Nr. IV, nordöstl. Widerlager, Gesimsstein der südöstl. Stirn, □ bei St 11,8 + 358^m Pl								
	4	23	69	3162	+32,2379	0,90	0,81	0,51	265,7107
767.	Gedeckter stufenförmiger Bahndurchlass Nr. X, nördl. Einlaufschacht, östl. Randstein, □ tief unter Pl bei St 12,9 + 54^m								
	5	24	79	3807	+39,6922	0,92	0,85	0,47	305,4029
768.	= unter der Höhenmarke zu Westerham, in die Steinplatte neben dem Brunnen gehauen								
	6	5	70	701	— 0,7365	0,43	0,19	0,52	304,6664
769.	⊙ am Wasserhaus im Bahnhof Westerham, nördl. Giebelseite, westlich neben dem Brunnen								
					— 1,5816				303,0848
					Westerham — Bruckmühl.				
770.	Gewölbter Bahndurchlass Nr. I, Gesimsstein der südl. Stirn, □ bei St 14,1+240^m Pl								
	1	25	80	4013	+29,2425	0,77	0,59	0,38	333,9089
771.	Offner Bahndurchlass Nr. III für den Seitenkanal der Mangfall, westl. Widerlager, südl. Flügeldeckstein, □ bei St 14,8 + 93^m Pl								
	2	15	81	2447	+12,5541	0,70	0,49	0,45	346,4630
772.	⊙ am Betriebsgebäude der Station Bruckmühl, südl. Giebelseite am Perron, mittlerer Wandpfeiler								
	3	6	72	865	+ 1,0746	0,52	0,27	0,56	347,5376

Nr	A	J	Z	D	± H	w	w^2	w'	Cote

Bruckmühl — Heufeld — Aibling.

773. Schiefer offner Bahndurchlass Nr. II, östl. Widerlager, Gesimsstein des nördl. Stirnflügels, □ bei St 15,1 + 280^m Pl

1	4	53	424	+ 2,8193	0,14	0,02	0,22	350,3569

774. = auf dem Bahngrenzstein nördl. der Bahn bei St 15,9 + 280^m

2	19	78	2978	+16,7274	0,82	0,68	0,48	367,0843

775. Offner Bahndurchlass Nr. I, östl. Station Heufeld, östl. Widerlager, nördl. Stirnflügel, östl. Gesimsstein, □ nahezu Pl bei St 16,3 + 305^m

3	10	76	1511	+ 6,6974	0,73	0,53	0,59	373,7817

776. = auf dem Bahngrenzstein nördl. der Bahn bei St 16,6 + 12^m

1	6	69	824	+ 3,2576	0,55	0,30	0,60	377,0393

777. ⊙ am Betriebsgebäude zu Aibling, Südseite gegen den Perron, Mittelbau, zwischen westl. Fenster und Ecklisene

2	8	77	1236	+ 2,4844	0,47	0,22	0,42	379,5237

Aibling — Kolbermoor — Rosenheim.

778. Gewölbte Bahnbrücke Nr. I mit 4 Oeffnungen über den Glonbach, nordöstl. Stirn, unterer Brüstungsstein, □ innen an der Brüstung 0,4^m über Pl bei St 17,1 + 285^m

1	7	64	898	+ 5,9325	0,71	0,51	0,75	385,4562

779. Gewölbter Bahndurchlass Nr. I, südl. Stirn, östl. Gesimsstein, □ nahezu Pl bei St 18,1 + 185^m

2	23	78	3601	+12,2469	0,92	0,84	0,48	397,7031

780. Gewölbter Bahndurchlass Nr. III, Gesimsstein der nördl. Stirn, □ nahezu Pl bei St 18,8 + 300^m

1	17	79	2706	+ 9,0767	0,71	0,50	0,43	406,7798

781. Offner Bahndurchlass Nr. I, westl. Widerlager, südl. Stirnflügel, westl. Gesimsstein, □ nahezu Pl bei St 19,3 + 55^m

2	10	81	1607	+ 6,2910	0,78	0,61	0,62	413,0708

782. Gewölbter Bahndurchlass Nr. II mit 3 Oeffnungen über den Markt-Canal am Westende des Bahnhofs Rosenheim, südl. Stirn, Gesimsstein des östlichen vorspringenden Stirnflügels, □ nahezu Pl bei St 19,5 + 302^m

3	6	82	989	+ 2,1876	0,53	0,28	0,53	415,2584

München — Holzkirchen — Rosenheim.

Nr	A	J	Z	D	± H	w	w^2	w'	Cote
783.	= auf der Treppenstufe unter der Höhenmarke zu Rosenheim								
	4	4	57	450	— 0,6537	0,28	0,08	0,42	414,6047
784.	⊙ am Betriebshauptgebäude zu Rosenheim, Haupteingang von der Stadt her auf der Nordseite, westl. Seitenfläche des vortretenden Portals								
					— 1,5418				413,0629
785.	Eiserne Fischbauchträgerbrücke Nr. VI mit 3 Oeffnungen über den Werkkanal der Mangfall (Hammerbach), östl. Widerlager, südl. Stirnflügel, östl. Gesimsstein, ⏢ bei St 19,7 + 338^m								
	5	4	41	328	+ 0,4521	0,25	0,06	0,42	415,0568

Rosenheim — Kufstein.

Rosenheim — Raubling — Brannenburg.

785.	⏢ auf der eisernen Fischbauchträgerbrücke Nr. VI								
									415,0568
786.	Gewölbter Bahndurchlass Nr. 1, westl. Stirn, zweiter Deckstein von Süden her, □ 0,03^m unter Pl bei St 0,8 + 84^m								
	1	24	59	2812	— 2,0450	0,80	0,63	0,48	413,0118
787.	Offner Bahndurchlass Nr. 2, Deckstein des südlichen Widerlagers, □ bei St 1,3 + 142^m Pl								
	2	16	60	1912	— 5,6326	1,16	1,34	0,84	407,3792
788.	Gewölbter Bahndurchlass Nr. 3 für den Grünthalbach, östl. Stirn, nördl. Gesimsstein, □ bei St 1,7 + 53^m Pl								
	3	11	63	1384	— 1,4821	0,76	0,58	0,65	405,8971
789.	Gewölbter Bahndurchlass Nr. 4 mit 1 Oeffnung für den Aubach, westl. Stirn, südl. Gesimsstein, □ 0,05^m unter Pl bei St. 1,9 + 78^m								
	4	7	56	782	— 0,2388	0,59	0,35	0,67	405,6583
790.	⊙ am Betriebsgebäude in der Station Raubling, östl. Giebelseite am Perron, zwischen Fenster und nördl. Ecke								
	5	7	55	773	— 4,7028	0,42	0,17	0,47	400,9555

Rosenheim — Kufstein.

Nr	A	J	Z	D	± H	w	w^2	w'	Cote
791.	Gewölbter Bahndurchlass Nr. 6 mit einer Oeffnung für den Tömelbach, Gesimsstein der westl. Stirn, □ Pl an der Innenkante bei St 2,3 + 133m								
	1	6	64	767	+ 0,4112	0,69	0,47	0,78	401,3667
792.	Gewölbter Bahndurchlass Nr. 7 für den Sägmühlbach, Gesimsstein der östl. Stirn, □ 0,04m unter Pl bei St 2,4 + 356m								
	2	6	61	728	— 2,0485	0,43	0,19	0,50	399,3182
793.	Offner Bahndurchlass Nr. 9, südl. Widerlager, westl. Stirnflügel, nördl. Deckstein, □ bei St 3,0 + 182m Pl								
	3	18	53	1911	— 3,6996	0,85	0,71	0,61	395,6186
—	Gewölbter Bahndurchlass Nr. 10 für einen Waldbach, westl. Stirn, nördl. Gesimsstein, vorstehender Kalkkies im Nagelfluhquader, nahe der Innenkante, 0,67m von der nördl. Stossfläche, bei St 3,1 + 182m Pl								
	4	4	46	370	— 0,4266	0,22	0,05	0,36	395,1920
794.	Offner Bahndurchlass Nr. 11a mit hölzerner Fahrbahn, südöstl. Widerlager, Deckstein des südwestl. Stirnflügels, □ bei St 3,5 + 60m Pl								
	5	12	57	1365	— 5,9102	0,83	0,68	0,71	389,2818
795.	⊙ am Betriebsgebäude zu Brannenburg, Westseite, nördl. neben dem Eingang								
	6	3	55	329	— 2,5848	0,24	0,06	0,42	386,6970

Brannenburg — Fischbach.

796.	Offner Bahndurchlass Nr. 13 im Bahnhof zu Brannenburg, südöstl. Widerlager, nordöstl. Flügel, südöstl. Deckstein, □ 0,02m unter Pl bei St 3,6 + 154m								
	1	2	42	169	+ 2,3363	0,23	0,05	0,55	389,0333
797.	Gewölbte Bahnbrücke Nr. 15 mit 2 Oeffnungen, Gesimsstein der südwestl. Stirn, □ 0,04m unter Pl bei St 3,9 + 78m								
	2	8	65	1042	+ 4,3327	0,47	0,22	0,46	393,3660
798.	= auf dem Grenzstein östl. der Bahn bei St 4,2 + 60m								
	3	10	57	1130	+ 1,1998	0,62	0,39	0,59	394,5658
799.	Gewölbte Bahnbrücke und Durchfahrt Nr. 17 mit 3 Oeffnungen für den Flintsbach, südwestl. Stirn, südöstl. Gesimsstein, □ 0,03m unter Pl bei St 4,3 + 137m								
	4	5	47	470	— 0,4581	0,26	0,07	0,38	394,1077
800.	Gewölbte Bahnbrücke Nr. 19 mit 2 Oeffnungen für den Marktbach und Weg am nordwestl. Ende des Bahnhofes Fischbach, südwest. Stirn, Cementplatte ⊏ im südöstl. Gesimsstein bei St 4,6 + 325m Pl								
	5	12	49	1179	— 0,0720	0,67	0,45	0,62	394,0357

Rosenheim — Kufstein.

Nr	A	J	Z	D	± H	w	w^2	w'	Cote

Fischbach — Oberaudorf.

801. Gewölbter Bahndurchlass Nr. 21 für den Einödbach, Gesimsstein der westl. Stirn, □ 0,02^m unter Pl bei St 5,1 + 168^m

1	14	61	1693	+ 0,6364	0,52	0,27	0,40	394,6721

802. Eiserne Fischbauchträgerbrücke Nr. 23 mit 1 Oeffnung, nördl. Widerlager, östl. Stirnflügel, südl. Wangendeckstein, □ 0,20^m unter Pl bei St 5,5 + 85^m

2	10	70	1401	+ 0,7107	0,60	0,36	0,51	395,3828

803. Eiserne Fischbauchträgerbrücke Nr. 26 mit 3 Oeffnungen für den Auerbach, nordwestl. Pfeiler, nordöstl. Pfeilerkopf, Rückenkante des Decksteins, □ 0,17^m unter Pl bei St 6,5 + 66^m

3	26	70	3675	—11,7392	0,72	0,52	0,37	383,6436

804. = unter der Höhenmarke zu Oberaudorf, in das Cementpflaster gehauen

4	10	44	881	— 3,6981	0,48	0,23	0,52	379,9455

805. ⊙ am Betriebsgebäude zu Oberaudorf, Ostseite am Perron, zwischen nördl. Thür und Fenster

— 1,6167 — 378,3288

Oberaudorf — Kiefersfelden.

806. Gewölbte Bahndurchfahrt Nr. 27, südwestl. Stirn, südöstl. Gesimsstein, □ 0,03^m unter Pl bei St 6,9 + 140^m

1	7	50	702	+ 2,4256	0,37	0,14	0,44	382,3711

807. Gewölbter Bahndurchlass Nr. 31 für den Giessenbach, Gesimsstein der südwestl. Stirn, □ an der Innenkante bei St 7,2 + 303^m Pl

2	10	64	1290	+ 5,2977	0,81	0,66	0,72	387,6688

808. = auf dem Bahngrenzstein Nr. 27 nordöstl. der Bahn bei St 7,6 + 215^m, tief unter Pl

3	12	58	1394	+ 2,6154	0,60	0,36	0,51	390,2842

809. Gewölbte Bahnbrücke Nr. 34 mit 3 Oeffnungen über den Kieferbach, nordöstl. Station Kiefersfeldern, südöstl. Stirn, □ 0,02^m unter Pl bei St 8,1 + 183^m

4	16	58	1844	—12,1015	0,84	0,70	0,62	378,1827

810. ⊙ am Betriebsgebäude zu Kiefersfelden, Südostseite am Perron, Nordostecke

5	3	47	283	— 1,9953	0,29	0,09	0,55	376,1874

Rosenheim — Kufstein.

Nr	A	J	Z	D	± H	w	w^2	w'	Cote

Kiefersfelden — Kufstein.

811. Strassendurchlass neben der Bahn in der Staatsstrasse nach Kufstein, nordwestl. Stirn, südwestl. Gesimsstein bei St 8,5 + 125m, = unter Strassenplanie

1	10	59	1175	+ 5,1315	0,76	0,57	0,70	381,3189

812. □ 0,02m unter Pl auf dem südl. Gesimsstein der Stützmauer für die Westseite des Bahnkörpers bei St 8,6 + 313m

2	5	56	559	+ 0,3495	0,45	0,20	0,60	381,6684

813. Offner Bahndurchlass bei St 9,0 + 1m, nördl. Widerlager, östl. Stirnflügeldeckplatte, □ Pl

3	12	49	1174	— 1,7238	0,62	0,39	0,57	379,9446

814. □ auf der bayr. Drehscheibe in Kufstein, nördl. der Locomotivremise, Nordwestseite der Kranzmauer, Pl

4	5	58	582	— 0,5561	0,41	0,17	0,54	379,3885

815. ⊙ an der Locomotivremise in Kufstein, Westseite gegen die Bahn hin, zwischen Fenster und nördl. Ecke

5	1	29	58	— 1,8054	0,14	0,02	0,59	377,5831

Rosenheim — Salzburg.

Rosenheim — Stephanskirchen.

785. ⌂ auf der eisernen Fischbauchträgerbrücke Nr. VI für den Werkkanal der Mangfall (Hammerbach), östl. Widerlager, südl. Stirnflügel, östl. Gesimsstein, bei St 19,7 + 338m

415,0568

816. Gewölbte Bahnbrücke Nr. VIII mit 5 Oeffnungen über das Fluthbett des Inn (Giesengraben) auf der Salzburger Bahn, südl. Stirn, westl. Brüstungsstein, ⌂ 0,35m über Pl bei St 19,9 + 250m

1	7	54	753	— 1,4992	0,26	0,07	0,30	413,5576

817. Gewölbte Bahnbrücke Nr. I mit 7 Oeffnungen über den Inn, nordöstliches Widerlager, südöstlicher vorspringender Stirnflügel, nordöstl. Quader der unteren Brüstungsschichte, □ 0,35m über Pl bei St 20,1 + 205m

2	5	68	679	— 4,5166	0,42	0,18	0,51	409,0410

Rosenheim — Salzburg.

Nr	A	J	Z	D	± H	w	w^2	w'	Cote
818.	Offner Bahndurchlass Nr. X, nordöstl. Widerlager, oberster Deckstein des nordwestl. Böschungsflügels, □ Pl bei St 20,9 + 213m								
	3	22	68	3003	—24,1215	0,74	0,54	0,42	384,9195
819.	⊙ am Betriebsgebäude zu Stephanskirchen, Südostseite am Perron, Südwestecke, 1,90m über Pl								
	4	7	75	1053	— 5,3683	0,39	0,16	0,38	379,5512
	Stephanskirchen — Endorf — Prien.								
820.	Offner Bahndurchlass Nr. IV, nordöstl. Widerlager, Gesimsstein des nordwestl. Stirnflügels, = Pl bei St 21,6 + 35m								
	1	11	68	1506	+ 4,4023	0,72	0,52	0,59	383,9535
821.	Gewölbte Bahndurchfahrt Nr. VII, = auf der nordwestl. Brüstung 0,47m über Pl bei St 22,9 + 10m								
	2	37	64	4783	—13,1177	1,20	1,44	0,55	370,8358
822.	Bahngrenzstein nördl. der Bahn, = bei St 23,8 + 130m								
	3	31	56	3460	—30,6515	1,03	1,05	0,55	340,1843
823.	⊙ am Betriebsgebäude zu Endorf, Südwestseite am Perron, nordwestl. Ecklisene des Mittelbaues, 1,84m über Pl								
	4	7	38	534	— 5,8079	0,20	0,04	0,27	334,3764
824.	Gewölbte Bahnbrücke Nr. III mit 4 Oeffnungen über die Prien, westl. Stirn, □ auf der Brüstung 0,35m über Pl bei St 25,7 + 335m								
	1	56	60	6744	+ 0,5888	1,49	2,21	0,57	334,9652
825.	= auf dem Bahngrenzstein östl. der Bahn bei St 26,0 + 150m								
	2	8	55	884	— 1,6202	0,52	0,27	0,55	333,3450
826.	⊙ am Betriebsgebäude zu Prien, Nordostseite am Perron, Mitte des Mittelbaues, 1,82m über Pl bei St 26,2 + 100m								
	3	6	56	675	— 4,6857	0,36	0,13	0,43	328,6593
	Prien — Bernau — Uebersee.								
827.	□ unter der Höhenmarke zu Bernau, in den westl. Randstein der Vorhalle gehauen, 0,32m über Pl								
	1	45	58	5203	+ 7,7719	1,41	1,98	0,62	336,4312
828.	⊙ am Betriebsgebäude zu Bernau, Nordseite am Perron, Westecke								
					— 1,5305				334,9007

Rosenheim — Salzburg.

Nr	A	J	Z	D	± H	w	w^2	w'	Cote
829.	Offner Bahndurchlass Nr. I über den Neumüllerbach, westl. Widerlager, südl. Stirnflügel, westl. Gesimsstein, □ 0,06^m unter Pl bei St 28,2 + 255^m								
	1	20	61	2434	— 6,4230	0,61	0,38	0,39	330,0082
830.	Gewölbte Bahnbrücke Nr. VI mit 5 Oeffnungen über die Ueberseeer Achen, nördl. Stirn, □ auf dem östl. Brüstungsstein 0,36^m über Pl und 0,95^m über Bahnhof-Pl. bei St 29,6 + 315^m								
	2	40	66	5249	+ 4,0633	0,98	0,97	0,43	334,0715
831.	= auf der Treppenstufe unter der Höhenmarke zu Uebersee								
	3	5	53	526	+ 0,3074	0,36	0,13	0,50	334,3789
832.	⊙ am Betriebsgebäude zu Uebersee, Nordseite am Perron, Mittelbau, östl. neben der Thür zum Wartesaal								
					— 1,4539				332,9250

Uebersee — Bergen — Traunstein.

833.	Gewölbte Bahnbrücke Nr. IV mit 3 Oeffnungen über den Rothgraben, zugleich ür das Hochwasser der Grossachen, südl. Stirn, □ auf der Brüstung 0,93^m füber Pl bei St 30,3 + 24^m								
	1	16	56	1793	— 1,1794	0,90	0,80	0,67	333,1995
834.	Offner Bahndurchlass Nr. VI, östl. Widerlager, Gesimsstein des nördl. Stirnflügels, □ 0,04^m unter Pl bei St 30,8 + 235^m								
	2	16	65	2066	—16,7979	0,88	0,78	0,61	316,4016
835.	Gewölbte Bahndurchfahrt Nr. I für den Weg von Grabenstädt nach Bergen, nördl. Stirn, Brüstungsstein bei dem westl. Stirnflügel, □ 0,38^m über Pl bei St 31,0 + 335^m								
	3	7	60	833	— 8,8690	0,30	0,09	0,32	307,5326
836.	Bahngrenzstein südl. der Bahn, westl. der Ueberfahrt Nr. 12, □ bei St 31,6 + 280^m								
	4	18	60	2177	—20,6367	0,91	0,82	0,61	286,8959
837.	□ auf der Umfassungsmauer der Wage in der Station Bergen, Nordwestecke, Pl								
	5	11	62	1366	—10,7236	0,60	0,35	0,51	276,1723
838.	⊙ an der Wegbrücke Nr. II östlich der Station Bergen, südl. Pfeiler, Nordseite gegen die Bahn bei St 32,1 + 140^m								
	6	3	60	363	— 3,7741	0,50	0,25	0,83	272,3982

Rosenheim — Salzburg.

Nr	A	J	Z	D	± H	w	w^2	w'	Cote
839.	Gewölbte Bahndurchfahrt Nr. VII mit 3 Oeffnungen für die Strasse Vachendorf-Siegsdorf, Nordwestl. Stirnflügel des südwestl. Widerlagers, nordöstl. Brüstungsstein, □ 0,35^m über Pl bei St 32,6 + 345^m								
	1	17	61	2058	— 9,0115	0,94	0,89	0,66	263,3867
840.	⊙ an der Wegbrücke Nr. I, nordwestl. Pfeiler, Südwestseite gegen die Bahn, im Nagelfluhsockel, bei St 33,0 + 120^m								
	2	13	48	1261	—13,3353	0,44	0,19	0,39	250,0514
841.	Bahngrenzstein westl. der Bahn, □ bei St 33,2 + 125^m								
	3	7	54	752	+ 0,5445	0,33	0,11	0,38	250,5959
842.	Offner Bahndurchlass Nr. III bei Hasslach, südl. Widerlager, Gesimsstein der westl. Stirn, □ Pl bei St 33,4 + 80^m								
	4	7	49	697	+ 2,0011	0,26	0,07	0,31	252,5970
843.	Offner Bahndurchlass Nr. IV am Südwestende der Station Traunstein, südw. Widerlager, Gesimsstein des nordw. Stirnflügels, □ Pl bei St 33,7 + 320^m und 0,27^m über Bahnhofplanie								
	5	11	62	1361	+11,2364	0,69	0,47	0,59	263,8334
844.	⊙ am Betriebshauptgebäude zu Traunstein, Nordwestseite am Perron, südw. der Thür zum Wartesaal 3. Cl.								
	6	2	71	282	— 1,6886	0,28	0,08	0,52	262,1448

Traunstein — Lauter — Teisendorf.

845.	Gewölbte Bahnbrücke und Durchfahrt Nr. I mit 5 Oeffnungen über die Traun, südw. Widerlager, südw. Gesimsquader des nordw. Stirnflügels, Cementplatte ⏢ innen an der Brüstung bei St 34,0 + 125^m Pl und 1,02^m unter Bahnhof-Pl								
	1	5	64	638	+ 2,9691	0,42	0,18	0,53	265,1139
846.	Bahngrenzstein nördl. der Bahn und dem Feldweg, □ bei St 34,4 + 40^m								
	2	11	64	1406	—12,0914	0,85	0,73	0,72	253,0225
847.	Bahngrenzstein nördl. der Bahn gegenüber dem offenen Bahndurchlass Nr. V, □ 0,74^m unter Pl bei St 34,7 + 105^m								
	3	10	60	1185	— 7,0020	0,53	0,28	0,49	246,0205
848.	Offner Bahndurchlass Nr. VI, südwestl. Widerlager, Gesimsstein der nordwestl. Stirn, □ 0,04^m unter Pl bei St 34,8 + 130^m								
	4	4	51	406	— 4,6946	0,41	0,17	0,65	241,3259

Nr	A	J	Z	D	± H	w	w^2	w'	Cote
849.	Offner Bahndurchlass Nr. I, westl. Widerlager, westl. Gesimsstein des nördl. Stirnflügels, □ 0,05^m unter Pl bei St 35,0 + 240^m								
	5	6	71	849	+ 0,7973	0,45	0,21	0,49	242,1232
850.	⊙ an der Wegbrücke Nr. V am Südwestende der Station Lauter, im Sockel des nordwestl. Widerlagers, bei St 35,4 + 235^m								
	6	12	72	1481	+10,5800	0,70	0,48	0,57	252,7032
851.	□ auf der untersten Treppenstufe am Stationsgebäude zu Lauter, Südwestseite, etwa 0,40^m über Pl bei St 35,4 + 315^m								
	7	1	41	82	+ 1,8812	0,17	0,03	0,59	254,5844
852.	Gewölbter Bahndurchlass Nr. VII, nördl. Stirn, östl. Gesimsstein, ⌓ 0,04^m unter Pl bei St 35,8 + 105^m								
	1	10	64	1275	+10,9365	0,61	0,38	0,54	265,5209
853.	Gewölbter Bahndurchlass Nr. IX, Gesimsstein der südl. Stirn, □ 0,07^m unter Pl bei St 35,9 + 340^m								
	2	5	61	610	+ 6,0397	0,63	0,39	0,80	271,5606
854.	Wegbrücke Nr. II bei St 36,2 + 210^m, ⊙ im nördl. Widerlager, auf der westl. Stirnseite, im letzten Gesimsquader des Sockels								
	3	8	61	983	+ 7,8123	0,64	0,41	0,64	279,3729
855.	Cementplatte in dem offenen Bahndurchlasse Nr. V, westl. Widerlager, Gesimsstein des nördl. Stirnflügels, ⌓ 0,02^m unter Pl bei St 36,6 + 185^m								
	4	13	58	1514	+16,5365	0,47	0,22	0,38	295,9094
856.	⌓ auf der südwestl. Brüstung der gewölbten Bahndurchfahrt Nr. III, 0,46^m über Pl bei St 37,3 + 225^m								
	5	21	63	2638	+27,2262	0,83	0,69	0,51	323,1356
857.	Bahngrenzstein Nr. 45 südl. der Bahn, □ bei St 37,7 + 20^m								
	6	11	58	1277	+13,2526	0,43	0,19	0,38	336,3882
858.	Gewölbte Bahnbrücke Nr. II mit 3 Oeffnungen über die grosse Sur, südöstl. Widerlager, nordöstl. ausspringender Stirnflügel, nordwestl. Quader der unteren Brüstungsschichte, □ 0,36^m über Pl bei St 38,1 + 365^m								
	7	17	54	1836	+19,7121	0,74	0,54	0,54	356,1003
859.	⊙ am Betriebsgebäude zu Teisendorf, Nordostseite am Perron, Mitte des Mittelbaues								
	8	4	56	449	— 0,3611	0,33	0,11	0,48	355,7392

Rosenheim — Salzburg.

Nr	A	J	Z	D	± H	w	w^2	w'	Cote

Teisendorf — Freilassing.

860. Südostseite der Umfassungsmauer der Drehscheibe im Bahnhof Teisendorf, □ in Stationsplanie zwischen dem senkrecht abzweigenden Schienengeleis

1	2	46	184	+ 2,0449	0,11	0,01	0,26	357,7841

861. Bahngrenzstein Nr. 133 südl. der Bahn, = bei St 38,6 + 40m

2	8	57	916	+ 7,6487	0,40	0,16	0,42	365,4328

862. Gewölbter Bahndurchlass Nr. I, nördl. Stirn, östl. Gesimsstein, ▱ 0,06m unter Pl bei St 39,0 + 12m

3	12	61	1457	+14,5700	0,81	0,66	0,67	380,0028

863. = auf einem Findling südl. der Bahn bei St 39,5 + 90m

4	14	70	1941	+13,4085	0,75	0,56	0,49	393,4113

864. ⊙ an der Wegbrücke Nr. VII auf der Südseite des nördl. Pfeilers

5	8	70	1115	+ 9,8189	0,92	0,84	0,87	403,2302

865. Offner Bahndurchlass Nr. II, östl. Widerlager, oberster Deckstein des nördl. Böschungsflügels, □ Pl bei St 40,1 + 0m

6	8	64	1019	+11,4102	0,87	0,76	0,86	414,6404

866. Gewölbte Bahnbrücke und Durchfahrt Nr. IV mit 3 Oeffnungen über die kleine Sur, Brüstungsstein der nördl. Stirn, Cementplatte ▱ 0,38m über Pl bei St 40,4 + 70m

7	10	59	1185	+11,3589	0,64	0,40	0,58	425,9993

867. Gedeckter Wegdurchlass Lit C für den südl. Bahngraben, westl. Stirn, □ wenig über Pl bei St 40,7 + 158m

8	9	68	1218	+ 5,0111	0,83	0,69	0,75	431,0104

868. Cementplatte auf dem gewölbten Bahndurchlass Nr. VII, Gesimsstein der nördl. Stirn, ▱ 0,04m unter Pl bei St 40,8 + 315m

9	5	52	524	+ 2,2432	0,41	0,17	0,57	433,2536

869. Gedeckter Wegdurchlass Lit. A für den südl. Bahngraben, östl. Stirn, □ wenig über Pl bei St 41,1 + 280m

10	13	42	1079	+ 3,0513	0,69	0,48	0,67	436,3049

870. Grosse Drehscheibe am Westende des Bahnhofes Freilassing, □ Pl in dem südöstl. abzweigenden Geleise auf der Umfassungsmauer des Einsteigschachtes bei 41,4 + 90m

11	8	58	925	+ 3,9526	0,43	0,19	0,45	440,2575

Rosenheim — Salzburg.

Nr	A	J	Z	D	± H	w	w^2	w'	Cote
871.	⊙ am Betriebsgebäude der Station Freilassing, Nordseite am Perron, an der Westecke des Mittelbaues zwischen der Thür zur Expedition und dem Eckfenster.								
	12	3	53	320	— 2,2257	0,29	0,09	0,53	438,0318

Freilassing — Salzburg.

872.	Gewölbte Bahnbrücke Nr. I östl. von Station Freilassing, Brüstungsstein der nördl. Stirn, Cementplatte 0,39^m über Pl, ⏢ bei St 41,5 + 355^m								
	1	3	54	323	+ 1,8854	0,38	0,15	0,67	439,9172
873.	Gewölbte Bahnbrücke Nr. II mit 2 Oeffnungen, Brüstungsstein der nördl. Stirn, □ 0,39^m über Pl bei St 41,6 + 330^m								
	2	3	58	346	— 0,5278	0,61	0,38	1,04	439,3894
874.	Gewölbte Bahnbrücke Nr. III mit 6 Oeffnungen über die Saalach, westl. Widerlager, westl. Gesimsstein des nördl. Stirnflügels, Cementplatte innen an der Brüstung, ⏢ Pl bei St 41,8 + 1^m								
	3	3	60	358	— 0,0304	0,44	0,19	0,73	439,3590
875.	Blechbalkenbrücke Nr. IV mit 1 Oeffnung für den Mühlbach, südöstl. Widerlager, Cementplatte auf einem Deckstein des nordöstl. Stirnflügels, ⏢ Pl oder 0,2^m darüber bei St 41,9 + 160^m								
	4	4	66	532	— 0,0208	0,48	0,23	0,66	439,3382
876.	Gitterbrücke Nr. II mit 1 Oeffnung über den Glaubach, südöstl. Widerlager, nordw. Gesimsstein des nordöstl. Stirnflügels, Cementplatte ⏢ Pl oder 0,2^m darüber bei St 42,7 + 195^m								
	5	23	66	3031	— 1,4079	0,85	0,73	0,49	437,9303
877.	Blechträgerbrücke Nr. II mit 5 Oeffnungen über die Salzach, öst. Widerlager, ⊙ an der Südseite des nördl. Eckthurmes bei St 43,0 + 340^m								
	6	10	64	1285	— 2,0905	0,60	0,36	0,53	435,8398
878.	Schiefe offene Bahndurchfahrt Nr. III mit Blechträgern über die Strasse nach Braunau und Hauptzufuhrstrasse zum Bahnhof. Nordöstl. Widerlager, nordw. Stirnflügel, Cementplatte innen an der Brüstung, ⏢ Pl bei St 43,1 + 300^m								
	7	3	53	319	+ 2,2754	0,28	0,08	0,49	438,1152

Kahl — Aschaffenburg.

Nr	A	J	Z	D	± H	w	w^2	w'	Cote

Kahl — Dettingen — Kleinostheim.

879. ⊙ am Betriebsgebäude der Station Kahl, nahe der bayr. Landesgrenze, Nordostseite am Perron, zwischen den beiden Thüren 748,5822

880. = unter der Höhenmarke, in die untere Einfassung der Kellerlucke gehauen, 0,46^m über Pl
— 1,6252 750,2074

881. Fixpunkt des churhessischen Präcisionsnivellements auf dem Sockel an der Ostecke des Betriebsgebäudes*)
a) höhere Innenkante des Sockels
— 1 — — — 0,1181 0,10 0,01 — 750,0893
b) Aussenkante des Sockels
+ 0,0066 750,0959

882. Fixpunkt des churhessischen Präcisionsnivellements auf dem Sockel an der Nordecke des Betriebsgebäudes
a) höhere Innenkante des Sockels
— 1 — — — 0,1174 0,10 0,01 — 750,0900
b) Aussenkante des Sockels
+ 0,0057 750,0957

883. Gewölbter Bahndurchlass Nr. IV für den Kahlbach, nordöstl. Stirn, südöstl. Brüstungsstein, □ 0,36^m über Pl bei St 28,4 + 350^m
2 8 47 753 — 1,1676 0,35 0,12 0,40 749,0398

884. Gewölbte Bahnbrücke Nr. I mit 1 Oeffnung südöstlich Station Dettingen, nordöstl. Stirn, nordw. Brüstungsstein, □ 0,35^m über Pl (Stationsplanie) bei St 27,3 + 82^m
1 38 57 4351 + 0,0847 1,18 1,40 0,57 749,1245

---

*) Anmerk. Nach einer Mittheilung des Herrn Professor Börsch aus Berlin 21. November 1871 sind die Punkte 881^a und 882^a in das churhessische Nivellement eingeschlossen und für dieselben die gemeinsame Cote von 56,9426 Toisen = 110,9832^m über dem Nullpunkt des Pegels zu Swinemünde vorläufig berechnet worden. Das Mittel unserer Coten für diese Punkte beträgt 750,0897^m und addirt man dazu die churhessische Cote 110,9832^m, so ergibt sich die vorläufig berechnete Lage des bayerischen Eisenbahnhorizontes über der mittleren Stettiner Meereshöhe zu 861,0729^m.

Kahl — Aschaffenburg.

Nr	A	J	Z	D	± H	w	w^2	w'	Cote
885.	Gewölbter Bahndurchlass Nr. II, westl. Stirn, nördl. Gesimsstein, = 0,59m unter Pl des Bahnhofs Kleinostheim bei St 26,1 + 330m, nahe dem Nordende des Bahnhofes								
	2	37	57	4221	— 2,4249	1,25	1,56	0,61	746,6996
886.	⊙ an dem Aquaeduct Nr. II mit 3 Oeffnungen über die Bahn, südl. der Station Kleinostheim, Ostseite des westl. Pfeilers, bei St 25,9 + 148m								
	1	10	45	926	— 2,6548	0,47	0,22	0,48	744,0448

Kleinostheim — Aschaffenburg.

887.	Gewölbte Bahnbrücke Nr. I mit 2 Oeffnungen über die Aschaff, nördl. Stirn, westl. Brüstungsstein, □ 0,29m über Pl bei St 25,0 + 195m								
	3	25	66	3290	— 3,4730	0,99	0,97	0,54	740,5718
888.	□ auf der grossen Drehscheibe vor der Locomotivremise am Westende des Bahnhofes Aschaffenburg, Nordwestseite der Kranzmauer Pl								
	2	14	63	1758	— 7,8968	0,75	0,57	0,57	732,6750
889.	□ unter der Höhenmarke zu Aschaffenburg, in den Sockel gehauen								
	1	6	44	526	— 0,7801	0,31	0,10	0,43	731,8949
890.	⊙ am Betriebshauptgebäude zu Aschaffenburg, Perronseite in der Mitte des Mittelbaues*)								
					— 1,5141				730,3808

Aschaffenburg — Gemünden — Würzburg.

Aschaffenburg — Laufach — Heigenbrücken.

889.	□ im Sockel unter der Höhenmarke zu Aschaffenburg								
									731,8949
891.	Gedeckter Durchlass für den südl. Bahngraben in der Station, □ bei St 24,0+45m etwa Pl								
	1	2	62	250	+ 0,6571	0,55	0,30	1,10	732,5520

*) Anmerk. Zwischen Aschaffenburg und Kahl ist die Stundenzählung noch auf die ehemalige Lage des Würzburger Bahnhofes bezogen, zwischen Würzburg und Aschaffenburg geht die Zählung von der Mitte des neuen Bahnhofes aus, welcher um 990m näher an Aschaffenburg liegt.

Aschaffenburg — Gemünden — Würzburg.

Nr	A	J	Z	D	± H	w	w^2	w'	Cote
892.	Gewölbter Bahndurchlass Nr. V, Gesimsstein der südöstl. Stirn, □ 0,06^m unter Pl bei St 23,4 + 145^m								
	2	18	59	2112	— 8,2428	0,63	0,40	0,43	724,3092
893.	Gewölbte Bahndurchfahrt Nr. III, nördl. Stirn, westl. Brüstungsstein, □ 0,36^m über Pl bei St 22,3 + 210^m								
	3	32	63	4022	—20,4392	0,92	0,84	0,46	703,8700
894.	Gewölbter Bahndurchlass Nr. XI, südl. Stirn, westl. Brüstungsstein, □ 0,39^m über Pl bei St 21,7 + 368^m								
	4	16	65	2066	— 8,9322	0,69	0,48	0,48	694,9378
895.	Offne Bahndurchfahrt Nr. V südwestl. vom Bahnhof Laufach in der Stationshöhe, nordöstl. Widerlager, südöstl. Stirnflügel, nordöstl. Gesimsstein, □ innen an der Brüstung bei St 21,3 + 165^m Pl								
	5	16	54	1718	— 7,1195	0,75	0,56	0,57	687,8183
896.	Südseite der grossen Drehscheibe vor dem Maschinenhaus in der Station Laufach, □ auf der Kranzmauer Pl								
	6	2	49	194	— 0,1030	0,27	0,07	0,61	687,7153
897.	Gewölbte Bahnbrücke Nr. I, südl. Stirn, östl. Brüstungsstein, □ 0,35^m über Pl bei St 21,0 + 125^m								
	1	9	53	954	— 5,0293	0,45	0,20	0,46	682,6860
898.	Gewölbte Bahnbrücke und Durchfahrt Nr. XIII, südl. Stirn, östl. Stein der unteren Brüstungsschichte, □ 0,35^m über Pl bei St 20,9 + 0^m								
	2	6	42	506	—10,1628	0,37	0,14	0,53	672,5232
899.	Gewölbter Bahndurchlass Nr. VIII, südl. Stirn, östl. Gesimsstein, □ 0,06^m unter Pl bei St 20,5 + 338^m								
	3	12	43	1151	—22,5861	0,44	0,19	0,41	649,9371
900.	Gedeckter Bahndurchlass Nr. VIII, südöstl. Stirn, nordöstl. Gesimsstein, □ 0,08^m unter Pl (Stollenplanie) bei St 19,7 + 50^m								
	4	34	43	3235	—64,3502	0,94	0,88	0,52	585,5869
—	Deckstein des südöstl. Dohlenschachtes vor dem südwestl. Tunnelportal, = auf der Spitze des flach pyramidalen Steins bei St 19,6 + 328^m (nicht von Bestand)								
	5	1	50	100	— 0,1832	0,13	0,02	0,42	585,4037

Aschaffenburg — Gemünden — Würzburg.

Nr	A	J	Z	D	± H	w	w^2	w'	Cote
901.	⊙ an der südöstl. Lisene des südwestl. Tunnelportals bei St 19,6 + 295m. Das Nivellement zwischen den Höhenmarken beider Stollenportale wurde doppelt ausgeführt								
	6	1	18	36	— 1,4567	0,20	0,04	—	583,9470
902.	Gewölbte Bahnbrücke Nr. VI dicht westl. vom Stationsgebäude zu Heigenbrücken, nordwestl. Stirn, südw. Gesimsstein, □ innen an der Brüstung bei St 19,3 + 320m, Bahnhofplanie								
	7	10	55	1093	+ 0,1493	0,42	0,18	0,41	585,5530
903.	⊙ an der nordwestl. Lisene des nordöstl. Tunnelportals bei St 19,4 + 100m								
	8	1	68	136	— 1,5937	0,13	0,02	—	583,9593

Heigenbrücken — Partenstein — Lohr.

904.	Gewölbte Bahnbrücke Nr. III mit 3 Oeffnungen über den Aubach, nordwestl. Stirn, südwestl. Brüstungsstein, □ 0,35m über Pl bei St 18,2 + 195m								
	1	32	66	4227	+21,3742	1,11	1,24	0,54	606,9272
905.	Gewölbte Bahndurchfahrt Nr. VIII, nordwestl. Stirn, südwestl. Brüstungsstein, □ 0,34m über Pl bei St 16,7 + 300m								
	2	41	67	5459	+29,8318	1,53	2,34	0,65	636,7590
906.	Gewölbte Bahnbrücke Nr. VII mit 3 Oeffnungen über das Thal der Lohr, nördl. Stirn, □ auf der unteren Brüstungslage 0,30m über Pl, an der östl. einspringenden Ecke der Brüstung bei St 15,6 + 290m								
	3	28	73	4100	+22,7376	0,90	0,81	0,45	659,4966
907.	□ auf der Umfassungsmauer der Wage in der Station Partenstein, Nordseite, Pl								
	4	3	60	360	+ 1,2064	0,53	0,28	0,88	660,7030
908.	Gedeckter Bahndurchlass Nr. X, westl. Gesimsstein der südl. Stirn, □ 0,06m unter Pl bei St 14,7 + 90m								
	1	27	59	3178	+17,7522	0,83	0,70	0,47	678,4552
909.	Gedeckter Bahndurchlass Nr. VI, südw. Stirn, südöstl. Gesimsstein, □ 0,04m unter Pl bei St 14,2 + 270m								
	2	16	53	1682	+ 8,2871	0,50	0,25	0,38	686,7423
910.	Schiefe Blechbalkenbrücke Nr. X in der Station Lohr, am Westende. Nordöstl. Widerlager, nordwestl. Stirnflügel, südwestl. Deckstein, □ auf Bahnhof-Pl bei St 13,9 + 40m								
	3	13	52	1349	+ 6,4652	0,62	0,38	0,53	693,2075

Aschaffenburg — Gemünden — Würzburg.

Nr	A	J	Z	D	± H	w	w^2	w'	Cote
911.	□ auf der Treppenwange unter der Höhenmarke in Lohr								
	4	2	49	196	— 0,7422	0,20	0,04	0,46	692,4653
912.	⊙ am Betriebsgebäude der Station Lohr, Südseite gegen die Strasse, westlich neben der westl. Thür								
					— 0,5896				691,8757

Lohr — Gemünden.

913.	Offne Bahndurchfahrt Nr. IV mit Blechträgern, nordöstl. Widerlager, nordwestl. Wangenstein (neben dem Auflager der Eisenconstruction) □ Pl bei St 13,4 + 215^m								
	1	12	62	1499	+ 6,2046	0,64	0,41	0,53	698,6699
914.	Gedeckter Bahndurchlass Nr. XV, Deckplatte der nordöstl. Stirn, □ 0,06^m unter Pl bei St 11,9 + 290^m								
	2	47	59	5500	+ 5,3168	1,26	1,60	0,54	703,9867
915.	Gewölbte Bahnbrücke Nr. VIII mit 7 Oeffnungen über die Sinn und Saale, nördl. Stirn, östl. Brüstungsstein bei dem ausspringenden Stirnflügel des östl. Widerlagers, □ 0,35^m über Pl bei St 10,4 + 135^m								
	3	35	79	5558	— 2,8411	1,18	1,39	0,50	701,1456
916.	□ auf der Drehscheibe im Bahnhof Gemünden, Nordostseite der Kranzmauer, Pl								
	4	6	66	795	+ 0,5437	0,35	0,12	0,40	701,6893
917.	⊙ am alten Betriebshauptgebäude (1871) der Station Gemünden, Südseite am Perron, westl. Eckpfeiler am Mittelbau								
	5	1	34	68	— 1,8756	0,14	0,02	0,53	699,8137

Gemünden — Wernfeld — Karlstadt.

918.	Gewölbte Bahnbrücke Nr. IV mit 2 Oeffnungen über die Wern, südl. der Station Wernfeld, östl. Stirn, südl. Brüstungsstein, □ 0,35^m über Pl bei St 9,2 + 126^m								
	1	28	68	3847	— 0,9215	0,95	0,89	0,48	700,7678
919.	Bahnbrücke Nr. III mit Blechträgern, nordöstl. Widerlager, nordwestl. Stirn, Gesimsstein auf der Wange neben dem Auflager der Eisenconstruction, □ Pl bei St 9,1 + 162^m								
	1	3	54	325	+ 0,3404	0,28	0,08	0,49	701,1082
920.	Gewölbte Bahndurchfahrt und Fluthbrücke Nr. VI, östl. Stirn, südl. Brüstungsstein, □ 0,35^m über Pl bei St 8,8 + 98^m								
	2	11	54	1185	— 0,6556	0,72	0,52	0,66	700,4526

Aschaffenburg — Gemünden — Würzburg.

Nr	A	J	Z	D	± H	w	w^2	w'	Cote
921.	Gedeckter Bahndurchlass Nr. III, nordöstl. Stirn, südöstl. Deckstein, □ 0,06^m unter Pl bei St 8,3 + 344^m								
	3	11	73	1607	— 1,0347	0,89	0,78	0,70	699,4179
922.	Gewölbte Bahnbrücke Nr. IX, nördl. Stirn, östl. Böschungsflügel, □ 0,16^m unter Pl bei St 7,8 + 210^m								
	4	15	66	1986	+ 0,4224	0,85	0,72	0,60	699,8403
923.	Gedeckter Bahndurchlass Nr. III mit 2 Oeffnungen, Gesimsstein der nordöstl. Stirn, □ 0,05^m unter Pl bei St 7,1 + 154^m								
	5	18	74	2646	— 1,3127	0,71	0,51	0,44	698,5276
924.	□ auf der oberen Treppenstufe unter der Höhenmarke zu Karlstadt								
	6	18	60	2154	— 3,1685	0,45	0,21	0,31	695,3591
925.	⊙ am Betriebsgebäude zu Karlstadt, Südwestseite gegen die Stadt, an dem Sandsteinpfeiler zwischen beiden Thüren								
					— 1,3964				693,9627

Karlstadt — Retzbach.

926.	Offner Bahndurchlass Nr. IV, südöstl. Widerlager, nordöstl. Stirnflügel, südöstl. Decktsein, □ Pl bei St 6,4 + 245^m								
	1	3	59	353	+ 0,8674	0,08	0,01	0,13	696,2265
927.	= auf dem Bahngrenzstein südwestl. der Bahn bei St 4,5 + 345^m								
	2	47	74	6973	— 2,7736	1,03	1,06	0,39	693,4529
928.	Gewölbter Bahndurchlass Nr. VI im Bahnhof Retzbach, nordöstl. Stirn, südöstl. Stein der unteren Brüstungslage, □ 0,35^m über Pl bei St 4,4 + 226^m								
	3	5	48	484	— 0,2016	0,30	0,09	0,43	693,2513
929.	= auf der Treppenwange unter der Höhenmarke zu Retzbach								
	4	1	32	65	— 0,2252	0,10	0,01	0,39	691,0261
930.	⊙ am Betriebsgebäude zu Retzbach, Nordostseite gegen die Strasse, nordw. neben dem Eingang								
					— 1,2128				689,8133

Retzbach — Thüngersheim — Veitshöchheim — Würzburg.

931.	Gewölbte Bahnbrücke Nr. II mit 1 Oeffnung über die Retz, nordöstl. Stirn, südöstl. Stein der unteren Brüstungsstufe, □ 0,35^m über Pl bei St 4,2 + 195^m								
	1	7	55	776	+ 0,7606	0,56	0,32	0,64	694,0119

Aschaffenburg — Gemünden — Würzburg.

Nr	A	J	Z	D	± H	w	w^2	w'	Cote
932.	Gewölbter Bahndurchlass Nr. V, südwestl. Stirn, südöstl. Gesimsstein, □ 0,07^m unter Pl bei St 3,8 + 87^m								
	2	14	57	1604	+ 0,1391	0,85	0,72	0,67	694,1510
933.	Gewölbter Bahndurchlass Nr. III nordwestlich der Station Thüngersheim, südw. Stirn, nordw. Gesimsstein, □ 0,06^m unter Pl bei St 3,4 + 310^m (Bahnhofplanie)								
	3	8	79	1268	— 0,5080	0,56	0,32	0,50	693,6430
934.	Gedeckter Bahndurchlass Nr. XII mit 3 Oeffnungen. Südw. Stirn, Deckstein des nordw. Böschungsflügels, □ 0,06^m unter Pl bei St 2,9 + 0^m								
	1	15	72	2170	— 0,8070	0,58	0,34	0,39	692,8360
935.	Gewölbter Bahndurchlass Nr. IV. Gesimsstein der nordöstl. Stirn, = unter Pl bei St 2,2 + 0^m								
	2	23	57	2607	— 4,6174	1,09	1,19	0,68	688,2186
936.	Drehscheibe im Bahnhof Veitshöchheim, □ auf der Südostseite der Kranzmauer Pl								
	3	10	58	1145	— 5,1966	0,27	0,07	0,25	683,0220
937.	Gewölbter Bahndurchlass Nr. IV, südwestl. Stirn, nordwestl. Gesimsstein, □ 0,05^m unter Pl bei St 1,3 + 205^m								
	1	14	67	1999	+ 2,2775	0,61	0,37	0,43	685,2995
938.	Gedeckter Bahndurchlass Nr. X mit 2 Oeffnungen, südw. Stirn, südöstl. Gesimsstein, □ 0,04^m unter Pl bei St 0,9 + 155^m								
	2	11	70	1543	+ 2,8856	0,69	0,47	0,55	688,1851
939.	Gewölbter Bahndurchlass Nr. VI, südl. Stirn, westl. Gesimsstein, □ 0,07^m unter Pl bei St 0,4 + 113^m								
	3	15	63	1896	+ 0,1782	1,02	1,05	0,74	688,3633
940.	Regeneinlauf neben dem Wasserkrahn bei dem Maschinenhaus westlich vom Betriebshauptgebäude zu Würzburg, = auf dem südl. Rand Pl								
	4	10	64	1283	— 7,6936	0,64	0,40	0,56	680,6697
941.	⊙ am Betriebshauptgebäude des neuen Bahnhofes zu Würzburg, westlicher Flügelbau, östl. Hausteinlisene auf der Perronseite (Nordseite)								
	5	2	55	219	— 2,1983	0,14	0,02	0,29	678,4714

Würzburg — Schweinfurt — Bamberg.

Nr	A	J	Z	D	± H	w	w^2	w'	Cote

Würzburg — Rottendorf.

941. ⊙ am Betriebshauptgebäude des neuen Bahnhofs zu Würzburg 678,4714

942. Blechbalkenbrücke und Durchfahrt Nr. 28 und 29 mit 2 Oeffnungen, südöstl. Widerlager, südw. Stirn, □ auf der niederen Brüstung 0,35^m über Pl bei St 26,7 + 25^m (von Bamberg aus gerechnet)

1	10	59	1184	— 2,9788	0,59	0,35	0,54	675,4926

943. ⊙ an der gewölbten Wegbrücke für die Staatsstrasse Würzburg—Kitzingen, auf der Ansbach-Würzburger Bahnlinie, östl. Widerlager, Mitte der Flucht

—	8	42	664	— 8,5205	0,24	0,06	0,29	666,9721

944. Gewölbter Bahndurchlass bei St 26,5 + 360^m, westl. Gesimsstein der nördl. Stirn, = unter Pl

2	4	53	420	— 3,5640	0,32	0,10	0,49	671,9286

945. □ unter der Höhenmarke an der gewölbten Wegbrücke Nr. VIII für die Staatsstrasse Würzburg—Kitzingen, auf der Würzburg—Bamberger Bahn. Deckstein der Dohle, Pl

3	29	52	2999	—30,7678	1,22	1,48	0,70	641,1608

946. ⊙ an der gewölbten Wegbrücke Nr. VIII für die Staatsstrasse Würzburg—Kitzingen, auf der Würzburg—Bamberger Bahnlinie. Westl. Ecke des nördl. Widerlagers

				— 1,5124				639,6484

947. Gewölbte Bahndurchfahrt Nr. III, südöstl. Stirn, nordöstl. Stein der unteren Brüstungslage, □ 0,29^m über Pl bei St 25,1 + 334^m

4	18	58	2079	—17,4165	0,78	0,61	0,54	623,7443

948. □ auf der Umfassungsmauer der Wage in der Station Rottendorf, nordw. Ecke, Pl des Bahnhofs

5	10	60	1194	— 9,4520	0,64	0,41	0,59	614,2923

Rottendorf — Seligenstadt — Bergtheim.

949. Gewölbter Bahndurchlass Nr. I, südöstl. Stirn, nordöstl. Gesimsstein, □ 0,03^m unter Pl bei St 23,6 + 337^m

1	36	61	4387	—19,5393	0,91	0,83	0,44	594,7530

950. Gewölbter Bahndurchlass Nr. VI mit 1 Oeffnung, nordwestl. Stirn, nordöstl. Gesimsstein, □ 0,06^m unter Pl bei St 22,8 + 265^m

2	24	63	3030	—10,5371	0,95	0,90	0,54	584,2159

Würzburg — Schweinfurt — Bamberg.

Nr	A	J	Z	D	± H	w	w^2	w'	Cote
951.	Gedeckter Bahndurchlass Nr. V, westl. Stirn, südl. Gesimsstein = unter Pl bei St 22,6 + 83m								
	3	7	65	904	— 1,7696	0,38	0,15	0,40	582,4463
952.	□ auf der Wage in der Station Seligenstadt, nordöstl. Langseite der Umfassungsmauer Pl								
	4	9	63	1132	— 1,8202	0,60	0,36	0,56	580,6261
953.	Gewölbte Bahndurchfahrt Nr. IV, südw. Stirn, südöstl. Stein der unteren Brüstungslage, □ 0,35m über Pl bei St 21,4 + 130m								
	1	30	55	3275	+13,4103	0,89	0,80	0,49	594,0364
954.	□ unter der Höhenmarke zu Bergtheim, in die südl. Treppenwange gehauen, 0,70m über Pl der Station								
	2	20	55	2187	— 4,1560	0,64	0,41	0,43	589,8804
955.	⊙ am Betriebsgebäude zu Bergtheim, Ostseite am Perron, südl. neben der Thür								
					— 1,4282				588,4522

Bergtheim — Essleben — Weigolshausen.

956.	Gewölbte Bahnbrücke und Durchfahrt Nr. III mit einer Oeffnung für den Langenfeldbach, westl. Stirn, südl. Stein der unteren Brüstungslage, □ 0,35m über Pl bei St 20,5 + 26m								
	1	10	63	1258	+ 0,3972	0,56	0,32	0,50	590,2776
957.	Gewölbte Bahndurchfahrt Nr. III mit 1 Oeffnung, nördl. der Station Essleben, westl. Stirn, nördl. Stein der unteren Brüstungslage, □ 0,35m über Pl bei St 19,3 + 30m								
	2	30	74	4444	+13,2321	0,78	0,61	0,37	603,5097
958.	Gewölbte Bahndurchfahrt Nr. I, nordwestl. Stirn, nordöstl. Stein der unteren Brüstungslage, □ 0,35m über Pl bei St 19,0 + 340m								
	1	7	57	804	+ 1,0155	0,42	0,17	0,46	604,5252
959.	= unter der Höhenmarke zu Weigolshausen, auf die südw. Treppenwange gehauen, 0,57m über Pl								
	2	22	61	2692	+ 8,6181	0,68	0,47	0,42	613,1433
960.	⊙ am Betriebsgebäude der Station Weigolshausen, Südostseite am Perron, südwestlich neben dem Haupteingang								
					— 1,4157				611,7276

Nr	A	J	Z	D	± H	w	w^2	w'	Cote

Weigolshausen — Bergrheinfeld — Schweinfurt.

— Curvenstein auf dem Südostrand des Bahnkörpers, = an dem Nordostrand der Oberfläche bei St 18,0 + 200m

1 10 58 1161 + 0,3141 0,58 0,34 0,54 613,4574

961. Gewölbter Bahndurchlass Nr. X unter Pl, östl. Stirn, nördl. Gesimsstein, = bei St 16,9 + 90m, nördlich von Station Bergrheinfeld, etwa 3,20m unter Bahnhof-Pl

2 32 66 4203 +17,1863 0,88 0,78 0,43 630,6437

962. Gewölbte Bahndurchfahrt Nr. VII über den Weg von Bergrheinfeld nach Schnackenwörth, westl. Stirn, nördl. Stein der unteren Brüstungslage, □ 0,35m über Pl bei St 16,6 + 120m

1 8 68 1084 + 1,0331 0,46 0,21 0,44 631,6768

963. Gewölbte Bahndurchfahrt Nr. V, nordwestl. Stirn, nördöstl. Stein der unteren Brüstungslage, □ 0,36m über Pl bei St 15,9 + 50m

2 22 61 2674 + 8,8853 0,82 0,66 0,50 640,5621

964. Gedeckter Wegdurchlass Lit. W für den südöstl. Bahngraben, nordöstl. Stirndeckstein, □ 0,03m über Pl bei St 15,6 + 193m

3 9 54 975 + 3,9583 0,37 0,14 0,38 644,5204

965. Gewölbte Bahndurchfahrt Nr. XVI, nordw. Stirn, nordöstl. Brüstungsstein, □ 0,35m über Pl bei St 14,9 + 145m

4 22 55 2519 + 3,5403 0,70 0,50 0,44 648,0607

966. Schacht der Stollendohle vor dem südw. Portal des Schweinfurter Stollens, Nordecke der Umfassungsmauer, □ Pl

5 6 47 559 + 2,7756 0,22 0,05 0,30 650,8363

967. Schacht der Stollendohle vor dem nordöstl. Portal, Westecke der Umfassungsmauer □ Pl

6 1 49 98 — 0,0118 0,21 0,05 0,68 650,8245

968. ⊙ an dem nordöstl. Stollenportal Nr. XII, südwestlich vom (alten) Bahnhof Schweinfurt, Stirn der Scheidemauer

7 1 36 71 — 1,4095 0,19 0,04 0,71 649,4150

Schweinfurt — Schonungen — Gädheim.

969. Gewölbte Bahnbrücke Nr. VII mit 1 Oeffnung über den Höllenbach, südöstl. Stirn, Nordostende der unteren Brüstungslage, □ 0,36m über Pl bei St 14,4 + 100m

1 12 52 1258 — 1,4136 0,44 0,19 0,39 649,4109

Würzburg — Schweinfurt — Bamberg.

Nr	A	J	Z	D	± H	w	w^2	w'	Cote
970.	Gewölbte Bahnbrücke Nr. XIII, südl. Stirn, Ostende der unteren Brüstungsschichte, □ 0,35^m über Pl bei St 13,6 + 315^m								
	2	26	53	2747	— 1,8888	0,92	0,84	0,55	647,5221
971.	⊙ am Betriebsgebäude zu Schonungen, Südseite gegen den Perron, Lisene östl. dem Haupteingang, etwa 2,1^m über Bahnhof-Pl								
	3	14	52	1463	— 2,1403	0,55	0,31	0,46	645,3818
972.	Gedeckter Bahndurchlass Nr. IV, in der Station Schonungen, südw. Stirn, Deckstein des nordw. Böschungsflügels, = bei St 13,2 + 208^m Pl								
	1	3	35	212	+ 1,9499	0,30	0,09	0,66	647,3317
973.	Gedeckter Bahndurchlass Nr. IV, nördl. Stirndeckstein, □ 0,06^m unter Pl bei St 12,3 + 204^m								
	2	31	54	3323	— 1,5027	0,88	0,78	0,48	645,8290
974.	□ unter der Höhenmarke zu Gädheim, in den Sockel gehauen, 0,97^m über Bahnhof-Pl								
	3	21	50	2096	— 2,0836	0,80	0,64	0,55	643,7454
975.	⊙ am Stationsgebäude zu Gädheim, Nordseite gegen die Strasse, westl. vom Eingang								
					— 1,1863				642,5591

Gädheim — Obertheres — Hassfurt.

976.	Gewölbte Bahndurchfahrt Nr. VIII, östl. Gesimsstein der nördl. Stirn, □ bei St 10,6 + 282^m Pl								
	1	32	75	4165	— 0,5462	1,12	1,26	0,55	643,1992
977.	Gewölbter Bahndurchlass Nr. I in der Station Obertheres, nordw. Stirn, nordöstl. Deckstein, □ 0,06^m unter Pl bei St 10,0 + 275^m								
	2	16	70	2239	— 0,4909	0,80	0,64	0,54	642,7083
978.	Gewölbter Bahndurchlass Nr. IV, südl. Stirn, westl. Gesimsstein, = unter Pl bei St 9,1 + 334^m								
	1	21	78	3284	— 0,9673	0,97	0,95	0,54	641,7410
979.	Gewölbte Bahnbrücke Nr. V mit 2 Oeffnungen über die Nassag, südw. Widerlager, nordw. ausspringender Stirnflügel, Südwestende der unteren Brüstungsschichte, □ 0,35^m über Pl bei St 8,8 + 364^m								
	2	8	68	1085	— 1,9363	0,65	0,43	0,63	639,8047
980.	⊙ an der Wegbrücke in der Station Hassfurt, Südwestseite des nordöstl. Pfeilers, etwa 1,38^m über Bahnhof-Pl								
	3	7	58	813	— 1,1292	0,69	0,47	0,76	638,6755

Würzburg — Schweinfurt — Bamberg.

Nr	A	J	Z	D	± H	w	w^2	w'	Cote

Hassfurt — Zeil — Ebelsbach.

981. Gewölbter Bahndurchlass Nr. II, nördl. Stirn, westl. Gesimsstein, □ Pl bei St 8,5 + 345m

1 3 54 324 + 1,3947 0,09 0,01 0,15 640,0702

982. Gewölbte Bahnbrücke Nr. III mit 1 Oeffnung über den Bach nordwestl. Station Zeil, nordöstl. Stirn, südöstl. Gesimsstein, □ bei St 6,9 + 145m Pl

2 49 63 6152 — 2,6848 0,93 0,87 0,38 637,3854

983. □ unter der Höhenmarke am Betriebsgebäude zu Zeil, in einen Randstein der Vorhalle gehauen, etwa 0,60m über Pl

3 4 51 410 — 0,8252 0,46 0,21 0,72 636,5602

984. ⊙ am Betriebsgebäude zu Zeil, Südseite am Perron, westl. Hausecke

— 1,5323 635,0279

985. Gewölbter Wegdurchlass Lit J für den nördl. Bahngraben, □ auf der westl. Brüstung bei St 6,5 + 200m

1 10 55 1086 — 0,6685 0,50 0,25 0,48 635,8917

986. □ auf der Umfassungsmauer der Wage in der Station Ebelsbach, Nordwestecke, etwa Pl

2 41 58 4700 — 2,8076 1,28 1,63 0,59 633,0841

Ebelsbach — Staffelbach — Oberhaid — Bamberg.

987. Gedeckter Bahndurchlass Nr. IV mit 2 Oeffnungen, südl. Stirn, östl. Gesimsstein, ⌓ Pl und Bahnhofplanie bei St 5,2 + 240m

1 2 25 100 + 0,1007 0,15 0,02 0,47 633,1848

988. Schienensteg über den nördl. Bahngraben, südl. Widerlager, □ auf dem östl. Wangenstein tief unter Bahnplanie bei St 4,3 + 0m

2 29 62 3591 + 0,0138 0,97 0,94 0,51 633,1986

989. Gedeckter Bahndurchlass Nr. III mit 4 Oeffnungen in der Station Staffelbach, nordöstl. Stirn, südöstl. Deckstein, □ 0,04m unter Pl bei St 3,3 + 120m

3 29 63 3654 — 4,1092 1,08 1,18 0,57 629,0894

990. Gedeckter Wegdurchlass Lit A für den nördl. Bahngraben, westl. Stirndeckstein, □ etwas über Pl bei St 2,2 + 82m

1 32 65 4143 — 2,6931 0,96 0,91 0,47 626,3963

Würzburg — Schweinfurt — Bamberg.

Nr	A	J	Z	D	± H	w	w^2	w'	Cote
991.	Gewölbter Bahndurchlass Nr. II mit 2 Oeffnungen in der Haltestelle Oberhaid, nördl. Stirn, östl. Gesimsstein, □ 0,06^m unter Pl bei St 1,9 + 325^m								
	2	8	55	873	— 0,0931	0,43	0,18	0,46	626,3032
992.	Gewölbter Bahndurchlass Nr. IV, nördl. Stirn, westl. Gesimsstein, □ Pl bei St 1,5 + 80^m								
	1	16	54	1714	— 0,7887	0,71	0,50	0,54	625,5145
993.	Gewölbte Bahnbrücke Nr. I mit 8 Oeffnungen über den Main bei Hallstadt, nordwestl. Widerlager, Ecke des nordöstl. vorspringenden Stirnflügels, □ 0,36^m über Pl auf der unteren Brüstungsschichte, bei St 1,0 + 165^m								
	2	18	49	1791	— 4,8644	0,68	0,46	0,51	620,6501
994.	Gedeckter Wegdurchlass Lit C für den nordöstl. Bahngraben, Gesimsstein der nordw. Stirn, □ etwas über Pl bei St 0,4 + 240^m								
	3	19	57	2162	+ 3,1150	0,73	0,53	0,50	623,7651
316.	Bahngrenzstein ohne Nummer, östl. von dem Feldweg zwischen der Würzburger und Hofer Bahn, □ ohne Dauer bei St 0,3 + 350^m								
	4	3	63	377	— 0,4489	0,42	0,18	0,68	623,3162

Breitengüssbach — Bamberg.

317.	Schiefer offener Bahndurchlass Nr. 36, südl. dem Weg von Bamberg nach Gundelsheim, südl. Widerlager, östl. Eckstein, □ bei St 0,2 + 260^m								
	8^b	3	72	430	— 0,4146	0,35	0,13	0,54	622,9016
318.	□ auf der obersten Treppenstufe unter der Höhenmarke am Bahnhof Bamberg								
	9	7	72	1008	— 1,7177	0,51	0,26	0,50	621,1839
319.	⊙ am Betriebshauptgebäude zu Bamberg, an einem der Mittelpfeiler der Vorhalle gegen die Stadt hin								
					— 1,5400				619,6439

Von einem

Kettenbruche Euler's

und einem

Theorem von Wallis.

Von

G. Bauer.

Von einem

Kettenbruche Euler's und einem Theorem von Wallis.

Von

G. Bauer.

Nr. 1.

In den zahlreichen Abhandlungen Euler's über Kettenbrüche kehrt zu wiederholten Malen ein Problem wieder, das schon von Wallis aufgestellt wurde. Als nämlich Wallis den bekannten Ausdruck für das Verhältniss des Kreisumfangs zum Radius in Form eines unendlichen Products gefunden hatte, wandte er sich an seinen Freund Brouncker mit der Frage, wie er wohl am schnellsten diese Zahl berechnen würde. Brounker sandte ihm als Antwort den Kettenbruch

$$1+\cfrac{1^2}{2+\cfrac{3^2}{2+\cfrac{5^2}{2+\text{etc.}}}}$$

als Ausdruck für das Verhältniss $\frac{4}{\pi}$. Es war diess das erstemal, dass die Kettenbruchform auftrat. Da Brounker das Verfahren, welches ihn zu diesem Ausdruck geführt hatte, nicht bekannt machen wollte,

so suchte Wallis[1]) die Richtigkeit desselben zu verweisen und gab hiezu das Theorem, dass, wenn a irgend eine ganze positive Zahl ist, das Product der zwei Kettenbrüche

$$a-1+\cfrac{1^2}{2(a-1)+\cfrac{3^2}{2(a-1)+\cfrac{5^2}{2(a-1)+\text{etc.}}}} \times a+1+\cfrac{1^2}{2(a+1)+\cfrac{5^2}{2(a+1)+\cfrac{5^2}{2(a+1)+\text{etc.}}}}$$

$= a^2$ ist.

Setzt man nämlich in diesem Producte für a nach und nach die Zahlen 2, 4, 6 ... so ergibt sich aus diesem Theorem mit Hülfe der Wallis'schen Formel für π sogleich der von Brounker gegebene Werth obigen Kettenbruchs. Wallis gibt jedoch keine Herleitung seines Theorems sondern beschränkt sich darauf zu zeigen, dass das Product sich um so mehr dem Werthe a^2 nähere, je mehr Glieder der Kettenbrüche in Rechnung gezogen werden.

Der Beweis dieses Theorems hat Euler viel beschäftigt. „Viele Zeit, sagt er, habe ich darauf vergebens verwandt, aber je schwieriger die Sache schien, um so mehr Nutzen hoffte ich von der Lösung zu ziehen." Nachdem er schon in seiner ersten Abhandlung[2]) über Kettenbrüche dieses Theorem kurz berührt hatte, macht er es in einer zweiten Abhandlung[3]) zum Hauptgegenstand der Untersuchung und es gelingt ihm nach langem Umschweif, mit Hülfe von Integralen und Relationen zwischen denselben, die er in einer vorhergehenden Abhandlung gegeben, ein allgemeineres Theorem über das Product zweier Kettenbrüche aufzustellen, welche das Wallis'sche in sich begreift. In einer späteren Abhandlung[4]) kommt er nochmals auf dieses Theorem zurück, um eine einfachere Lösung speciell für die Wallis'schen Kettenbrüche zu geben.

Ich kann nicht finden, dass Andere sich seitdem mit diesem Theorem befasst haben; es lässt aber, wie ich hier zeigen werde, einen höchst einfachen Beweis zu, indem man einen dritten Kettenbruch zu Hülfe

---

1) Arithmetica Infinitorum. Prop. CXCI.
2) De fractionibus cont. Comment. Ac. Petrop. T. IX.
3) De fractionibus cont. observationes. Comment. Ac. Petrop. T. XI.
4) De fractionibus cont. Wallisii. Mém. de l'Ac. d. Sc. de St. Pétersbourg T. V. pag. 24.

nimmt, der mit jedem der beiden Kettenbrüchen des Theorems durch eine rationale Relation verbunden ist. Durch dieses Mittel bieten sich sogleich allgemeinere Sätze dar, welche nicht nur die von Wallis, sondern auch den von Euler gegebenen als specielle Fälle enthalten.

Ich wurde zu dieser Lösung geführt durch eine andere Untersuchung, die ebenfalls an die Arbeiten Euler's über Kettenbrüche anknüpft. Derselbe widmet nämlich eine besondere Abhandlung[1]) dem Kettenbruche

$$\cfrac{n}{1+\cfrac{n+1}{2+\cfrac{n+2}{3+\text{etc.}}}}$$

an dem er die bemerkenswerthe Eigenschaft entdeckt, dass sein Werth immer eine rationale Zahl ist, wenn n irgend eine ganze Zahl ist, mit Ausnahme von $n = 1$, in welchem Falle dieser Werth irrational ist. Euler setzt in dieser Abhandlung sogleich n als eine ganze positive Zahl voraus und findet seine Resultate durch sinnreiche Kunstgriffe, die eben nur in diesem Falle anwendbar sind.

In einer späteren Abhandlung[2]) betrachtet Euler noch die allgemeinere Form

$$m+\cfrac{n}{m+1+\cfrac{n+1}{m+2+\text{etc.}}}$$

und zeigt, dass dieser Kettenbruch in mehrere wesentlich verschiedene andere gleichgeltende Formen umgeformt werden kann.

Man kann aber grössere Allgemeinheit mit einfacherer Analyse verbinden. Ich betrachte hier zunächst den allgemeineren Bruch

---

1) Observationes circa fractiones cont. in hac forma contentas etc. Mém. de l'Ac. d. Sc. d. St. Pétersbourg T. IV. pag. 52.

2) „Observationes analyticae." Opuscula analytica T. I. Auch Stern beschäftigte sich ausführlich mit diesem Kettenbruch. Journ. v. Crelle T. XI. p. 43. Seine Analyse ist, unter der Voraussetzung, dass m und n ganze positive Zahlen sind, der von Euler auf den Fall $m = 0$ (Mém. de l'Ac. de St. Pétersburg T. IV) angewandten nachgebildet.

$$S = \cfrac{n}{\alpha_1 + \cfrac{n+\alpha_1}{\alpha_2 + \cfrac{n+\alpha_2}{\alpha_3 + \text{etc.}}}} \qquad 1)$$

welcher die zwei letztgenannten Brüche in sich begreift; lege aber weniger Gewicht auf die Verallgemeinerung der Euler'schen Resultate als auf die angewandte Methode, welche einen tieferen Einblick in die Natur des Kettenbruches gestattet und uns sodann gleichsam von selbst auch zur Lösung des Wallis'schen Problemes hinleitet, obwohl letzteres und die Untersuchung des Kettenbruchs 1) in gar keiner Beziehung zu einander zu stehen scheinen.

Nr. 2.

Schon Spottiswoode hat in einer Abhandlung über Determinanten[1]) bemerkt, dass die Zähler und Nenner der Näherungsbrüche eines Kettenbruchs als Determinanten besonderer Form geschrieben werden können. Diese allerdings nur beiläufig als Beispiel gegebene Notiz scheint bisher übersehen worden zu sein. Sie ist aber nicht ohne Wichtigkeit; denn erst dadurch, dass die spröden Formen dieser Zähler und Nenner in die leicht zu behandelnde Determinantenform übergeführt werden, ist eine sichere, immer anwendbare Methode für die Behandlung der Kettenbrüche gewonnen. Diese Determinantenform ergibt sich übrigens unmittelbar aus den bekannten linearen Recursionsformeln, welche zu der Kettenbruchentwicklung Veranlassung geben.

Ist

$$\cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{a_3 + \text{etc.}}}} \qquad A)$$

der gegebene Kettenbruch, $\frac{P_r}{Q_r}$ der r^{te} Näherungsbruch, so findet man

1) Journ. v. Crelle. LI.

$$Q_r = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & & & & \\ -b_2 & a_2 & 1 & & & \\ & -b_3 & a_3 & . & & \\ & & -b_4 & . & . & \\ & & & . & . & 1 \\ & & & & . & a_{r-1} & 1 \\ & & & & & -b_r & a_r \end{vmatrix}, \quad P_r = b_1 \begin{vmatrix} a_2 & 1 & & & & \\ -b_3 & a_3 & 1 & & & \\ & -b_4 & a_4 & . & & \\ & & -b_5 & . & . & \\ & & & . & . & 1 \\ & & & & . & a_{r-1} & 1 \\ & & & & & -b_r & a_r \end{vmatrix} \qquad B)$$

Diese Determinanten haben die besondere Form, dass die Diagonalreihe die Theilnenner des Kettenbruchs enthält, und von den beiden ihr zunächst liegenden schrägen Reihen die eine die Theilzähler mit entgegengesetztem Zeichen enthält, in der andern alle Elemente = 1 sind, während alle übrigen Elemente = 0 sind. Q_r ist eine Determinante r^{ten} Grades, P_r eine solche $r-1^{ten}$ Grades und (abgesehen vom Factor b_1) gleich dem Coefficienten von a_1 in Q_r.

Wenden wir diese Formeln an auf den Kettenbruch 1), so wird

$$Q_r = \begin{vmatrix} \alpha_1 & 1 & & & & \\ -(n+\alpha_1) & \alpha_2 & 1 & & & \\ & -(n+\alpha_2) & \alpha_3 & . & & \\ & & -(n+\alpha_3) & . & . & \\ & & & . & . & 1 \\ & & & & \alpha_{r-1} & 1 \\ & & & & -(n+\alpha_{r-1}) & \alpha_r \end{vmatrix}, \quad P_r = n \begin{vmatrix} \alpha_2 & 1 & & & & \\ -(n+\alpha_2) & \alpha_3 & . & & & \\ & -(n+\alpha_3) & . & . & & \\ & & . & . & 1 & \\ & & & \alpha_{r-1} & 1 & \\ & & & -(n+\alpha_{r-1}) & \alpha_r & \end{vmatrix} \qquad 2)$$

Diese Determinanten haben das Eigenthümliche, dass die Summe der Elemente jeder Vertikalreihe, die erste und letzte ausgenommen, constant $= -n+1$ ist. Wenn man nun zu jeder Horizontalreihe alle folgenden addirt und hierauf von jeder Verticalreihe (die letzte ausgenommen) die vorhergehende abzieht, so wird

$$Q_r = \begin{vmatrix} -n & 1 & & & & \alpha_r+1 \\ -(n+\alpha_1) & \alpha_1 & 1 & & & \alpha_r+1 \\ & -(n+\alpha_2) & \alpha_2 & . & & . \\ & & -(n+\alpha_3) & . & . & . \\ & & & . & 1 & . \\ & & & & \alpha_{r-2} & \alpha_r+1 \\ & & & & -(n+\alpha_{r-1}) & \alpha_r \end{vmatrix}, \quad P_r = n \begin{vmatrix} -n & 1 & & & \alpha_r+1 \\ -(n+\alpha_2) & \alpha_2 & 1 & & \alpha_r+1 \\ & -(n+\alpha_3) & \alpha_3 & . & . \\ & & -(n+\alpha_4) & . & . \\ & & & . & . \end{vmatrix} \qquad 3)$$

und diese Determinanten haben nun wieder die charakteristische Form B), mit Ausnahme jedoch der letzten Verticalreihe, in welcher alle Elemente $= \alpha_r + 1$ sind bis auf das letzte, welches $= \alpha_r$ ist.

Bezeichnen wir mit D_r die Unterdeterminante von Q_r, welche durch Streichen der ersten Horizontal- und ersten Verticalreihe hervorgeht; mit Δ_r die Unterdeterminante $r - 2^{ten}$ Grades, welche aus Q_r durch Streichen der zwei ersten Horizontal- und Verticalreihen entsteht und mit $(-1)^r \delta_r$ diejenige, welche durch Streichen der zwei ersten Horizontalreihen und der ersten und letzten Verticalreihe entsteht und mithin dem Product der Elemente $-(n+\alpha_2)$, $-(n+\alpha_3)\ldots$, $-(n+\alpha_{r-1})$ gleich ist, so hat man

$$\begin{aligned} Q_r &= -nD_r + (n+\alpha_1)\Delta_r + \delta_r(n+\alpha_1)(\alpha_r+1) \\ P_r &= \quad nD_r - n(n+\alpha_1)\Delta_r \end{aligned}$$

Letztere Gleichung ergibt sich aus obiger Form für P_r, wenn man das erste Element $-n$ in die Summe $-(n+\alpha_1)+\alpha_1$ zerlegt.

Aus diesen Gleichungen folgt, indem man einmal D_r, dann Δ_r eliminirt

$$\begin{aligned} P_r + Q_r &= (n+\alpha_1)\left\{-(n-1)\Delta_r + \delta_r . (\alpha_r+1)\right\} \\ P_r + nQ_r &= \quad n \;.\; \left\{-(n-1)D_r + \delta_r(n+\alpha_1)(\alpha_r+1)\right\} \end{aligned}$$

Man ersieht aber sogleich, dass der für $\frac{1}{n}(P_r + nQ_r)$ aus der zweiten Gleichung sich ergebende Ausdruck nichts anderes ist als das, was die Form 3) für Q_r wird, wenn man das zweite Element 1 der ersten Horizontalreihe durch Null ersetzt, wodurch im Werthe von Q_r das Glied mit Δ_r verschwindet, und statt des ersten Elementes $-n$ das Element $-(n-1)$ setzt. Dieselbe Veränderung in der Determinante 3) für P_r gemacht, gibt mit Weglassung des Factors n den Ausdruck für $\frac{1}{n+\alpha_1}(P_r + Q_r)$ in 4). Setzen wir also allgemein

$$V_i = \begin{vmatrix} -(n-1) & & & & & \alpha_r+1 \\ -(n+\alpha_i) & \alpha_i & 1 & & & . \\ & -(n+\alpha_{i+1}) & \alpha_{i+1} & . & & . \\ & & -(n+\alpha_{i+2}) & . & . & . \\ & & & . & 1 & \alpha_r+1 \\ & & & . & \alpha_{r-2} & \alpha_r+1 \\ & & & -(n+\alpha_{r-1}) & & \alpha_r \end{vmatrix} \qquad 5)$$

so ist

$$\frac{n(P_r+Q_r)}{P_r+nQ_r} = (n+\alpha_1)\frac{V_2}{V_1} \qquad 6)$$

Der Bruch $\frac{V_2}{V_1}$ lässt sich aber wieder in einen Kettenbruch entwickeln. Denn addirt man in V_i die erste Verticalreihe zur zweiten und zerlegt hierauf das Element $-(n+\alpha_i)$ in die zwei Theile $-n$ und $-\alpha_i$, so wird

$$V_i = \alpha_i V_{i+1} + \begin{vmatrix} -(n-1) & -(n-1) & & & a_r+1 \\ -n & -n & 1 & & \alpha_r+1 \\ & -(n+\alpha_{i+1}) & \alpha_{i+1} & 1 & \alpha_r+1 \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \end{vmatrix}$$

Zieht man in letzterer Determinante die zweite Verticalreihe von der ersten ab, so geht sie über in

$$(n+\alpha_{i+1}) \begin{vmatrix} -(n-1) & & & \alpha_r+1 \\ -n & 1 & & . \\ & -(n+\alpha_{i+2}) & \alpha_{i+2} \; 1 & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \end{vmatrix} = (n+\alpha_{i+1}) \begin{vmatrix} -(n-1) & & \alpha_r+1 \\ -1 & 1 & 0 \\ . & . & . \\ . & . & . \end{vmatrix}$$

$$= (n+\alpha_{i+1}) \begin{vmatrix} -(n-1) & -(n-1) & \alpha_r+1 \\ -1 & 0 & 0 \\ . & . & . \\ . & . & . \end{vmatrix} = (n+\alpha_{i+1}) V_{i+2}$$

Also hat man von $i = 1$ bis $i = r-3$

$$V_i = \alpha_i V_{i+1} + (n+\alpha_{i+1}) V_{i+2} \qquad 7)$$

Ebenso findet man

$$V_{r-2} = \alpha_{r-2}\begin{vmatrix} -(n-1) & \alpha_r+1 \\ -(n+\alpha_{r-1}) & \alpha_r \end{vmatrix} + (n+\alpha_{r-1})\begin{vmatrix} -(n-1) & \alpha_r+1 \\ -n & \alpha_r+1 \end{vmatrix}$$

$$= \alpha_{r-2}V_{r-1} + (n+\alpha_{r-1})(\alpha_r+1)$$

$$V_{r-1} = \begin{vmatrix} -(n-1) & \alpha_r+1 \\ -(n+\alpha_{r-1}) & \alpha_r \end{vmatrix} = \alpha_{r-1}(\alpha_r+1) + (n+\alpha_r)$$

Hiernach gibt die Gleichung 6)

$$\frac{n(P_r+Q_r)}{P_r+nQ_r} = \frac{n+\alpha_1}{\alpha_1} + \frac{n+\alpha_2}{\alpha_2} + \cdots + \frac{n+\alpha_{r-1}}{\alpha_{r-1}} + \frac{n+\alpha_r}{\alpha_r+1} \qquad 8)$$

welcher Kettenbruch sich nur dadurch von dem r^{ten} Näherungsbruche von

$$S' = \frac{n+\alpha_1}{\alpha_1} + \frac{n+\alpha_2}{\alpha_2} + \text{etc.} \qquad 9)$$

unterscheidet, dass der Nenner des letzten (r^{ten}) Theilbruchs α_r+1 statt α_r ist. Diese Gleichung 8) gilt für jeden Werth von n; auch für $n = 1$. Nur tritt für $n = 1$ der besondere Fall ein, dass der Kettenbruch 8) den constanten Werth 1 annimmt für jeden Index r und mithin ausser aller Verbindung mit $\frac{P_r}{Q_r}$ oder also dem Kettenbruche S tritt.

In diesem Falle $n = 1$ aber gestatten die Formeln 2) eine einfache Entwicklung für P_r und Q_r. Denn nachdem man in der Form 2) von Q_r zu jeder Horizontalreihe alle folgenden addirt hat, wird, für $n = 1$,

$$Q_r = \begin{vmatrix} -1 & & & & \alpha_r+1 \\ -(1+\alpha_1) & -1 & & & \cdot \\ & -(1+\alpha_2) & \cdot\cdot & & \cdot \\ & & \cdot\cdot & -1 & \alpha_r+1 \\ & & & -(1+\alpha_{r-1}) & \alpha_r \end{vmatrix}$$

woraus sich sofort ergibt

$$Q_r = (1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\ldots(1+\alpha_r)\left[1-\frac{1}{1+\alpha_1}+\frac{1}{(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)}-\ldots\pm\frac{1}{(1+\alpha_1)\ldots(1+\alpha_r)}\right]$$

Ebenso findet sich

$$P_r = (1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\ldots(1+\alpha_r)\left[\frac{1}{1+\alpha_1}-\frac{1}{(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)}+\ldots\pm\frac{1}{(1+\alpha_1)\ldots(1+\alpha_r)}\right]$$

also

$$\frac{P_r}{Q_r} = \frac{1-\Sigma}{\Sigma} \qquad 10)$$

wo Σ die in Q_r enthaltene Reihe $1-\frac{1}{1+\alpha_1}+$ etc. bezeichnet.

Es mag noch bemerkt werden, dass wenn man in S $-\alpha_1$, $-\alpha_2$ u. s. f. statt α_1, α_2 ... setzt und

$$\frac{-P_r}{Q_r} = \frac{p_r}{q_r}\,, \quad \frac{-n(P_r+Q_r)}{P_r+nQ_r} = \frac{p_r'}{q_r'}\,,$$

so dass

$$\frac{p_r}{q_r} = \frac{n}{\alpha_1}+\frac{n-\alpha_1}{\alpha_2}+\ldots+\frac{n-\alpha_{r-1}}{\alpha_r}\,, \quad \frac{p_r'}{q_r'} = \frac{n-\alpha_1}{\alpha_1}+\frac{n-\alpha_2}{\alpha_2}+\ldots+\frac{n-\alpha_{r-1}}{\alpha_{r-1}}+\frac{n-\alpha_{r-1}}{\alpha_r-1} \qquad 11)$$

zwischen $\frac{p_r}{q_r}$ und $\frac{p_r'}{q_r'}$, wie sich aus 8) ergibt, immer die Relation statt hat

$$\frac{p_r}{q_r} = \frac{n(p_r'+q_r')}{p_r'+nq_r'} \qquad 12)$$

d. h. dieselbe Relation, welche zwischen dem Kettenbruch 8) und $\frac{P_r}{Q_r}$ besteht.

Nr. 3.

Sind die Kettenbrüche S und S' convergent, was immer der Fall sein wird, wenn die α positiv und mit dem Index steigend sind, so wird der Kettenbruch 8) bei wachsendem r nach derselben Grenze convergiren, wie der Kettenbruch 9).

In Bezug auf späteres sei hier bemerkt, dass, wenn allgemein $\frac{P_r}{Q_r}$ der r^{te} Näherungsbruch eines convergenten Kettenbruches A) ist, und $\frac{P'_{r+1}}{Q'_{r+1}}$ das was $\frac{P_{r+1}}{Q_{r+1}}$ wird, wenn der letzte Theilnenner a_{r+1} durch $a_{r+1}+\varepsilon$ ersetzt wird,

$$\frac{P'_{r+1}}{Q'_{r+1}} - \frac{P_{r+1}}{Q_{r+1}} = -\frac{(P_{r+1}Q_r - P_rQ_{r+1})\varepsilon}{Q_{r+1}(Q_{r+1}+\varepsilon Q_r)}$$

gefunden wird. Ist mithin ε positiv und sind die Theilzähler und Theilnenner sämmtlich positiv, mithin auch die P_r und Q_r, so ist diese Differenz numerisch $< \frac{P_{r+1}}{Q_{r+1}} - \frac{P_r}{Q_r}$ und es convergiren also $\frac{P'_{r+1}}{Q'_{r+1}}$ und $\frac{P_{r+1}}{Q_{r+1}}$ mit wachsendem r nach derselben Grenze.

Wäre ε negativ, aber numerisch $< a_{r+1}$, so dass $a_{r+1}+\varepsilon$ noch positiv bliebe, so wäre $\frac{b_{r+1}}{\alpha_{r+1}+\varepsilon} = \varepsilon'$ eine positive Grösse; der Theilnenner α_r wäre in $\alpha_r + \varepsilon'$ übergegangen und wir würden wie vorhin schliessen, dass hiedurch die Convergenz des Bruches und die Grenze, nach welcher r convergirt, nicht geändert wird.

Enthält aber der Kettenbruch negative Theilbrüche, so sind im Allgemeinen diese Schlüsse nicht mehr gültig und müsste man sich dann in jedem Falle durch besondere Untersuchung vergewissern, ob durch das Hinzutreten von ε im letzten Theilnenner die Convergenz des Bruches nicht geändert wird.

Nr. 4.

Unter dem so eben gemachten Vorbehalt ergibt sich nun aus Gleichung 8) für $r = \infty$

$$S' = \frac{n(S+1)}{S+n} \qquad 13)$$

Aus dieser Relation fliessen die Eigenthümlichkeiten des Bruches S für bestimmte Werthe der Grössen α.

Ist in dem einfachsten Falle $\alpha_i = i$, so geht S über in

$$S^{(n)} = \cfrac{n}{1 + \cfrac{n+1}{2 + \text{etc}}}$$

und S' in $S^{(n+1)}$. Diess ist der Bruch, welchen Euler in der oben angeführten Abhandlung[1]) behandelt, unter der Voraussetzung, dass n eine ganze positive Zahl ist. Er findet die Relation 13) durch Induction. Ist $n = 1$, so gibt dieselbe $S^{(2)} = 1$ und hieraus folgt, dass $S^{(n)}$ überhaupt, sobald n eine ganze positive Zahl > 1 ist, eine rationale Zahl ist, die sich durch successive Substitution aus 13) berechnen lässt. Ist n eine negative ganze Zahl, so ist diess selbstverständlich, indem in diesem Falle der Kettenbruch abbricht; immer aber gilt auch in diesem Falle die Relation 13). Der Fall $n = 1$ macht, wie oben erwähnt, eine Ausnahme, insoferne als sich der Werth von $S^{(1)}$ nicht aus der Relation entnehmen lässt, und gibt die Gleichung 10) in diesem Falle für $S^{(1)}$ den irrationalen Werth

$$S^{(1)} = \frac{e^{-1}}{1 - e^{-1}} = \frac{1}{e - 1}$$

wo e die Basis der natürlichen Logarithmen bedeutet.

Setzt man ferner

$$s^{(n)} = \cfrac{n-1}{1 + \cfrac{n-2}{2 + \text{etc.}}}$$

so besteht vermöge der Gleichung 12) dieselbe Relation zwischen $s^{(n)}$ und $s^{(n+1)}$, welche zwischen $S^{(n)}$ und $S^{(n+1)}$ besteht. Da nun $s^{(2)} = 1 = S^{(2)}$, so folgt weiter, dass überhaupt für jede ganze positive Zahl n ($n = 1$ ausgenommen)

---

1) Mém. de l'Acad. de St. Pétersbourg. T. IV.

$$S^{(n)} = s^{(n)}$$

ist, der rationale Werth $S^{(n)}$ mithin durch einen endlichen Kettenbruch bestimmt ist. Diess sind die von Euler a. a. O. erhaltenen Resultate.

Setzt man in S die Grössen $m + \alpha_1$, $m + \alpha_2$ u. s. f. an die Stelle von α_1, α_2, . . ., so kann man statt S und S' die Kettenbrüche

$$\Sigma = m + \cfrac{n}{m+\alpha_1 + \cfrac{n+\alpha_1}{m+\alpha_2 + \text{etc.}}} \quad , \quad \Sigma' = m + \cfrac{n+\alpha_1}{m+\alpha_1 + \cfrac{n+\alpha_2}{m+\alpha_2 + \text{etc.}}}$$

einführen und die Relation 13) geht sodann über in folgende:

$$\Sigma' = \frac{n(\Sigma+1)}{\Sigma+n-m} \qquad 14)$$

und aus dieser Relation lassen sich unschwer die Resultate ableiten, welche Euler für den Kettenbruch Σ unter der Voraussetzung $\alpha_i = i$ in den Opusc. anal.[1]) entwickelt hat.

Nr. 5.

Um die Bedeutung der auf den Kettenbruch 1) angewandten Analyse besser zu erkennen und allgemeinere Resultate zu erhalten, gehen wir von dem Kettenbruche

$$\frac{P_r}{Q_r} = \cfrac{b_1 c_0}{a_1 + \cfrac{b_2 c_1}{a_2 + \cdot \cdot \cdot + \cfrac{b_r c_{r-1}}{a_r}}} \qquad 15)$$

aus. Um die Gleichungen 13) auf diesen Kettenbruch anzuwenden, hätte man dort $b_i c_{i-1}$ statt b_i zu setzen. Aber statt der hieraus hervorgehenden Formen für P und Q kann man folgende Formen nehmen

---

1) T. T. p. 106.

$$Q_r = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & & & & \\ -b_2 & a_2 & c_2 & & & \\ & -b_3 & a_3 & c_3 & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & -b_{r-1} & a_{r-1} & c_{r-1} \\ & & & & -b_r & a_r \end{vmatrix}, \quad P_3 = b_1 c_0 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 & & & \\ -b_3 & a_3 & c_3 & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & \cdot & \cdot & \\ & & & & -b_r & a_r \end{vmatrix} \qquad 16)$$

In der That multiplicirt man in Q_r die i^{te} Horizontalreihe und alle folgenden mit einer beliebigen Grösse k und dividirt zugleich die i^{te} Verticalreihe und alle folgenden mit k, so ändern sich in der Determinante nur die zwei Elemente b_i und c_{i-1}, welche in $k \cdot b_i$ und $\frac{1}{k} c_{i-1}$ übergehen, während zugleich der Werth der Determinante ungeändert bleibt. Es wird also auch der Werth der Determinante nicht alterirt, wenn man c_{i-1} durch 1 ersetzt, und zugleich b_i durch $b_i \cdot c_{i-1}$.

Auf diese Determinante 16) lassen sich nun ganz dieselben Transformationen anwenden, die wir auf die Determinante 2) anwandten, wenn wir nur voraussetzen, dass, wie dort, die Summe der in einer Verticalreihe stehenden Elemente (die erste und letzte Verticalreihe ausgenommen) constant sei. Setzen wir also

$$c_i + a_{i+1} - b_{i+2} = \text{const} = d$$

für jeden Index i, wodurch der Kettenbruch 15) die Gestalt annimmt

$$\frac{P_r}{Q_r} = \frac{b_1 c_0}{d + b_2 - c_0} + \frac{b_2 c_1}{d + b_3 - c_1} + \cdots + \frac{b_r c_{r-1}}{d + b_{r+1} - c_{r-1}} \qquad 17)$$

so führt die Transformation zu der (der Gleichung 8) entsprechenden) Gleichung

$$\frac{(c_0 - d) P_r + b_1 c_0 \cdot Q_r}{P_r + b_1 Q_r} = \frac{b_2 c_0}{d + b_2 - c_1} + \cdots + \frac{b_r c_{r-2}}{d + b_r - c_{r-1}} + \frac{b_{r+1} c_{r-1}}{d + b_{r+1}} \qquad 18)$$

Nur für $d = 0$ tritt ein Ausnahmefall ein (entsprechend dem Falle $n - 1 = 0$ bei dem Kettenbruche S). Denn für diesen Werth von d hat der Kettenbruch 18) den constanten Werth c_0 und tritt ausser aller Beziehung zu dem Bruche 17), während letzterer (analog dem in Nr. 2 pag. 107 erhaltenen Resultate) den Werth annimmt

$$\cfrac{b_1 c_0}{b_2 - c_0 + \cfrac{b_2 c_1}{b_3 - c_1 + \text{etc.}}} = b_1 \cdot \frac{1 - \Sigma}{\Sigma}$$

wo

$$\Sigma = 1 - \frac{c_0}{b_2} + \frac{c_0 c_1}{b_2 b_3} - + \cdots$$

Uebrigens bestehen die Gleichungen 17) und 18) für jeden Index r zusammen und unter den in Nr. 3 gestellten Bedingungen lassen sich dieselben auf $r = \infty$ ausdehnen, ohne auf die im letzten Theilnenner des Kettenbruchs 18) stattfindende Unregelmässigkeit Rücksicht zu nehmen.

Setzt man c_i constant $= c$ und dehnt die Brüche in's Unendliche aus, so kommt man wieder auf den früher behandelten Kettenbruch in etwas anderer Form zurück.

Das Gesetz, nach welchem die Brüche 17) und 18) gebaut sind, zeigt sogleich, dass die rationale Verbindung, welche zwischen ihnen besteht, darin ihren Grund hat, dass beide aus Kettenbrüchen mit der doppelten Anzahl von Gliedern, welche nach demselben Gesetz fortschreiten und nur in den Anfangsgliedern differiren, durch verschiedene Zusammenfassung der Glieder hervorgehen. In der That sind diese Brüche 17) und 18), wenn wir $\frac{c_i}{d} = \gamma_i$ und $\frac{b_i}{d} = \beta_i$ setzen, resp. den folgenden gleich

$$-b_1 + \cfrac{b_1}{1 - \gamma_0 + \cfrac{1 - \gamma_0}{1 + \beta_2 + \cfrac{1 - \gamma_1}{1 + \ddots + \cfrac{-\gamma_{r-1}}{1 + \beta_{r+1}}}}}$$

und

$$c_0 - \cfrac{c_0}{1 + \beta_2 + \cfrac{1 - \gamma_1}{1 + \beta_3 \cdots + \cfrac{-\gamma_{r-1}}{1 + \beta_{r+1}}}}$$

welche sich nur in den ersten Gliedern unterscheiden.

Die vorhin behandelten Kettenbrüche S, S' befinden sich mithin auch in diesem Falle, was jedoch nicht leicht a priori zu erkennen ist, und auch weder von Euler noch von Stern, der sich, wie oben erwähnt, mit diesen Brüchen ebenfalls eingehend beschäftigt hat, nicht bemerkt worden zu sein scheint. Um das vorige auf diese Brüche anzuwenden, hat man zu setzen $c_i = 1$, $b_i = n + \alpha_{i-1}$, $d = 1 - n$, also $\gamma_i = \frac{1}{1-n}$, $\beta_i = \frac{n+\alpha_{i-1}}{1-n}$.

Nr. 6.

Diese Betrachtungen führen nun sogleich zu einer Lösung des Wallis'schen Problems. Da nemlich das Auseinanderziehen des Kettenbruchs (Auflösen in eine doppelte Anzahl von Gliedern) auf verschiedene Weise bewerkstelligt werden kann, so kann es kommen, dass ein Kettenbruch durch zwei verschiedene aufgelöste Formen mit einem gegebenen zweiten und dritten Kettenbruche in rationaler Verbindung steht und hierdurch auch eine Beziehung zwischen dem zweiten und dritten gegeben ist. Setzen wir z. B. in den Gleichungen 17) und 18) $c_i = b_{i+1}$, so werden dieselben

$$\frac{P}{Q} = \frac{b_1^2}{d+b_2-b_1} + \cdots + \frac{b_r^2}{d+b_{r+1}-b_r}, \qquad \frac{(b_1-d)P+b_1^2Q}{P+b_1Q} = \frac{b_1b_2}{d} + \cdots + \frac{b_{r-1}b_r}{d} + \frac{b_rb_{r+1}}{d+b_{r+1}}$$

Setzen wir aber $c_i = b_{i+2}$, so erhält man

$$\frac{p}{q} = \frac{b_1b_2}{d} + \cdots + \frac{b_rb_{r+1}}{d}, \qquad \frac{(b_2-d)p+b_1b_2q}{p+b_1q} = \frac{b_2^2}{d+b_2-b_3} + \cdots + \frac{b_r^2}{d+b_r-b_{r+1}} + \frac{b_{r+1}^2}{d+b_{r+1}}$$

Unter dem in Nr. 3 gemachten Vorbehalt können wir die Brüche in's Unendliche fortsetzen und erhalten sodann den Satz:

„Ist

$$\cfrac{b_1 b_2}{d + \cfrac{b_2 b_3}{d + \cfrac{b_3 b_4}{d + \text{etc.}}}} = S\,,$$

so ist

$$\cfrac{b_1^2}{d+b_1-b_2+\cfrac{b_2^2}{d+b_2-b_3+\text{etc.}}} = b_1 \cfrac{S+b_1}{S+d+b_1} \quad \text{und} \quad \cfrac{b_1^2}{d+b_2-b_1+\cfrac{b_2^2}{d+b_3-b_2+\text{etc.}}} = -b_1 \cfrac{S-b_1}{S+d-b_1}$$

(d = 0 ausgeschlossen); mithin ist auch

$$\frac{d}{2} - b_1 + \cfrac{b_1^2}{d+b_1-b_2+\cfrac{b_2^2}{d+b_2-b_3+\text{etc.}}} = \frac{d}{2} \cdot \frac{S+d-b_1}{S+d+b_1}\,,$$

$$\frac{d}{2} + b_1 + \cfrac{b_1^2}{d+b_2-b_1+\cfrac{b_2^2}{d+b_3-b_2+\text{etc.}}} = \frac{d}{2} \cdot \frac{S+d+b_1}{S+d-b_1}$$

und folglich das Product der zwei letzten Kettenbrüche immer

$$= \left(\frac{d}{2}\right)^2.“$$

In dem speziellen Falle, wo $b_i = 2i+1$ und d eine ganze gerade Zahl ist, hat man das Eingangs erwähnte Theorem von Wallis über das Product der zwei Kettenbrüche

$$\frac{d}{2} - 1 + \cfrac{1^2}{d-2+\cfrac{3^2}{d-2+\text{etc.}}} \times \frac{d}{2} + 1 + \cfrac{1^2}{d+2+\cfrac{3^2}{d+2+\text{etc.}}} = \left(\frac{d}{2}\right)^2$$

Für d = 4 ist der erstere dieser Brüche der von Brouncker gegebene, dessen Werth $\frac{4}{\pi}$ ist; man zieht hieraus für denselben Kettenbruch die Werthe entsprechend d = 8, d = 12, d = 16 u. s. f. nämlich π, $\frac{4^2}{\pi}$, $\frac{6^2}{4^2}.\pi$, u. s. f.

Zugleich gibt aber obiger Satz die entsprechenden Werthe des Kettenbruchs S, oder

$$S + d = s = d + \cfrac{1 \cdot 3}{d + \cfrac{3 \cdot 5}{d + \text{etc.}}}$$

und findet man für [1])

$$d = 4 \quad , d = 8 \quad , d = 12 \quad , d = 16$$

$$s = \frac{\frac{\pi}{2}+1}{\frac{\pi}{2}-1}, \quad s = \frac{\frac{\pi}{2}+\frac{2}{1}}{\frac{2}{1}-\frac{\pi}{2}}, \quad s = \frac{\frac{\pi}{2}+\frac{2.2}{1.3}}{\frac{\pi}{2}-\frac{2.2}{1.3}}, \quad s = \frac{\frac{\pi}{2}+\frac{2.2.4}{1.3.3}}{\frac{2.2.4}{1.3.3}-\frac{\pi}{2}}, \text{ u. s. f.}$$

Nr 7.

Einen anderen Satz dieser Art leiten wir aus den Gleichungen 17) und 18) ab, wenn wir einmal $c_i = c+ih$, $b_i = b+(i-1)h$ setzen, sodann $c_i = b+ih$, $b_i = c+(i-2)h$. Im ersten Falle erhalten wir

$$\frac{P}{Q} = \frac{bc}{g+h+\frac{(b+h)(c+h)}{g+h+\frac{(b+2h)(c+2h)}{g+h+\text{etc.}}}},$$

$$\frac{(b-g)P+bc.Q}{P+b.Q} = \frac{(b+h)c}{g+\frac{(b+2h)(c+h)}{g+\frac{(b+3h)(c+2h)}{g+\text{etc.}}}}$$

wo $g = d+b-c$; im zweiten Falle

$$\frac{p}{q} = \frac{b(c-h)}{g+\frac{(b+h).c}{g+\frac{(b+2h)(c+h)}{g+\text{etc.}}}}$$

$$\frac{(c-g)p+(c-h)b.q}{p+(c-h).q} = \frac{bc}{g-h+\frac{(b+h)(c+h)}{g-h+\frac{(b+2h)(c+2h)}{g-h+\text{etc.}}}}$$

wo $g = d-b+c$.

Sind die Bedingungen in Nr. 3 erfüllt und daher gestattet die Kettenbrüche in's Unendliche fortzusetzeu, so werden, wenn g in beiden

---

1) Euler hat die Werthe dieser Kettenbrüche aus Integralformeln gefunden. Opusc. Anal. T. I De seriebus etc. etc. p. 45.

Fällen denselben Werth hat, der zweite und dritte dieser Kettenbrüche bis auf das Anfangsglied im dritten gleich und man erhält sodann den Satz:

„Ist

$$S = \cfrac{(b+h)c}{g + \cfrac{(b+2h)(c+h)}{g + \cfrac{(b+3h)(c+2h)}{g + \text{etc.}}}}$$

so ist

$$\cfrac{bc}{g+h + \cfrac{(b+h)(c+h)}{g+h + \cfrac{(b+2h)(c+2h)}{g+h + \text{etc.}}}} = b \cdot \frac{c-S}{S+g-b},$$

$$\cfrac{bc}{g-h + \cfrac{(b+h)(c+h)}{g-h + \cfrac{(b+2h)(c+2h)}{g-h + \text{etc}}}} = b \cdot \frac{c+S}{S+g+b}$$

vorausgesetzt dass g nicht $= \pm (b-c)$ sei; und folglich ist dann auch

$$\frac{g+b+c}{2} + \cfrac{bc}{g+h + \cfrac{(b+h)(c+h)}{g+h + \text{etc.}}} = \frac{g-b+c}{2} \cdot \frac{S+g+b}{S+g-b};$$

$$\frac{g-b-c}{2} + \cfrac{bc}{g-h + \cfrac{(b+h)(c+h)}{g-h + \text{etc.}}} = \frac{g+b-c}{2} \cdot \frac{S+g-b}{S+g+b}$$

und das Product der beiden letzten Kettenbrüche immer

$$= \frac{g-b+c}{2} \cdot \frac{g+b-c}{2}.“$$

Der letztere Theil dieses Satzes, das Produkt der zwei Kettenbrüche betreffend, enthält nicht nur den Satz von Wallis als speziellen Fall in sich, sondern auch den Eingangs erwähnten allgemeinern von Euler gefundenen Satz [1]), welcher daraus hervorgeht, wenn man $h = b + c$ setzt.

1) Comment. Acad. Petropol. T. XI. § 45.

Anatomische Beschreibung

eines

mikrocephalen 8jährigen Mädchens

Helene Becker aus Offenbach

von

Dr. Th. L. W. v. Bischoff.

Anatomische Beschreibung

eines mikrocephalen 8jährigen Mädchens Helene Becker aus Offenbach

von

Dr. Th. L. W. v. Bischoff.

In den Jahren 1867 bis 1871 reisete in Deutschland ein Ehepaar, der Portefeuille-Macher Becker und seine Frau mit ihrem mikrocephalen Kinde herum und liessen dasselbe sehen, auch wurde dasselbe von vielen Anatomen, Physiologen und Aerzten untersucht. Von einigen derselben wurde der Fall auch schon öffentlich besprochen, z. B. übergab Prof. Schaffhausen, welcher das Kind im Mai 1867 sah, dem Vater desselben ein Promemoria, in welchem er sich über dasselbe aussprach und Dr. Büchner schrieb über das Kind eine Abhandlung in der Gartenlaube 1869, pag. 696. Auch ich sah und untersuchte am 15. Juni 1867 das Kind, als es 3 Jahre 11 Monate alt war. Am 20. Februar 1872 starb dasselbe bei seinen Eltern in Fechenheim bei Offenbach. Ich erwarb die Leiche desselben für die Münchner anatomische Anstalt und erhielt dieselbe so frisch, dass es mir möglich war, das Gehirn und die meisten Weichtheile noch im wohlerhaltenen Zustande zu untersuchen.

So viel ich weis, fehlt es in der Literatur noch an einer vollständigen anatomischen Beschreibung aller Theile eines Mikrocephalen, und ich halte es daher für nicht uninteressant, eine solche hier

in Kurzem zu geben, nachdem diese Mikrocephale in der neuesten Zeit in Beziehung auf die Abstammung des Menschen von den Affen, durch die bekannte Arbeit Carl Vogt's; Ueber die Mikrocephalen oder Affen-Menschen: Braunschweig 1867, ein erneutes Interesse gewonnen haben.

Helene Becker wurde am 22. Juni 1864 zu Offenbach geboren. Beide Eltern sind anscheinend ganz gesund, auch ist in ihren beiderseitigen Familien durchaus Nichts von Missbildungen bekannt. Die Mutter hatte schon vor der Helene zwei ganz gesunde Kinder geboren, welche auch noch leben. Während ihrer Schwangerschaft mit der Helene klagte sie viel über Schmerzen im Leibe und glaubt länger als normal, selbst gegen 11 Monate schwanger gewesen zu seyn (?). Die Geburt verlief übrigens normal. Nach der Helene gebar die Mutter noch drei Kinder, deren beide ersten wieder ganz normal waren und noch leben; das dritte, also im Ganzen das sechste Kind, welches im September 1870 geboren wurde, ist aber wiederum ein Mikrocephale, lebt noch und soll im Ganzen der Helene gleich, nur etwas mehr Intelligenz zeigen. Die Mutter will während dieser Schwangerschaft wieder mehr leidend gewesen sein, namentlich an der Leber, ist aber jetzt wieder ganz gesund.

Beide Eltern zeigen in ihrer Kopfbildung so wie in ihrem geistigen Wesen nichts Abweichendes und Auffallendes. Der Vater ist ein Dolichocephale, hat einen Kopfumfang von 56 Ctm. nnd würde daher unter Abrechnung von 23 Mm. für Haare und Kopfschwarte nach Welker's und meiner Berechnung (Sitzungsberichte k. b. Ak. d. W. 1864 I. 1) ein Hirngewicht von etwa 1400 Grm. besitzen. Die Protuberantia occipitalis externa ist stark an ihm entwickelt und asymetrisch etwas nach links gewendet. Den Kopf der Mutter habe ich nicht selbst untersucht; ihr Kopfumfang soll 50,3 Ctm. betragen, wonach ihr Hierngewicht, nach Abrechnung von 25 Mm. für Haare und Kopfschwarte, etwa 1168 Grm. sein würde.

Ich sah, wie schon bemerkt, das Kind zum ersten Male im Juni 1867, als es beinah 4 Jahre alt war, beobachtete dasselbe schon damals genau, nahm seine Kopfmaasse, und liess auch eine Büste von demselben anfertigen, deren Schädeldach wenigstens ein über eine dünne, festanliegende gestrickte Kindermütze gemachter Abdruck ist. Ausserdem habe ich von dem Vater möglichst genaue Erkundigung eingezogen,

wonach sich denn über das Verhalten des Kindes während des Lebens Folgendes ergiebt.

Das Kind Helene Becker zeigte während seines ganzen Lebens die im Allgemeinen bei allen Mikrocephalen zu beobachtende mangelhafte geistige Entwicklung in hohem Grade, und wurde in dieser Hinsicht auch während seines ganzen Lebens kaum ein Fortschritt bemerkt. Lust und Schmerz, Freud und Leid, waren eigentlich die einzigen Aeusserungen physischer Thätigkeit, welche an demselben zu beobachten waren. Es war gerne geliebkost und geschmeichelt, und unterschied, wenn man mit ihm zankte; dann fing es an zu weinen und wurde zornig, aber man konnte durch Liebkosen oder Zanken Nichts weiter von ihm erreichen, z. B. wenn es sich beschmutzt hatte. Unter den Personen, welche mit ihm umgingen, Vater, Mutter, Geschwister oder Fremden machte es gar keinen Unterschied, liess sich von Fremden z. B. ebenso gut auf den Arm nehmen als von seinen Angehörigen und zeigte an Niemand eine besondere Anhänglichkeit. Seinen Namen kannte das Kind und hörte darauf, selbst wenn man es nicht dabei ansah, legte aber gar kein Gewicht auf das, was man sagte Bei Anrufen mit einem anderen Namen, beobachtete es denselben nicht. Von einem Gedächtniss zeigte es nie eine Spur. Es liess sich nie erkennen, dass es etwas wieder erkannte, was es früher gesehen oder gehört oder gefühlt hatte.

Das Kind konnte nie auch nur ein einziges Wort sprechen, dagegen sehr laut schreien. Es gab vorzüglich zwei Laute von sich, einen Gaumenlaut wie „Eng“, und einen Nasenlaut wie „A“. Beide Laute waren Freude- und Wohlbehagen-Laute. Im Gegentheil bei Schmerz und Zorn gab es einen sehr scharfen schreienden Ton von sich. Es hat nie durch irgend einen Laut verrathen, dass und wann es etwas wollte. Wenn man ihm etwas vorhielt, so griff es wohl danach, besonders wenn es eine lebhafte, namentlich rothe Farbe hatte, schleuderte es hin und her und warf es weg.

Das Kind konnte auf dem linken Auge ganz gut sehen und richtete dieses Auge auf ihm vorgehaltene Gegenstände. Es bemerkte dieselben schon auf Zimmerlänge, allein um etwas genauer zu sehen, musste man ihm nahe beikommen. Farben unterschied es, und liebte wie gesagt, helle, glänzende und besonders rothe Gegenstände. Auf dem rechten

Auge war dasselbe blind, wahrscheinlich in Folge einer frühzeitig abgelaufenen inneren Augenentzündung, wie die später anzugebende Beschaffenheit dieses Auges lehrte. Auch das linke Auge litt zuweilen an Conjunctivitis, aber ohne nachtheilige Folgen zu hinterlassen.

Das Gehör des Kindes war ganz gut und wie es schien, auf beiden Ohren. Wenn man es anrief, sah es den Rufenden an und machte eine freundliche Miene. Eine Orgel auf der Strasse hörte es sehr gut, hob den Kopf auf und machte mit den Händen Bewegungen, wie der Vater meinte, selbst nach dem Tacte, es gab dabei öfter einen Laut des Wohlgefallens von sich. Grelle Töne und Hundegebell waren ihm sehr zuwider und unangenehm; es fing an zu schreien und fuhr mit beiden Händen nach den Ohren. Ebenso wenn es schrie und man ihm lebhaft „Bst" zurief, wonach es meist still wurde.

Das Kind hatte einen gut entwickelten Geruchssinn und unterschied wohl- und übelriechende Gegenstände sehr wohl, z. B. wenn man ihm ein Fläschchen mit kölnischem Wasser hinhielt, zog es die Luft ein und fuhr mit dem Munde nach dem Fläschchen; bei einer Zwiebel dagegen zog es den Kopf zurück. Im Jahre 1867 blieb es mir indessen zweifelhaft, ob Asa foetida oder Anisöl einen unangenehmen oder angenehmen Eindruck machten. Im gewöhnlichen Leben verrieth es ausserdem keinen Geruchsinn, z. B. wenn es sich verunreinigt hatte, wobei es unbedenklich mit den Händen in den Koth fuhr.

Die Haut des Kindes war sehr empfindlich gegen Berührung, Kneifen oder Stechen mit einer Nadel, wobei es Hand und Arm, selbst den ganzen Körper zurückzog; wie der Vater (welcher allmählig etwas physiologisch geworden war) behauptete, nicht reflectorisch, indem es überhaupt keine Neigung zu reflectorischen Bewegungen gehabt habe. Prof. Schaaffhausen hielt dagegen diese Bewegungen für reflectorische, zu denen das Kind, wie immer, wenn der Gehirn-Einfluss gemindert ist, eine grosse Neigung gehabt habe. Das Kind hatte sehr ungern Kleider und noch ungerner Schuhe an, so dass es sich sehr schwer anziehen liess, und in den letzten Zeiten gar keine Schuhe mehr trug. Das Kind hatte keine besondere Neigung zum Schwitzen.

Das Kind verrieth niemals ein Bedürfniss nach Nahrung und Getränken, selbst das Sehen von Speisen machten gar keinen Ein-

druck auf dasselbe. Es musste beständig gefüttert werden, verlangte nie nach Essen und ass nie allein. Dagegen machte dasselbe allerdings einen Unterschied in dem Essen und besass offenbar einen ziemlich entwickelten Geschmacksinn. Es liebte pikante Speisen und gab durch Schmatzen mit den Lippen, Schlagen mit der Hand auf die Brust, wie der Vater behauptete, ohne dass ihm Jemand diese Bewegung vorgemacht, Zeichen von Wohlgefallen von sich. Es ass lieber Fleisch, besonders Kalbsbraten mit Sauce und Leberwurst, als Brod und Gemüse. Es trank nicht gerne Wasser, machte sich nichts aus Milch, liebte auch nicht Wein, wohl aber Kaffee. Es kaute nicht gern und spie harte Speisen wieder aus. Die Ernährung des Kindes war übrigens schlecht; es war abgemagert und schwach; die Eigenwärme war gering. Die Hände und Füsse wurden leicht kalt und blau.

Die Energie der Herzthätigkeit war gering; der Puls zeigte gewöhnlich 132, bei längerer Ruhe 116 Schläge in der Minute.

Die Verdauung war übrigens gut; Oeffnung erfolgte meist einmal täglich, wobei aber das Kind gar kein Zeichen der Nothdurft gab, sondern den Koth immer unter sich gehen liess. Dasselbe war mit dem Uriniren der Fall, und alle Bemühungen in diesen Hinsichten, das Kind an Reinlickheit zu gewöhnen, waren vergebens.

Bei dem Waschen der Genitalien bemerkte man Aeusserungen von Wollustgefühl; dessgleichen brachte das Kind die Hände oft an die Genitalien, um sich daselbst zu kitzeln und äusserte dabei angenehme Gefühle. Wenn es daran gehindert wurde, zeigte es nicht das mindeste Schamgefühl, oder suchte die Manipulation zu verbergen, sondern brachte die Hände gleich wieder an die Genitalien, wenn man ihm nicht die Hände auf die Bettdecke legte, wo es denn dieselben nicht sogleich wieder herunter zu bringen vermochte.

Das Kind zeigte, so lange es lebte eine sehr grosse, ja fast beständige Unruhe und Beweglichkeit, aber ohne es jemals zu irgend welchen zweckmässigen Bewegungen zu bringen. Es lernte nie stehen und gehen, ja machte nicht den mindesten Versuch dazu, sodass es stets zu Bette lag oder in einem Stühlchen sass. Die Unruhe in den Beinen war überhaupt nicht so gross als die in Händen, Armen und dem Oberkörper überhaupt. Diese Bewegungen hatten aber nie einen

Zweck. Das Kind griff wohl nach Gegenständen, besonders glänzenden, und hellgefärbten, führte sie auch wohl nach dem Munde, schlenkerte sie aber meist nur hin und her und liess sie wieder fahren, ohne im Mindesten darauf zu achten. Es zeigte nie durch Bewegungen oder auf irgend eine Weise, dass es etwas wollte, z. B. eine Puppe oder andere Gegenstände, mit welchen seine Geschwister spielten. Es hat nie eine geregelte Bewegung gelernt und ausgeführt.

Der Schlaf des Kindes war zu allen Zeiten sehr mangelhaft, so zu sagen keiner, es war Tag und Nacht gleich unruhig. Zuweilen schloss es die Augen und war ruhig, aber nach kurzer Zeit, bei der geringsten Berührung oder Geräusch, wachte es wieder auf. Morgens gegen 8 bis 9 Uhr war es am ruhigsten und schlummerte $^1/_4$ oder $^1/_2$ Stunde. Während des Schlummers machte es Zuckungen und Bewegungen; ob es dabei etwas träumte, liess sich nicht erkennen.

Die Helene Becker war während ihres Lebens öfters krank, wie es scheint, meist an Katarrhen, Bronchitis und öfteren Augenentzündungen. In seinen letzten Lebensjahren wurde es rachitisch. Dr. Büchner bemerkte rachitische Auftreibung der Gelenke, als das Kind $6^1/_2$ Jahr alt war. In dem letzten halben Lebensjahre scheint die Rachitis rehr zugenommen zu haben, in der Art, dass das Kind ganz gelähmt wurde, während die Extremitäten sehr schmerzhaft wurden. In der allerletzten Lebenszeit scheint dann noch ein Lungenleiden hinzugekommen zu sein, welches dem Leben am 20. Februar 1872 ein Ende machte. In dem unteren Lappen der rechten Lunge fand sich eine Caverne, die aber nicht näher untersucht wesden konnte, weil sich bei der Injection der Leiche die Injectionsmasse in dieselbe entleert hatte, wodurch die Injection vereitelt wurde. Die Gliedmassen der Leiche so wie die Wirbelsäule waren ganz verkrümmt und dermassen brüchig, dass bei dem öfteren Herausnehmen der Leiche aus dem Kasten mit Spiritus, in welchem sie während der Präparation der Muskeln aufbewahrt wurde, die Extremitäten mehreremale brachen.

Wegen dieser grossen Verkrümmung der Leiche haben ihre Maasse im Ganzen und Einzelnen, mit Ausnahme des Schädels kein besonderes Interesse. Ebensowenig das Gewicht des sehr abgemagerten und elenden

Körpers. Doch betrug die Länge des ganzen Körpers 78,2 Ctm. Das Gewicht des ganzen Körpers 7400 Grm.; nicht ganz 15 Pfd.

Gleich nach Ankunft der Leiche wurde der Schädel geöffnet, das Gehirn herausgenommen, gewogen, erst in Chlorzink und später nach Entfernung der Arachnoidea und Pia mater in Weingeist gelegt und mässig erhärtet. Dann wurde eine Wachsinjection durch eine A. Carotis unternommen, welche aber wie gesagt, durch Extravasation in die rechte Lunge missglückte. Die Leiche wurde hierauf exentrirt, die einzelnen Organe gewogen, gemessen und vorläufig untersucht und dann, so wie die ganze Leiche in Spiritus aufbewahrt.

Da Maass und Gewichtsangaben von Kinderleichen, namentlich von bestimmtem Alter, in der Literatur selten sind, da ferner wenigstens bei uns in München, sehr selten, ja man kann sagen nie, Kinderleichen auf die anatomische Anstalt gelangen, mir aber Vergleiche von Leichen normaler 7—8jähriger Kinder mit der Leiche der Helene Becker rücksichtlich aller Körperorgane werthvoll erschienen, so wendete ich mich an verschiedene meiner Herren Collegen mit der Bitte, mir eine Section eines 7 oder 8jährigen Kindes möglich zu machen. Diese Bitte fand auch Erfüllung durch Herrn Professor Heinr. Ranke und Herrn Professor Hauner, durch deren Güte ich selbst die Section der Leiche eines 7jährigen Knaben anstellen konnte, während die eines 8jährigen Mädchens, da ich erkrankt war, durch Hrn. Prof. Rüdinger ausgeführt wurde.

I. Das Gehirn.

Das Gehirn der mikrocephalen Helene Becker wog frisch aus dem Schädel genommen, mit der Arachnoidea und Pia mater 219 Gramme. Nachdem dasselbe einige Tage in Chlorzink gelegen, die Häute entfernt waren und dasselbe etwa 14 Tage in 50—60° Spiritus aufbewahrt worden, wog es nur noch 111 Grm., hatte also fast die Hälfte seines Gewichtes verloren, woraus sich wohl entnehmen lässt, dass dasselbe einen grossen Wassergehalt besessen, denn die Häute waren nicht etwa besonders verdickt, auch kein Oedem vorhanden. Das Gehirn war daher, mit Ausnahme des von Dr. Sander beschriebenen, das leichteste

Mikrocephalen - Gehirn, welches bis jetzt gewogen wurde. Der weiteren Untersuchung, Photographirung und Modellirung wegen, wollte ich das kleine Gehirn damals frisch nicht vom grossen trennen. Ich that dieses erst dann, als das Ganze nur noch 111 Grm. wog, und führte den Schnitt so, dass er oben vor das vordere Vierhügelpaar, unten an den vorderen Rand der Brücke fiel. Das kleine Hirn, Brücke, Vierhügel und Medulla oblongata wogen nun 27 Grm., d. i. nahezu $^1/_4$ oder 25% des ganzen Hirns.

Zur Vergleichung füge ich hinzu, dass das Gehirn des an tuberculoser Peritonitis verstorbenen 7jährigen Knaben, dessen Section ich der Güte des Hrn. Prof. Heinr. Ranke verdanke, gleich bei der Herausnahme aus dem Schädel 1365 Grm. wog. Da ziemlich starkes Oedem vorhanden war, so verminderte sich dieses Gewicht durch Ablaufen der Flüssigkeit in einigen Stunden auf 1338 Grm. und nachdem das sehr weiche Gehirn 9 Tage in Chlorzink gelegen hatte, wog es nur noch 1095 Grm. Durch längeres Liegen in 50—60gradigem Spiritus verminderte sich auch dieses Gewicht noch auf 768 Grm. Kleines Gehirn, Vierhügel, Brücke und verlängertes Mark wogen jetzt 82 Grm., betrugen also mehr als $^1/_8$ oder 12% des ganzen Hirns. Die Körperlänge dieses Knaben betrug 100,6 Ctm.; die Leiche war äusserst abgemagert.

Das Hirngewicht des achtjährigen ebenfalls tuberculosen Mädchens, dessen Leiche 7400 Grm., also gerade soviel als die der Helene Becker wog und 98,2 Ctm. lang war, und dessen Section durch Hrn. Professor Rüdinger, Hr. Prof. Hauner freundlichst möglich machte, betrug ganz frisch 1063 Grm.; nach Abfluss einiger auch hier vorhandener ödematöser Flüssigkeit 1050 Grm., und nach Entfernung der Pia mater und längerem Liegen in Chlorzink und Spiritus 640 Grm. Kleines Hirn, Vierhügel, Brücke und verlängertes Mark wogen jetzt 82 Grm., also etwas weniger als $^1/_8$ oder 13% des ganzen Hirns.

Bei dem früher (Sitz.-Ber. der math.-phys. Klasse der bayr A. d. W. 1871, 4. Febr p. 98) von mir beschriebenen, etwa vierjährigen Chimpanse-Gehirn beträgt das kleine Gehirn mit Vierhügel, Brücke und Medulla oblongata 21% des grossen; beim Orang nach R. Wagner 20%. bei dem Hylobates (S. meine Beiträge zur Anat. des Hylobates leuciscus in den Abhandlungen d. k. bayr. Akad. d. W. II. Cl. X. Bd. III. Abth.) 25%.

Das Gehirn der Helene Becker besitzt äusserlich ein ganz normales Ansehen, und trägt nirgends ein Merkmal eines pathologischen Processes oder einer Zerstörung einzelner Theile durch einen solchen an sich. Es gleicht vielmehr im Ganzen irgend einem normalen Thier-Gehirn und wie sich gar nicht läugnen lässt, dem eines Affen, etwa von der Grösse eines Cynocephalus. Der Stirntheil der grossen Hemisphären ist nach vorne zugespitzt und läuft nach vorn und unten in einen Schnabel aus. Der hintere Theil ist schwach entwickelt, so dass das kleine Gehirn, von oben und hinten betrachtet, vortritt. Die Schläfenlappen sind besonders in ihrem vorderen Theile stark entwickelt. Das kleine Gehirn, Vierhügel, Brücke, Medulla oblongata sind stark und anscheinend ganz normal ausgebildet. Alle zwölf Hirnnerven sind verhältnissmässig entwickelt vorhanden. Die Hypophysis cerebri ist ansehnlich gross.

Der Beschreibung der grossen Hemisphären, ihrer Eintheilung in Lappen und der Anordnung ihrer Windungen schicke ich Folgendes voraus.

Ich habe mich in meiner Abhandlung: Die Grosshirnwindungen des Menschen: Abhandl. d. k. bayr. A. d. W. Bd. X. Abth. II. p. 411 ausführlich darüber ausgesprochen, dass für die Eintheilung der Grosshirnhemisphären in Lappen mit Benennungen, die der Zusammensetzung des Schädels entsprechen, kein genetischer Grund vorhanden ist, sondern dass ein solcher nur in dem Auftreten der hauptsächlichen und typischen Furchen zu finden ist. Da es sich nun aber zeigt, dass die letzteren dennoch wenigstens einigermassen mit den Schädelnäthen zusammenfallen und wir einmal gewohnt sind, die Regionen des Schädels nach seiner Zusammensetzung aus den einzelnen Knochen zu bezeichnen, so erscheint es des praktischen Gebrauches wegen durchaus angemessen, auch die Bezeichnung der Grosshirnlappen der letzteren möglichst anzupassen.

Ich bleibe desshalb bei meiner früher aufgestellten Lehre, die Stirnlappen durch die vordere Centralwindung oder durch den Sulcus praecentralis oder antero-parietalis nach hinten abzugränzen, obgleich Ecker und Andere sich dagegen erklärt haben, und die Centralfurche als Gränze annehmen. Das System der beiden Centralwindungen wird

indessen dadurch auf eine unnatürliche Weise zerrissen, indem die vordere zu den Stirnwindungen, die hintere zu den Scheitelwindungen gerechnet wird, und ebenso wird dadurch die hintere Gränze der Stirnlappen unnatürlich weit nach hinten verlegt. Wie weit man dabei gelangen kann, zeigt Dr. J. Jensen, welcher in seiner Abhandlung: Die Furchen und Windungen der menschlichen Grosshirn - Hemisphären, Berlin 1871, aus der Zeitschrift für Physiatrie, Bd. 27, sogar noch einen Theil der hinteren Centralwindung zum Stirnlappen rechnen will, weil an der medialen Seite der Hemisphäre der Sulcus calloso-marginalis hinter dem medialen Ende der Centralfurche aus der Tiefe auftaucht, und in radiärer Richtung den oberen Hemisphärenrand erreicht. Diese Angabe ist allerdings richtig und verdient Beachtung; allein wenn man danach die Ausdehnung des Stirnlappens bestimmt, so reicht derselbe in den meisten Fällen weit über die Mitte der Hemisphären in eine Gegend nach hinten hinaus, welche kein Mensch auch nur entfernt noch als Stirn bezeichnet. Die Betrachtung der ersten Figur Jensens, wo die Gränze der Stirnnath mit Punkten, das obere hintere Ende des Sulcus Calloso marginalis mit cm bezeichnet ist, zeigt recht deutlich das Unnatürliche dieser Abgränzung.

Was ferner die typischen Furchen der Hemisphären betrifft, so bleibe ich auch dabei, dass Turners Sulcus praecentralis oder Eckers anteroparietalis vor der vorderen, und der Sulcus interparietalis hinter der hinteren Centralwindung, keine typischen in dem Sinne sind, dass sie an dem ausgebildeten Gehirne als besondere Trennungsfurchen hervorzuheben und zu benutzen sind. Allerdings entsprechen ihnen in ihrem Ausgange die beiden auch von mir erkannten und beim Fötus-Gehirne l. l. Tab. IV. fig. 9, a u. b aufgestellten typischen Radiärfurchen. Allein diese gestalten sich im weiteren Fortgange zu Bogenfurchen, von denen die vordere die dritte Stirnwindung von der zweiten, und die hintere, meine zweite Scheitelbogen-Windung, von der oberen inneren Scheitelwindung, dem Vorzwickel, abgränzt. Die erstere zieht sich nie vor der vorderen Central-Windung in die Höhe, was schon daraus hervorgeht, dass die erste und zweite Stirnwindung fast ausnahmslos mit einer oder zwei Wurzeln von der vorderen Centralwindung ausgehen. Bei der hinteren Bogenfurche entsteht schon eher der Anschein einer Fortsetzung

nach oben längs der hinteren Centralwindung, weil in der That sich ein Zweig von ihr häufig in der genannten Richtung nach oben erstreckt. Aber ebenso oft ist dieses nicht der Fall, wenn die obere innere Scheitelwindung (Vorzwickel) mit zwei Wurzeln von der hintern Centralwindung ausgeht. Ich erkenne also den Sulcus praecentralis und interparietalis nur insofern an, als sie mit meinen allerdings für die Gestaltung der Windungen sehr wichtigen vorderen und hinteren embryonalen Bogenfurche übereinstimmen.

Dagegen halte ich es für ganz zweckmässig, den hinteren Theil der an der medialen Fläche des Hinterlappens verlaufenden Furche, nicht mehr Fissura Hippocampi, sondern mit Huxley, Ecker und Jensen Fissura calcarina zu nennen. Ich hatte jene Bezeichnung aus Rücksicht für Gratiolet beibehalten, da er in der That diese wichtige und typische Furche zuerst in ihrer Bedeutung hervorhob, sie aber mit der Fissura transversa cerebri magna zusammenfallen liess und beide Fissura Hippocampi nannte. Da aber beide doch ganz wesentlich von einander getrennt und verschiedene sind, und Ecker der Fissura transversa ganz passend den Namen Fissura Hippocampi gegeben hat, so werde ich um so mehr jetzt ebenfalls jenen hinteren Theil der Spalte Fissura calcarina nennen, als in der That ihr Einwärtsdringen den Calcar avis in dem Hinterhorn der Seitenventrikel hervorbringt.

An meiner Anschauung der Bogenbildung der Windungen um die Enden der hauptsächlichsten Furchen herum, halte ich aber fest, obgleich Ecker und Henle ihr keine Bedeutung beigelegt haben; ja ich glaube vielmehr, dass Jensen Recht hat, mir vorzuhalten, dass ich dieser Anschauung keine noch grössere und allgemeinere Anwendung gegeben habe. Ich mache fortwährend die Erfahrung, dass diese Anschauung die Orientirung in der Anordnung der Windungen, die Verständigung über dieselben und die Beschreibung derselben so sehr erleichtert, dass ich nicht zweifle, dieselbe werde dennoch, wenn nicht durch noch etwas Besseres, als wir bis jetzt besitzen, ersetzt, endlich den Sieg davontragen.

Was nun die Hauptfurchen des Gehirns der Helene Becker betrifft, so ist die Fossa Sylvii in ihrem horizontal an der untern Fläche der Hemisphären verlaufenden Stamme (4.) ganz gut entwickelt. Auch der nach hinten aufsteigende Schenkel (6.) ist, wenngleich kurz und

nicht weit an den Seiten der Hemisphären heraufreichend, doch ziemlich tief. Der vordere Schenkel fehlt dagegen fast ganz, und ist nur durch eine kleine schwache Furche angedeutet, um welche eine kurze, wenig ausgesprochene Windung herumläuft. Man sieht das nur, wenn man den Schläfenlappen stark zurückdrängt, und die Abbildungen geben daher dieses Verhalten nicht. Auf der rechten Seite könnte man glauben, bei (α) einen vorderen Schenkel der Fossa Sylvii und um ihn herum die dritte Stirnwindung zu sehen. Allein wenn man genau untersucht, so sieht man, dass dieser scheinbare vordere Schenkel nur eine Secundär-Furche ist, welche das untere Ende der vorderen Centralwindung von der zweiten Stirnwindung abtrennt. Der wirkliche schwache vordere Schenkel der Fossa Sylvii kommt erst zum Vorschein, wenn man, wie gesagt, die Spitze des Schläfenlappens zurückdrängt. Dass diese Ansicht die richtige ist, ergiebt sich vorzüglich durch den Vergleich mit der linken Seite. Hier greift die das untere Ende der vorderen Centralwindung von der zweiten Stirnwindung abtrennende Furche nach unten nicht durch, und damit verschwindet der Schein, als wenn sie der vordere Schenkel der Fossa Silvii sei. Dieser selbst wird aber auch hier auf der linken Seite dann sichtbar, wenn man die Spitze des Schläfenlappens zurückdrückt.

Es verhält sich also die Fossa Sylvii wie bei den Affen, bei welchen entweder der vordere Schenkel ganz fehlt, oder auch nur schwach entwickelt ist, wie bei den Anthropoiden. Die Auffassung Vogts, als wenn bei den Affen der Stamm der Fossa Silvii fehle und dieselbe deshalb die Gestalt eines V habe, während sie bei dem Menschen die Gestalt eines Y habe, ist ganz irrig. Der Stamm oder der horizontal an der Basis des Gehirns zwischen Stirn und Schläfenlappen verlaufende Theil der Furche, ist auch bei allen Affen vorhanden; der vordere Schenkel aber, wie gesagt, fehlt entweder ganz oder ist nur rudimentär.

Die Centralfurche (1.) ist vorhanden und zwar links in ganz normaler Weise; rechts weniger deutlich, weil hier die vordere Centralwindung, wie ich später angeben werde, entweder fehlt oder wenigstens anomal verläuft. Dass ich eine Fissura praecentralis gar nicht anerkenne, habe ich schon oben gesagt; in der That ist hier auch nicht einmal ihr Schein vorhanden. Eine Fissura interparietalis

könnte man dagegen eher, besonders auf der linken Seite anzunehmen geneigt sein, weil die obere Scheitelwindung (Vorzwickel c) nur oben und unten mit der hinteren Centralwindung in Verbindung steht, sonst aber durch eine hinter derselben in die Höhe, nicht aber auch nach hinten verlaufende Furche vor ihr getrennt ist. — Eine Fissura occipitalis perpendicularis interna (2) ist auf beiden Seiten vorhanden; rechts greift sie auch in die an der medialen Seite des Hinterlappens verlaufende Fissura calcarina ein, links dagegen wie bei den meisten Affen nicht. Eine Fissura occipitalis perpendicularis externa (2') ist insoferne vorhanden, als das obere Ende der perpend. interna weit nach aussen durchgreift, weil dasselbe nicht durch eine obere Bogenwindung abgeschlossen wird. Doch dringt sie nicht so weit bis an den Rand der Hemisphäre vor, wie das bei den Affen der Fall ist. Eine Fissura parallela (11.) ist insofern vorhanden, als längs der lateralen Seite beider Schläfenlappen eine Längsfurche verläuft, welche indessen nach hinten bis auf den Hinterlappen durchgreift und hier nicht durch eine Bogenwindung abgeschlossen wird. Eine Fissura parallela secunda kann nicht wohl angenommen werden, obwohl auf der linken Seite an der lateralen Seite des Schläfenlappens eine der ersten Parallelfurche zweite parallele verläuft. Die Fissura calcarina (7) ist normal und ansehnlich tief entwickelt, geht indessen nicht direct in die Fiss. Hippocampi (8) über, und auf der linken Seite geht auch, wie gesagt, die Fiss. occ. perp. interna nicht in sie über. An der hinteren Spitze der Hemisphäre läuft sie einfach aus, ohne sich gabelförmig zu spalten. Die Fissura calloso marginalis (9) an der medialen Seite der Hemisphäre ist ganz normal entwickelt.

Nach diesem Verhalten der Hauptspalten und Furchen, lässt sich schon erwarten, dass auch die Eintheilung der Hemisphären in Lappen annäherungsweise die normale sein wird. Die Stirnlappen sind klein und dürftig, von den Seiten nach vorne zugespitzt und laufen vorne und unten in einen sich bis zur tiefgelegenen Lamina Cribrosa fortsetzenden Schnabel aus. Die Scheitellappen sind verhältnissmässig gross und sind nach hinten durch das obere Ende der Fiss. occ. perpend. interna gut von den Hinterlappen getrennt, weniger dagegen an der lateralen Seite von diesem und den Schläfenlappen. Der Hinterlappen

ist klein und an seiner unteren Fläche sehr wenig von dem Schläfenlappen getrennt, diese Trennung wird vielmehr nur durch den dem obern Winkel der Pyramide des Felsen-Beines entsprechenden Eindruck angedeutet. Der Schläfenlappen, der nach hinten weder von dem Hinterlappen noch Scheitellappen deutlich abgetrennt ist, ist in seinem vorderen, den Stamm der Fossa Silvii deckenden Theile, stark entwickelt. Ein Stammlappen fehlt so zu sagen ganz, und ist nur durch eine windungslose schwache Erhabenheit an dem Uebergang des Stammes der Fossa Sylvii in ihren hinteren Schenkel angedeutet.

In Beziehung auf die Windungen der grossen Hemisphären, so erscheint es zweckmässig, zunächst hervorzuheben, dass sich die vordere Centralwindung (d) auf der rechten Seite ganz anders, als auf der linken, und so ungewöhnlich verhält, dass man eigentlich sagen muss, sie fehlt auf der rechten Seite. Links zeigen sich beide Centralwindungen wie gewöhnlich angeordnet, haben ihren oberen und unteren Bogenabschluss und von der vorderen gehen die Wurzeln der ersten und zweiten Stirnwindungen, wie gewöhnlich aus. Rechts aber ist die vordere Centralwindung so in die erste und zweite Stirnwindung hineingezogen, dass sie mehr zu diesen zu gehören, als selbstständig vorhanden zu sein scheint. Ihr Verlauf ist namentlich durch eine starke Einwärts-Knickung in ihrer unteren Hälfte so unterbrochen, dass ihre weitere Fortsetzung mehr der zweiten Stirnwindung als der vorderen Centralwindung selbst anzugehören scheint.

Dieses Verhalten der vorderen Centralwindung wirkt natürlich auf das der Stirnwindungen. Auf der linken Seite steht die erste Stirnwindungen (a) mit der vorderen Centralwindung mit zwei Wurzeln, dann in ihrem weiteren Verlaufe vorn mit der zweiten Stirnwindung in Verbindung und verhält sich überhaupt sowohl an der medialen als unteren Seite ganz wie gewöhnlich. Auf der rechten Seite ist dieses nicht der Fall und je nachdem man an einer vorderen Centralwindung festhält, oder sie in die Stirnwindungen ganz aufgehen lässt, würde die Beschreibung ganz verschieden ausfallen, was ich wohl am Besten der der Betrachtung der Abbildung überlasse. Das Verhalten der zweiten Stirnwindung (b) möchte ich auch nur als ein gewöhnliches bezeichnen. Sie steht links mit der vorderen Centralwindung mit doppelter

Wurzel in Verbindung, biegt sich vorne auf die Orbitalfläche herum gegen den Stamm der Fossa Sylvii hin, und trägt an der Orbitalfläche einige tiefe Furchen. Rechts verhält sie sich danach anders, je nachdem, wie oben erwähnt, entweder das ganze untere Ende der vorderen Centralwindung als in sie übergehend betrachtet wird, oder dass man sie breit mit einer Wurzel von diesem unteren Ende der vorderen Centralwindung ausgehen lässt.

Die Hauptsache in Betreff der Stirnwindungen ist die, dass die dritte Stirnwindung fast ganz fehlt. Ich betrachte dieselbe, wie meine früheren Mittheilungen dargelegt haben, als eine um den vorderen Schenkel der Fossa Sylvii herumgelegte Bogenwindung, welche vorzüglich charakteristisch für den Menschen ist, und durch ihre starke Entwicklung die Breite der menschlichen Stirn und Stirnlappen bedingt. Bei den niederen Affen fehlt sie ganz, bei den Athropoiden ist sie durch eine einzige schwache Windung angedeutet. Nicht einmal so deutlich wie bei dem Hylobates, findet sie sich hier bei unserer Helene. Auf der rechten Seite könnte man sich, wie oben schon erwähnt, leicht täuschen lassen und glauben (bei α), einen kurzen vorderen Ast der Fossa Sylvii und eine dritte Stirnwindung um dieselbe herum zu sehen. Allein wenn man sorgfältiger zusieht, so überzeugt man sich, dass man es hier nur mit dem unteren Bogenabschluss der Centralspalte und der Abtrennung dieses Bogens durch eine Secundärfurche von der zweiten Stirnwindung zu thun hat. Ein Blick auf die linke Seite, wo die Sache sich etwas anders verhält, und ein Vergleich mit der rechten, überzeugt hievon sogleich. Man muss vielmehr in die Fossa Sylvii eindringen und die vordere Spitze des Schläfenlappens zurückdrängen, um dann eine nur sehr schwach angelegte, den ganz schwachen vorderen Ast der Fossa Sylvii darstellende Furche und um sie herum eine schwach ausgebildete kleine Windung zu erkennen, welche die dritte Stirnwindung repräsentirt. In diesem Rudiment findet sie sich auf beiden Seiten. An den Abbildungen liess sich dies nicht darstellen.

In Beziehung auf die Scheitelwindungen sind ausser den schon beschriebenen beiden Centralwindungen, zunächst die beiden Vorzwickel (e) durch eine von dem oberen Ende der hinteren Centralwindungen ausgehende Windung repräsentirt, welche um das obere hin-

tere Ende der Fissura calloso marginalis herumgeht, und scheint mir jetzt diese Anordnung, allerdings gewöhnlich in viel complicirterer Weise, die wahre Natur dieses Vorzwickels darzustellen. An der medialen Seite steht der Vorzwickel mit dem Gyrus Cinguli und durch die innere untere Scheitelbogen-Windung mit dem Zwickel in Verbindung. Die erste Scheitelbogen-Windung (f) ist auf beiden Seiten durch eine kurze, das Ende des hinteren Astes der Fossa Sylvii abschliessende Windung gegeben. Auch die zweite Scheitelbogenwindung (g) ist auf beiden Seiten angedeutet; allein bei der abweichenden Anordnung der Parallelspalte ist auch sie, die überhaupt immer am schwierigsten zu analysiren ist, nur in einer kleinen Bogenwindung zu erkennen, indem ihre übrigen Bestandtheile in Verbindungs-Windungen mit dem Vorzwickel, der ersten Scheitelbogen-Windung, und den Schläfen und Hinterlappen-Windungen in unregelmässiger Weise aufgehen. Eine innere obere Scheitelbogen-Windung (Premier Pli de Passage externe) fehlt auf beiden Seiten ganz und findet sich weder in lateralem Verlauf (als Premier Pli de Passage supérieur externe), noch in verticalem Verlauf (als Premier pli de Passage supérieur interne). Daher steht, wie ich oben schon angegeben, die Fiss. occipit. perp. interna hier oben weit offen, und ist dieser Mangel eine weitere ganz besondere Eigenthümlichkeit dieses mikrocephalen Gehirns. Man darf sich dabei nicht durch eine hinter der Fiss. occip. perp. interna gelegene, schon dem Hinterlappen angehörige, lateral um eine an der Medial-Fläche heraufsteigende Furche verlaufende Windung (h), täuschen lassen; sie ist die innere obere Scheitelbogenwindung nicht, welche um das obere Ende der Fiss. occip. perp. interna herumlaufen muss.

Die innere untere Scheitelbogenwindung (m) (Pli de Passage inférieur interne) ist auf der rechten Seite in lateralem Verlaufe vorhanden, und dadurch ein Zusammenhang zwischen der Fiss. occip. perp. interna und der Fissura calcarina, wie ich oben schon angab, hergestellt. Auf der linken Seite aber ist dieses nicht der Fall. Hier verläuft die betreffende Windung gerade nach hinten, als obere Begränzung der Fissura calcarina, und trennt daher auch diese von der Fiss. perp. int., wie dieses bei den meisten Affen der Fall ist.

Von den Hinterhauptswindungen ist zunächst auf der oberen

Fläche jene scheinbar die innere obere Scheitelbogenwindung darstellende kleine Bogenwindung (h) zu erwähnen, welche den Zwickel repräsentirt. Sodann findet sich an der medialen und unteren Seite eine die Fissura calcarina begränzende und ihr hinteres Ende umgebende Windung (i), deren unterer Schenkel schon das zungenförmige Läppchen Huschkes oder die innere untere Hinterhauptswindung (k) darstellt. Auch das spindelförmige Läppchen, oder die untere äussere Hinterhaupts-Windung (l), ist in etwas verschiedener Anordnung auf beiden Seiten vorhanden, und beide untere Hinterhaupts-Windungen gehen unmittelbar in die unteren Schläfenwindungen über.

Schläfenwindungen kann man vier zählen, von denen die obere oder erste (p), und der Gyrus Hippocampi (n) oder die vierte am deutlichsten getrennt sind. Die beiden mittleren (o) sind bei der verschiedenen Anordnung der sie trennenden Furchen auf beiden Seiten verschieden und weniger deutlich angeordnet.

An der medialen Seite der beiden Hemisphären findet sich ausser den betreffenden zum Stirn (a), Scheitel (d und e) und Hinterlappen (h und i) gehörenden Windungen der Gyrus Cinguli (r) in genügender Weise entwickelt, und steht sowohl mit der ersten Stirnwindung, als mit dem Vorzwickel und zuletzt mit dem Gyrus Hippocampi in Verbindung.

Dass die Windungen des Stammlappens und damit die sogenannte Insel so gut wie ganz fehlen, habe ich schon oben angegeben. —

Das kleine Gehirn ist, wie ich bereits mitgetheilt habe, verhältnissmässig zu dem grossen Gehirn auffallend gross und zeigt ausserdem fast ganz normale Verhältnisse. An den Hemisphären unterscheidet man den Lobulus quadratus, semilunaris superior und inferior, biventer mit dem gracilis und cuneiformis, den Flocculus und die Tonsilla. Letztere sind nicht gross und schienen im frischen Zustande in ihrem Gewebe nicht normal, sondern einigermaassen erweicht zu sein. An dem Oberwurm unterscheidet man den Lobulus centralis, Monticulus mit dem Culmen und Declive. Die Commissura tenuis oder das Folium cacuminis, und noch mehr die Commissura brevis oder der Tuber valvulae sind mangelhaft entwickelt, wahrscheinlich also sind diese Zweige des

Markbaumes nicht recht vorhanden. Die Pyramis, Uvula und der Nodulus sind wieder ganz gut entwickelt. Auch das Velum medullare posterius und anterius sind ganz normal.

An den Hirnschenkeln, der Brücke und der Medulla oblongata ist nichts Abweichendes zu bemerken, ausser dass an letzterer die Oliven stark hervortreten und eine nierenförmige Gestalt haben, indem sich an ihrer lateralen Seite ein Ausschnitt zeigt. Auch die Dicke des Rückenmarkes scheint mir ganz verhältnissmässig zu sein.

Alle zwölf Hirnnerven sind in verhältnissmässiger Stärke und fast ganz normaler Anordnung vorhanden. So der Riechnerve mit seinem Bulbus und seinen Streifen an der Caruncula mammillaris. Von den beiden Sehnerven ist der rechte bis zum Chiasma nervorum opticorum deutlich atrophisch, was mit dem pathologischen Zustande und der Blindheit des rechten Auges von den ersten Jugendjahren an übereinstimmt. Das Chiasma aber, so wie die beiden Tractus nervorum opticorum zeigen keine Abweichung und Verschiedenheit. In Beziehung auf die übrigen Hirnnerven ist mir nur noch auffallend, dass der Facialis und Auditorius, welche sonst ganz normal selbst mit einer Portio intermedia vorhanden sind, sehr weit nach aussen von der Brücke von den Crura pontis ad cerebellum und von den Pedunculi Flocculorum hervortreten.

Das Tuber cinereum mit dem Infundibulum und der Hypophysis cerebri verhalten sich ganz normal; letztere ist ansehnlich gross. Die Corpora mammillaria sind ganz normal und getrennt.

Auf dem senkrechten Sagittalschnitt zwischen beiden Hemisphären des grossen Gehirns zeigt sich zunächst der Balken, welcher an dem in Weingeist erhärteten Hirn 30 Mm. lang ist. Die ganze Hemisphäre ist 81 Mm. lang. Die Entfernung von der hervortretendsten Spitze des Stirnlappens bis zum Balkenknie beträgt 18 Mm.; die Entfernung der äussersten Spitze des Hinterlappens bis zum Splenium 33 Mm. Der Balken misst also 37 % der ganzen Hemisphärenlänge. Zum Vergleich fand ich denselben bei einem 6jährigen Knaben 41 %; bei einem anderen von 7 Jahren 47 %; bei einem 8jährigen 49 % der Hemisphärenlänge. Nach Huschke beträgt der Balken beim Neugebornen 38 %; bei einem einjährigen Knaben 40,8 %; bei dem Erwachsenen 44—48 %; Krause gibt die Länge des Balkens zu $^2/_5$ oder 40 % der Hemisphären an. Es geht

daraus hervor, dass der Balken mit fortschreitendem Alter verhältnissmässig stärker wächst; bei unserer Helene aber steht er auf einer noch tieferen Stufe seiner verhältnissmässigen Entwicklung als bei dem Neugeborenen. Das Knie des Balkens ist stark entwickelt und so abgerundet, wie sonst etwa das Splenium (9 Mm. dick); es läuft nicht eigentlich in ein nach hinten gerichtetes Rostrum aus, doch ist die an das Chiasma und an das Tuber cinereum sich ansetzende Lamina terminalis vorhanden. Das Splenium ist zwar wie gewöhnlich gestaltet, aber nur 5—6 Mm. dick, was wohl unzweifelhaft mit der schwachen Entwicklung der Hinterlappen zusammenhängt.

Der Fornix ist vorhanden; die aufsteigenden Schenkel treten aber an den vorderen Enden der Sehhügel nur wenig hervor, und vereinigen sich so vollständig mit dem Balkenknie, dass ein Septum pellucidum fehlt und statt dessen der Zwischenraum zwischen diesen aufsteigenden Schenkeln und den Sehhügeln, das sog. Foramen Monroi, eine ansehnliche weite Communication zwischen den beiden Seiten- und dem dritten Ventrikel darstellt. Die hinteren oder absteigenden Schenkel des Fornix sind aber ganz gut entwickelt, gehen in die Fimbria des Hippocampus über und sind wahrscheinlich auch durch die Lyra miteinander verbunden.

Die Sehhügel sind ganz gut entwickelt, waren aber fast an ihrer ganzen medialen Fläche miteinander verwachsen, oder mit anderen Worten die Commissura mollis war sehr stark und dick. Der dritte Vertrikel zieht sich daher nur in der Form eines Kanales, in welchen hinten der sehr enge Aquaeductus Sylvii einmündet, zwischen den beiden Sehhügeln her und mündet vorne in den verhältnissmässig grossen nach vorne gerichteten Trichter. Auch der Streifenhügel ist in normaler Weise vorhanden und zwischen ihm und dem Sehhügel zeigt sich an der Oberfläche die Taenia semicircularis. Von den Seitenventrikeln öffnete ich nur den rechten. Das vordere Horn dringt mässig weit in den Stirnlappen ein. Das hintere Horn ist nicht gross, aber doch deutlich vorhanden. Der Calcar avis spricht sich in demselben aber nicht deutlich aus, unzweifelhaft, weil die innere untere Scheitelbogen-Windung, selbst auf dieser rechten Seite nur sehr wenig ausgebildet ist. Das absteigende Horn der Seitenvertrikel ist entsprechend der Grösse des

Schläfenlappens stark entwickelt und in ihm tritt der Pes Hippocampi major mit der Fimbria stark hervor, doch besitzt ersterer keine deutlichen Kerben der Zehen. Ebenso unterschied ich keine deutliche Fascia dendata. Die Eminentia collateralis macht sich zwischen hinterem und absteigendem Horn hinlänglich bemerkbar. Die Glandula pinealis war in hinreichendem Grade entwickelt, doch bemerkte ich weder in ihr noch an ihren Stielen Sand.

Ich halte es für zweckmässig, dieser meiner Beschreibung des Gehirns der Helene Becker, eine Uebersicht der bisher in der Literatur bekannt gewordenen Beschreibungen und Abbildungen anderer Mikrocephalen Gehirne folgen zu lassen. Ich interpretire dabei diese Abbildungen nach meinen Anschauungen über die Windungen so gut als sich dieses bei Abbildungen, die nicht nach diesen Anschauungen aufgefasst sind, ausführen lässt. Leider bleibt dabei Manches fraglich; denn es ist ein grosser Unterschied in einer bildlichen Darstellung, je nach der Auffassung des Objectes durch den Darstellenden, selbst wenn die Abbildung ganz treu ist.

Von W. Vrolik (Verhandelingen der Koninkl. Akad. van Wetenschapen 1854 I.) ist die Beschreibung und Abbildung des Gehirns und Schädels eines neunjährigen idiotischen Knaben gegeben worden, welche demselben von dem bekannten Dr. Guggenbühl vom Abendberge bei Interlaken zugeschickt worden waren. Obgleich bedeutende Wassersucht der Seitenventrikel des Gehirns vorhanden war, darf dieser Fall doch zu den Mikrocephalen gerechnet werden, denn es war keine weitere Zerstörung des Gehirns zugegen, welches sich sonst, ausser einer nicht sehr hochgradigen Asymetrie, durch Kleinheit besonders der grossen Hemisphären auszeichnet. Leider finden sich keine Gewichts- und Maassangaben über das Gehirn; es ist nur die Zeichnung eines normalen Gehirnes eines achtjährigen Mädchens beigegeben, wodurch die Grössenunterschiede allerdings recht anschaulich werden. Der Kopf des Knaben hatte einen Umfang von 13 P. Z. = 341 Mm. Die grösste Länge des Schädels wird angegeben zu 0,135 holl. Ellen oder Meter; die grösste Breite 0,108; die Höhe zu 0,120. Die linke grosse Hemisphäre ist kleiner, als die rechte. Das kleine Hirn hat die normale Grösse und seine linke Hemisphäre ist etwas grösser, als die rechte. Die Brücke

ist schmaal, die Medulla oblongata ansehnlich. Vrolik findet die Stirnlappen und Windungen sehr unvollkommen entwickelt. Der rechte Schläfenlappen ist in seinem vorderen unteren Theile unvollkommen entwickelt, so dass er den horizontalen Theil der Fossa Sylvii von unten nur unvollkommen bedeckt. Die Hinterlappen scheinen fast zu fehlen, was Vrolik aber mehr dem Umstande zuschreibt, dass die Hemisphären durch die Auftreibung des Ventrikel durch Wasser an Höhe gewonnen haben, was sie in der Länge verlieren. Jedenfalls bedecken sie das kleine Gehirn nur unvollkommen.

Näheres über die Furchen und Windungen der Hemisphären giebt Vrolik nicht an und leider sind auch die Abbildungen wie immer ungenügend, um nach denselben etwas Genaueres auszusagen. Die Fossa Sylvii ist in ihrem Stamme und hinteren Aste vorhanden; dagegen glaube ich mich nicht zu irren, dass auch hier der vordere Ast und die um ihn herumgelegte dritte Stirnwindung fehlt. Die Stirnlappen sind schmaal, von beiden Seiten nach vorne zugeschärft, wenngleich der Siebbeinschnabel zu fehlen scheint. Da nur die linke Hemisphäre von der Seite dargestellt ist, so lässt sich auch nur von ihr berichten, dass die Centralspalte und die sie umgebenden Centralwindungen nur ganz anomal angeordnet vorhanden zu sein scheinen; namentlich die vordere Central-Windung und der untere Bogenabschluss beider Central-Windungen zeigen ganz abweichende Verhältnisse. Wie es sich mit der Fissura occipitalis perpend. interna und der sie umgebenden inneren oberen Scheitelbogenwindung, wie mit der Fissura calcarina und der inneren unteren Scheitelbogen-Windung verhält, lässt sich leider nach keiner der Figuren mit Wahrscheinlichkeit sagen. Eine Fissura parallela am Schläfenlappen ist nicht deutlich ausgesprochen, und damit sind auch die beiden seitlichen Scheitelbogen-Windungen in Frage gestellt. Der hintere aufsteigende Ast der Fossa Sylvii geht der Abbildung nach oben und hinten in zwei Zweige über, zwischen welche sich eine mit dem Vorzwickel zusammenhängende Windung hinein gedrängt hat. Um das Ende des hinteren Zweiges sind allerdings einige Bogenwindungen herum angeordnet; aber alles Dieses ist anders, wie sonst beim Menschen oder bei Affen. In Beziehung auf die Hinterhauptswindungen lässt sich gar Nichts sagen, und wie es mit dem Gyrus Hippocampi, namentlich auf

der rechten Seite, bei der Verkümmerung des vorderen inneren Theiles des Schläfenlappens steht, ist auch aus der Abbildung nicht ersichtlich. —

Von Gratiolet besitzen wir die Abbildungen von zwei mikrocephalen Gehirnen in dem Atlas zu der von ihm gemeinschaftlich mit Leuret herausgegebenen Anatomie Comparé du Systeme nerveux. Das Eine, Pl. XXIV. fig. 4, welches auch R. Wagner im Umriss in seinen Vorstudien, Hft. II, Tab. V., fig. 1, wiedergegeben hat, rührt von einem mikrocephalen 4jährigen Mädchen her, und giebt nur die linke Seitenansicht. So viel man nach derselben urtheilen kann, fehlt auch an diesem Gehirn der vordere Schenkel der Fossa Sylvii und mit ihm auch die dritte Stirnwindung. Scheinbar ist der vordere Schenkel sogar ansehnlich entwickelt. Allein es verhält sich wie auf der rechten Seite des Gehirns der Helene Becker; diese Furche ist nicht der vordere Schenkel der Fossa Sylvii, sondern eine die vordere Centralwindung von der zweiten Stirnwindung abtrennende Secundärfurche; ob in der Tiefe ein schwach entwickelter vorderer Schenkel der Fossa Sylvii und eine Spur der dritten Stirnwindung sich findet, kann ich nach der Zeichnung nicht sagen. Gewiss ist aber, dass ich die mit e bezeichnete Windung nicht wie Gratiolet für die dritte Stirnwindung, sondern als noch zur zweiten Stirnwindung gehörig erachte. Diese Abbildung hat wahrscheinlich C. Vogt ganz vorzüglich veranlasst, der Fossa Sylvii bei den Mikrocephalen die Gestalt eines V zuzuschreiben, in welches sich von oben das untere Ende der Centralwindungen als sogen. Klappdeckel hineinsenke. Allein es findet sich hier eine ganz abnorme, gar nicht weder auf den menschlichen noch Affentypus zurückzuführende Anordnung. Dazu gehört auch eine an dem Eingang in die Fossa Sylvii hervortretende Windung, die Vogt sicher ganz irrthümlich für die Insel hält. Es scheint eher, als wenn sie noch zu den Centralwindungen gehören sollte. Die Fiss. occipit. perp. interna ist wohl unzweifelhaft an diesem Gehirne vorhanden, und auch eine verkümmerte obere innere Scheitelbogenwindung (Pli de Passage supérieur externe. i.) Auch die beiden seitlichen Scheitelbogen - Windungen um das obere Ende des hinteren Schenkels der Fossa Sylvii, (Pli marginal supérieur) und um das obere Ende der Fissura parallela (Pli courbe h.) sind vorhanden. Der Hinterlappen ist sehr rudimentär, namentlich wenn man die von Gratiolet

als deuxième, troisième und quatrième Pli de Passage bezeichneten Windungen nicht zum Hinter-, sondern zum Scheitellappen rechnet. Uebrigens aber hat die ganze Figur unzweifelhaft eine ganz falsche Stellung und das kleine Gehirn ist viel zu viel nach hinten geschoben, während es sicher im Schädel viel mehr unter dem grossen und von diesem bedeckt war. Ich glaube in der Grösse, in der ganzen Form und in dem Grade seiner Ausbildung hat dieses Gehirn eine grosse Uebereinstimmung mit dem der Helene Becker; aber die Entwicklung und Anordnung der Windungen ist eine ganz andere.

Das zweite von Gratiolet und Leuret Pl. XXXII. in fünf Ansichten abgebildete Gehirn, rührt angeblich auch von einem 4jährigen Kinde her, ob männlich oder weiblich ist nicht angegeben. Dasselbe trägt aber einen ganz anderen Charakter an sich, als das erste und als das von Theile beschriebene Gehirn, oder das der Helene Becker. Es ist offenbar zugleich mehr entwickelt und mehr abnorm, als diese Gehirne. Es ist erstens stark asymetrisch und die linke grosse Hemisphäre in ihrem Hinterlappen ganz defect; aber auch der Schläfenlappen erscheint besonders an seinem vorderen unteren Ende atrophisch; das kleine Hirn ist stark verschoben, wenn nicht auch asymetrisch entwickelt. Ich sehe auch an keiner dieser Figuren einen vorderen Schenkel der Fossa Sylvii und keine dritte Stirnwindung um denselben herum, obgleich Gratiolet letztere angiebt. Ebenso sieht man nirgends eine Insel, obgleich Vogt (pag. 235) sie sowohl in der Seitenansicht, als in der Ansicht von unten sehen will. Die Centralspalte und die Centralwindungen sind vorhanden, obwohl von letzteren die vordere linke verkümmert ist. Die Fissura occip. perp. interna ist auf der rechten Seite vorhanden und wird an ihrem oberen Ende von einer weit lateralwärts verlaufenden inneren oberen Scheitelbogen-Windung umgeben, die Gratiolet gar nicht bezeichnet hat. Links scheint dieselbe bei der Atrophie des Hinterlappens ganz zu fehlen; man sieht sie weder auf der Ansicht von oben, noch bei der Ansicht von innen. Dennoch giebt Gratiolet sowohl bei der Ansicht von oben (Fig. 1), als auf der Seitenansicht (Fig. 2), bei 1 einen Premier Pli de Passage supérieur an, welcher unzweifelhaft kein solcher, sondern eine zum Vorzwickel (Lobule du Pli pariètal ascendant) gehörige Windung ist. Eine Fissura calcarina ist wenigstens an der linken Hemisphäre (Fig. 5) nur wenig ausgebildet

sichtbar, was bei der Atrophie des linken Hinterlappens begreiflich ist. Wie es rechts sich verhielt, ist nicht sichtbar. — Eine Fissura parallela ist wenigstens links nicht deutlich und durchgreifend vorhanden. Daher findet sich hier auch nur eine verkümmerte erste Scheitelbogenwindung um das obere Ende des hinteren Astes der Fossa Sylvii (Pli marginal supérieur), und eine nur undeutliche zweite Scheitelbogen-Windung (Pli courbe). Wenn sodann Gratiolet selbst auf der linken Seite seine vier Plis de Passage externe sehen will, so muss man dieses seiner Lehre von den Uebergangs-Windungen überhaupt und namentlich seiner Ansicht, dass ihr offenes Hervortreten ein Hauptunterscheidungs-Kennzeichen von dem Gehirn der Affen sei, zu Gute halten. Diese so bezeichneten Windungen gehören theils dem Scheitellappen als zweite Scheitelbogenwindung, theils dem Schläfen- und rudimentären Hinterlappen an. Die medialen Ansichten lassen erkennen, dass die Fissura calloso marginalis, der Gyrus Cinguli und der Gyrus Hippocampi ziemlich regelmässig vorhanden waren. Es findet sich auch ein Septum pellucidum, welches bei der Helene fehlt.

Bei dem von Theile und R. Wagner beschriebenen Gehirne eines 26jährigen Mikrocephalen hat die Verkümmerung vorzüglich auch das grosse Gehirn betroffen. Das Gehirn wog nach Theile $10^1/_4$ Unz. d. i. 305,6 Grm. Kleinhirn, Brücke und Medulla oblongata verhielten sich zum Grosshirn wie 1 : 3,6 = 28,57 %; das Missverhältniss ist also doch nicht so gross, wie bei unserer Helene. In Beziehung auf die Grosshirnhemisphären, soweit ihr Verhalten aus den gegebenen Beschreibungen und Abbildungen zu beurtheilen ist, hebe ich besonders hervor, dass auch in diesem Falle die Fossa Sylvii in ihrer Bildung gestört war. Theile sagt der hintere aufsteigende Schenkel habe ganz gefehlt, der vordere sei bis zur Mitte der Hemisphäre in die Höhe gestiegen. Nach der Abbildung zu urtheilen, fehlt allerdings der hintere Schenkel, wahrscheinlich aber auch der vordere; denn die Furche, welche so von Theile benannt wird, ist der sogenannte Sulcus praecentralis, der hier theilweise gegeben ist, aber mit der Fossa Silvii Nichts zu schaffen hat. Die Fissura calloso marginalis ist zwar nicht zu sehen; ihr oberes hinteres Ende scheint aber besonders auf der rechten Seite, früh an der lateralen Seite der Hemisphären heraufzukommen. Die Fissura occip. perp. interna ist den Abbildungen nach

vorhanden. Ob sie nach unten durchgreift und bis in die Fissura calcarina übergeht, und wie sich diese selbst verhält, ist weder aus den Abbildungen noch aus dem Text zu ersehen. In Beziehung auf die Windungen wird zwar von R. Wagner eine dritte Stirnwindung angegeben und bezeichnet; allein ich zweifle, dass eine solche, wenigstens in einigermassen vollkommener Entwicklung, vorhanden ist. Theile sagt auch, dass der sogen. Klappdeckel, der vorzüglich durch die dritte Stirnwindung gebildet wird, fehle. Die Stirnlappen sind, wie bei unsrer Helene schmal, von den Seiten zugeschärft, und nach vorne spitz, was immer mit Mangel oder geringer Entwicklung der dritten Stirnwindung zusammenhängt. Die Centralwindungen sind ziemlich regelmässig entwickelt vorhanden. Die erste und zweite Scheitelbogenwindung lassen sich zwar unterscheiden, aber da der hintere Schenkel der Fossa Sylvii nicht vorhanden ist, so zeigen sie natürlich auch ein abweichendes Verhalten. Der Vorzwickel ist durch eine entsprechende Windungsgruppe repräsentirt und auch die innere obere Scheitelbogenwindung scheint links ziemlich stark, rechts weniger deutlich entwickelt zu sein. Ob eine innere untere Scheitelbogen-Windung vorhanden, ist nicht zu entscheiden, da keine mediale Ansicht der Hemisphären gegeben ist. Der Stammlappen oder die Insel mit ihren Windungen fehlt auch an diesem Gehirne ganz. Rücksichtlich seiner inneren Beschaffenheit zeigt die grosse Weite der Seitenventrikel, dass hier eine deutlichere hydrocephalische Abweichung vorhanden war, als bei unserer Helene Becker. Das Foramen Monroi war auch auch hier sehr weit, die vorderen Schenkel des Fornix liegen dem Balkenknie unmittelbar an und das Septum pellucidum fehlt.

Dr. Julius Sander hat in Griesingers Archiv für Psychiatrie 1867 die Beschreibung und Abbildung des mikrocephalen Gehirns eines fünf Monate alten Knaben, so wie auch des bekannten 18 Jahre alten Friedrich Sohn gegeben. Leider hatte ersteres nur mit schlimmen Verletzungen aus dem Schädel herausgenommen werden können; die Abbildung der linken Hemisphäre von ihrer lateralen und medialen Seite ist daher auch sehr unvollkommen, so wie auch die Beschreibung auf viele Fragen keine Antwort giebt. Namentlich erfahren wir über das Verhalten aller Furchen fast Nichts und daher erscheinen auch die Angaben über die Windungen zweifelhaft und unverständlich. Sander nimmt drei Stirn-

windungen an; doch zweifle ich, dass die dritte mit dem vorderen Schenkel der Fossa Sylvii vorhanden ist. Die Centralwindungen scheinen sich beide zu finden; das Verhalten der Scheitel- und Hinterhauptswindungen ist mir dunkel; der Hinterhauptslappen scheint ganz besonders verkümmert zu sein, der Schläfenlappen dagegen ist auch an diesem Hirn stark. Die Insel mit ihren Windungen ist kaum angedeutet. Der Streifenhügel und Sehhügel, der Balken und das Gewölbe scheinen normal gebildet und selbst ein Septum pellucidum vorhanden: ebenso Vierhügel und Brücke und Tuber cinereum; die Corpora mammillaria sollen kaum angedeutet sein. Vorder- und absteigendes Horn der Seitenventrikel sind gut ausgebildet, das hintere Horn ist kaum vorhanden; das Cornu Ammonis schwach, aber deutliche Klauen. Das Gehirn wog frisch nur 170 Grm.

Das Gehirn des Friedrich Sohn ist viel entwickelter und grösser, wie auch schon aus den von Vogt mitgetheilten Abbildungen des Schädels und des Schädelausgusses hervorgeht, und zwar besser als aus den Gewichts- und Grössenangaben sowie der Zeichnung Sanders, da dieselben nur das seit Jahren in Weingeist aufbewahrte Gehirn betreffen, mit dem daher unbestimmbare Gewichts- und Grössenveränderungen vorgegangen sind. Die von Dr. Sander gegebene Beschreibung der Furchen und Windungen ist sehr kurz und unvollständig, und es ist auch nicht leicht möglich, dieselbe durch Berücksichtigung der Abbildungen zu ergänzen. Die Fossa Sylvii ist allerdings und namentlich in ihrem nach hinten aufsteigenden Schenkel vorhanden; ob auch mit ihrem vorderen, ist nach der Abbildung nicht bestimmt zu sagen, aber wahrscheinlich. Es findet sich dann auch eine dritte einfache Stirnwindung, so wie das Gehirn überhaupt in seinen Stirnlappen nicht so schmal und nach vorne zugespitzt ist, wie bei der Helene Becker und dem Mikrocephalen von Theile. Bei der Ansicht von Oben bin ich aber zweifelhaft, da die mit 2 bezeichnete zweite Stirnwindung mir zur ersten zu gehören scheint. Die Centralfurche mit den Centralwindungen ist vorhanden. Dagegen soll die senkrechte hintere Occipitalspalte ganz fehlen, wodurch eine Trennung des Hinterlappens von dem Scheitellappen unmöglich und ein Mangel der inneren oberen Scheitelbogenwindung bedingt sein würde. Der Abbildung nach sind übrigens wenigstens auf der

rechten Seite Beide vorhanden. Von der Fissura calcarina und calloso marginalis wird Nichts gesagt und ist auch Nichts zu ersehen. Die Parallelspalte ist stark ausgebildet und wahrscheinlich sind desshalb auch die erste und zweite Scheitelbogenwindung vorhanden, obgleich sie sich in der Abbildung nicht deutlich erkennen lassen. Ueber das Innere des Gehirns wird Nichts mitgetheilt.

In der Anthropolog. Review Vol. I., 1863, pag. 168 giebt Mr. Gore eine Nachricht von einem mikrocephalen Weibe, welches in ihrem 42. Jahre an Pthisis starb. Sie konnte einige Worte sprechen, aber ohne Zusammenhang und bestimmten Sinn. Sie war anständig und reinlich, konnte aber nicht allein essen, ihr Gang war unstät und schwankend. Er bezieht sich in Beziehung auf den Schädel und das Gehirn auf Photographieen und einen Ausguss, welche aber nicht bei dieser Mittheilung sich dargestellt finden. Die Schädelnäthe waren nicht verwachsen; das Hinterhauptloch stand weit nach hinten; die Crista Galli war stark entwickelt, die Lamina cribrosa schmal und vertieft. An dem Gehirn waren die Stirnlappen schmal, die Scheitel- und Schläfenlappen breit, die Hinterlappen sehr kurz, aber gut von den Scheitellappen getrennt, d. h. wohl, die Fiss. occip. perpend. int. ist gut entwickelt. Das kleine Gehirn war gross und in allen Theilen gut entwickelt. von den Hinterlappen nur unvollkommen bedeckt. Das ganze Hirn wog frisch nach Entfernung der Pia mater, 283,75 Grm.; nachdem es längere Zeit in Weingeist gelegen hatte, nur noch 212,75 Grm., hatte also ohngefähr $^1/_4$ an Gewicht verloren. Weder am Schädel noch am Gehirn fanden sich irgend welche Spuren eines pathologischen Processes.

Mr. Gore erwähnt noch des Gehirns eines idiotischen (?) Mädchens zu Cork, welches Spurzheim in seiner Anatomy of the Brain, London 1826 abgebildet habe. Derselbe gäbe in dem Anhang zu seiner Anatomie auch noch Abbildungen eines andern männlichen mikrocephalen Gehirns, welches sich mit dem Schädel in dem Museum des St. Bartholomäus-Spitals finde, und von Owen in seiner Osteology of the Chimpanzee, Transactions of the Zoolog-Society, Vol. I, pag. 343 beschrieben sei. Dieses Gehirn habe 332 Grm. gewogen. Owen beschreibt übrigens an der genannten Stelle nicht das Gehirn, sondern giebt nur eine Abbildung des Schädels von der Seite und von der Basis, und giebt p. 372

kurz die Merkmale an, welche diesen Schädel immer noch von dem eines Chimpanse oder Orang-Outan unterscheiden.

In der Zeitschrift für Ethnologie, Berlin IV, 1872, Heft 4, pag. 100 findet sich eine ausführliche Mittheilung von Dr. Joh. v. Mierjeievsky aus St. Petersburg über einen Fall von Mikrocephalie, welchen Dr. Balvansky in der Irrenanstalt zu Woronez beobachtete und Herrn Dr. v. M., sowie auch das Gehirn zur weiteren Untersuchung und Veröffentlichung mittheilte. Dieser Mikrocephale war unbekannten Ursprunges, hiess Mottey und wurde gegen 50 Jahre alt, also vielleicht der älteste der näher beobachtet wurde. Obgleich sein Gehirn und Schädel zu den kleinsten bekannten gehören, standen seine körperlichen und geistigen Leistungen doch nicht auf der alleruntersten Stufe. Obgleich er selten von einer Stelle zur anderen ging, sich nie selbst zu Bette legte, sein Gang langsam und träge war, er sich nicht selbst anziehen konnte und alle übrigen willkührlichen Bewegungen ungeschickt ausführte, so konnte er sich doch von einem Orte zum andern bewegen. Ebenso waren seine psychischen Lebensäusserungen zwar sehr gering, er suchte keine Nahrung auf, und konnte Nichts Zusammenhängendes sprechen; aber er zeigte doch Unterschiede in seinen Zuneigungen zu verschiedenen Personen und brachte einzelne Laute und Worte, wie o, o, hier da sie, hier da jenes, ja sogar einen kleinen Satz: hier ist es ja; dort ist es ja; wessen ist jenes; wessen ist sie; wenn gleich ohne einen besonderen Sinn oder Absicht hervor.

Dr. Balvansky hat auch den Kopf des Mottey gemessen:

Der Umfang betrug	49	Ctm.
Der Stirnhinterhaupts-Durchmesser	23	„
Der Querdurchmesser von einem Eingang des Meatus auditor. ext. zum andern	$14^1/_2$	„
Die Breite der Stirn	13	„
Die Höhe der Stirn	$3^3/_4$	„
Vom Meatus audit. bis zur Mitte der Stirn	10	„
Der Camper'sche Gesichtswinkel	70^0.	

Das Gehirn wurde Dr. v. M. zugeschickt. Es wog (wie ich denke frisch; ob aber gleich bei der Herausnahme oder nachdem es in die

Hände des Dr. v. M. gelangt war?) 369,053 Grm. Es ist daher das schwerste von denen, welche gewogen wurden, aber wohl nicht von denen, die überhaupt beobachtet wurden. Das relative Hirngewicht war 1 : 250; allerdings ein ungeheueres Missverhältniss, was indessen bei den grossen Schwankungen selbst des individuellen Körpergewichts nicht viel sagen will. Zahlreiche und sorgfältige Messungen wurden an dem Gehirn erst vorgenommen, nachdem es in doppeltchromsaurem Kali gehärtet worden war. Sie haben daher höchstens einen relativen Werth und auch diesen kann man zweifelhaft nennen, da es sich fragt, ob sich die verschiedenen Theile des Gehirns, z. B. der Balken und die Hemisphären nicht in bemerkbar verschiedenem Grade in Weingeist oder in Chromsäure zusammenziehen und verkleinern. Indessen ist es gewiss richtig, dass aus diesen Messungen hervorgeht, dass die Längenmaasse des mikrocephalen Gehirns mehr von den normalen abweichen, als die Breitenmaasse, und dass die Maasse des kleinen Hirns, der Brücke und des verlängerten Markes am wenigsten abweichen. Der Balken ist besonders wegen Verkümmerung seines hinteren Theiles verkürzt und maass nur 25 % der Länge der Hemisphären.

Das Gehirn zeigte übrigens gar keine Merkmale einer pathologischen Zerstörung oder überhaupt nur einer pathologischen Ursache seiner zurückgebliebenen Entwicklung. Es ist besonders in seinen mitttleren Theilen, Scheitel- und Schläfenlappen ausgebildet, in den vorderen und hinteren verkümmert. Die Stirnlappen sind vorn schmal, haben aber keine schnabelförmige Gestalt. Die Hinterhauptslappen sind nur schwach entwickelt, besonders auf der linken Seite, wo sich an der Oberfläche eine Cyste befand, welche Atrophie der Windungen veranlasste. Sehr auffallend an dem Gehirn ist das Offenstehen der Fossa Sylvii, wie bei einem dreimonatlichen Fötus, so dass die Insel mit einigen Windungen frei zu Tage tritt.

Der vordere Theil des Balkens und der vordere Theil des Fornix mit dem Septum pellucidum sind regelmässig gebildet; der hintere Theil beider ist sehr verkümmert, so dass ein Splenium und das Psalterium nicht existirt und der hintere Theil der Thalamus opticus, und des dritten Ventrikels nur von der Tela chorcidea bedeckt sind. Vom hinteren Ende des Balkens und des Fornix gehen nur dünne Stränge nach rück-

wärts, auswärts und vorwärts, letztere in die Gyri Hippocampi, denen die Fasica dendata so wie die Fimbria so gut wie ganz fehlt. Streifenhügel, Sehhügel und Vierhügel, Glandula pinealis sind gut entwickelt; die Höhlung des hinteren Hornes ist bedeutend.

Dr. v. M. beschreibt sodann die Windungen der grossen Hemisphären nach Ecker. Da ich indessen einen sehr guten Gyps-Abdruck derselben durch die Güte des Hrn. Dr. Betz in Kiew erhalten habe, so erlaube ich mir, diese Beschreibung nach meiner Anschauung und Terminologie zu geben, wodurch dieselbe mit denen der übrigen Gehirne übereinstimmend wird.

Das Auffallendste an dem äusseren Ansehen der Hemisphären ist, wie ich schon gesagt habe, das Offenstehen der Fossa Sylvii wie bei einem Fötus aus dem Ende des 3. Anfang des 4. Monates. Hr. Dr. v. M. sagt, dass die Fossa Sylvii die Gestalt eines umgekehrten Ω habe, was ich durchaus nicht finden kann, man müsste denn sonderbarer Weise das Gehirn mit der Basis nach oben liegend betrachten. Sie gleicht vielmehr bei der gewöhnlichen Hirnlage und von der Seite betrachtet einem Y, dessen Stiel sehr kurz, der vordere Schenkel ziemlich grade aufsteigend und kurz, der hintere etwas nach hinten geneigt und länger ist. Zwischen diesen Schenkeln kommt die Insel mit einigen Windungen zum Vorschein, doch ist dieses Fig. 1 sehr undeutlich abgebildet, wo wohl Niemand so leicht erkennen wird, dass die Windung Gb. eine der Windungen die Insel sein soll, wie aus dem Abguss ganz deutlich hervorgeht. — Die Centralfurche mit den Centralwindungen und dem oberen und unteren bogenförmigen Abschluss der letzteren ist auf beiden Seiten ganz normal entwickelt. Der untere Bogenabschluss ragt in die nach oben weit offene Sylvische Grube hinein; der obere weicht von der Median-Ebene und der Fissura longitudinalis cerebri magna beträchtlich zurück, so dass diese beiden oberen Bogenabschlüsse beim Aneinanderlegen der beiden Hemisphären ansehnlich von einander entfernt sind. Besonders kurz sind die Centralwindungen solcher Gestalt auf der rechten Seite. Der Vorzwickel ist sowohl an der oberen als medialen Fläche (Lobule quadrilatêre Grat.) ganz gut entwickelt. — Die Fissura occipitalis perpend. interna ist auf beiden Seiten vorhanden und greift auch allem Anscheine nach in die Fissura calcarina ein. Sie wird auch an

ihren beiden Enden durch die beiden Bogenwindungen, die innere obere und innere untere Scheitelbogenwindungen umgeben, und zwar erscheint die obere interessanter Weise auf der linken Seite wie gewöhnlich beim Menschen lateralwärts gerichtet, also als Premier Pli de Passage superieur externe, auf der rechten Seite aber nach auswärts gerichtet, als Premier Pli de Passage superieur interne. — Die Fissura calcarina ist an dem hinteren Ende der Hemisphären auf der linken Seite durch eine einfache, auf der rechten durch eine in einem auf- und absteigenden Schenkel getheilte Bogenwindung abgeschlossen. — Eine erste einfache Scheitelbogenwindung schliesst auf beiden Seiten das obere Ende des hinteren Schenkels der Fossa Sylvii ab. Eine einfache durchgreifende Fissura parallela ist nicht vorhanden, und desshalb fehlt auch eine dieselbe abschliessende deutliche zweite Scheitelbogen-Windung, vielmehr sind hier mehrere undeutliche, den Scheitellappen mit dem Hinterhaupts- und Schläfenlappen verbindende Uebergangswindungen. Erste und zweite Stirnwindung sind ganz wohl entwickelt zu unterscheiden, die dritte oder untere Stirnwindung aber fehlt ganz. Was Dr. v. M. als solche bezeichnet, ist die zweite Stirnwindung, die mit zwei dicht nebeneinander liegenden Wurzeln von dem unteren Ende der vorderen Centralwindung ausgeht. Am Hinterlappen ist der Zwickel kaum vorhanden; auch die untere innere und äussere Hinterhauptswindung (zungen- und spindelförmiges Läppchen) sind nur sehr undeutlich zu unterscheiden, da die Hauptmasse des Hinterlappens aus der die Fissura calcarina umgebenden Bogenwindung besteht. An dem Schläfenlappen ist eine erste Schläfenwindung, dann der Gyrus Hippocampi wohl zu unterscheiden, und da der Lappen breit und dick ist, zwischen jenen beiden noch mehrere andere Windungen, die sich aber schwieriger als zweite und dritte Schläfenwindungen von einander trennen lassen. — An der medialen Fläche beider Hemisphären ist die Fissura calloso marginalis vorhanden und läuft auch nach oben hinter dem oberen Bogenabschluss der Centralwindungen aus. Die entsprechende Partie der ersten Stirnwindung ist ansehnlich, aber wenig gefurcht; der Gyrus Cinguli ist verhältnissmässig dick.

Dieses Mikrocephalen-Gehirn ist das Einzige. von welchem wir durch Professor Betz eine miskroskopische Untersuchung besitzen, dessen Prä-

parate in der Juni 1872 Sitzung der Wiener medicinischen Gesellschaft eine so allgemeine Bewunderung fanden. Dr. v. M. berichtet nur von Präparaten aus der Medulla oblongata, der Brücke und den Vierhügeln und sagt, dass man aus diesen klar sehe, dass die Pyramiden kleiner als am normalen Gehirn und im Vergleich zu den regelmässig entwickelten Oliven, in der Entwicklung zurückgeblieben seien. Man erkenne ferner die Kerne der N. N. Vagi und Hypoglossi und die Anfänge der NN. trochleares und oculomotorii. In dem Bericht über die genannte Sitzung in der medicinischen Wochenschrift Nr. 27, pag. 693 heisst es aber weiter, dass von den Hemisphären angefertigte Querschnitte zeigten, dass die Centralganglien, Sehhügel, Streifenhügel, Linsenkern und Claustrum nicht wie bei dem normalen Hirn eine zusammenhängende Masse bilden. Die Scheitellappen (in dem Referat steht Schädellappen) zeigten einen Nebenkern von bedeutender Grösse von dem der Opticus abgeht, welcher sonst mit dem Linsenkern zusammenhängt. Die Corpora geniculata und die Commissuren fehlen. Das Claustrum ist in Zusammenhang (soll wohl heissen liegt dicht an) mit der Hemisphäre, ohnzweifelhaft weil die Insel wenig entwickelt ist. Die Rindensubstanz, heisst es in diesem Referat, enthielt bloss grosse Zellen und ist von einer mächtigen Lage Bindegewebe bedeckt. Dr. v. M. aber sagt: die mikroskopischen Präparate, welche aus der grauen Substanz den Stirn-, Scheitel-, Schläfen- und Hinter-Lappenwindungen der linken Hemisphäre angefertigt wurden, zeigten dass die Ganglienzellen, Neuroglia und Nervenfäden ihren normalen Bau beibehalten hatten, und dass ihre Beziehungen untereinander normal waren. Diese Beschaffenheit hatte auch das Gewebe des Kleinhirnes. Die Nervenzellen der obenerwähnten Theile der linken Hemisphäre hatten im grössten Durchmesser 0,016—0,008 Mm., ihre Kerne 0,008—0,004. Der Durchmesser der Purkinjeschen Zellen des Cerebellum war 0,030—0,020, ihre Kerne 0,010—0,008.

Gewöhnlich wird auch Cruveillhier unter die Autoren gezählt, welche Fälle von Mikrocephalie, Abbildungen von mikrocephalen Gehirnen und theoretische Ansichten über die Ursachen der Mikrocephalie aufgestellt haben sollen. Der erste der deutschen Autoren, welcher ihn in der neueren Zeit citirt hat, ist Theile. Sein Citat ist, wahrscheinlich durch einen Druckfehler, falsch. Es heisst Anat. pathol. Liv. 30, Pl. 4;

es soll heissen Liv. 39. Danach hat R. Wagner Cruveillhier ebenfalls falsch citirt, Liv. 30, wahrscheinlich weil er das Original nicht nachgesehen. Auch C Vogt hat das falsche Citat Liv. 30, Pl. 4, allein er muss doch wohl das Original angesehen haben, da er eine ausführliche Uebersetzung des Textes giebt. In Wirklichkeit handelt Cruveillhier an zwei Stellen seines grossen Atlasses, nämlich Livr. 8, Pl. 6 u. 7 und Livr. 39, Pl. 4 gar nicht über Mikrocephalie, sondern theilt nur Beobachtungen über Idiotie mit und die gegebenen Abbildungen stellen nur Gehirnatrophie dar. Im Text der letztcitirten Stelle bespricht er aber auch die Mikrocephalie in der von Vogt wiedergegebenen Weise; eine Abbildung eines mikrocephalen Gehirns besteht aber bei Cruveillhier nicht.

Angeblich soll sich auch bei Sandifort: Museum anatomicum, Vol. IV, Tab. 190 und 191 der Schädel und das Gehirn eines 20jährigen Mikrocephalen abgebildet finden. Leider befindet sich dieses Werk in keiner unserer beiden Bibliotheken.

Eine Zusammenstellung der Gewichte der in dem Vorausgehenden erwähnten mikrocephalen Gehirne giebt folgende Reihe:

Gehirn	des Friedrich Sohn	452,0	Grm.
„	von Dr.v.Mierjeievski	369,0	„
„	„ Cork	332,0	„
„	„ Theile	305,0	„
„	„ Gore	283,75	„
„	der Helene Becker	219,0	„
„	von Dr. Sander	170,0	„

Die Schädelcapacitäten nach Vogt betrugen:

Schädel	des Rake	622	Ctm.
„	„ Gottfr. Mähre	555	„
„	„ Friedr. Sohn	460	„
„	„ Joh. Mögle	395	„
„	„ Michael Sohn	370	„
„	„ Schüttlendreier	370	„
„	von Theile	350	„
„	der Margar. Maehler	296	„
„	des Jacob Mögle	272	„
„	der Helene Becker	225	„

Es befinden sich sich also hierunter drei Fälle, in denen wir das Hirngewicht und den Schädelinnenraum kennen.

Friedrich Sohn	Hirngewicht	452	Grm.	Schädelinnenraum	460 Grm.
Hirn von Theile	„	305	„	„	350 „
Helene Becker	„	219	„	„	225 „

Der Unterschied ist bei Friedrich Sohn und Helene Becker so gering, dass es nicht nur gewiss ist, dass bei ihnen keine irgend erwähnenswerthe Menge von Flüssigkeit während des Lebens im Gehirn und Schädel vorhanden war, sondern dass selbst ein Schwinden des Schädels durch das Austrocknen angenommen werden muss. Dieses ist auch bei der Helene Becker und der Beschaffenheit ihres Schädels keinem Zweifel unterworfen. Auch bei dem von Theile untersuchten Gehirne kann keine grössere Menge von Flüssigkeit im Schädel und Hirn vorhanden gewesen sein. Der Unterschied zwischen Schädelinnenraum und Hirngewicht beträgt 43 Grm.; nach meinen Untersuchungen (über das Verhältniss des absoluten und specifischen Hirngewichtes, sowie des Hirnvolums zum Schädelinnenraum. Sitz.-Ber. d. math.-phys. Klasse d. kgl. bayr. Ak. d. Wissensch. v. 10. Dec. 1864, pag. 370) ist dieser Unterschied als ein normaler zu betrachten.

II. Der Schädel.

Der Schädel der Helene Becker ist in Beziehung auf das erreichte Alter von 7 Jahren und 8 Monaten wohl einer der kleinsten bis jetzt beobachteten. Er ist nicht nur kleiner als der des 10 Jahre alten Jacob Mögle, sondern auch kleiner, als der des 5 Jahre alten Johann Georg Mögle.

Ich will hier sogleich die hauptsächlichsten Schädelmaasse nach den Vorschriften Welkers's geben.

Längendurchmesser von der Nasenwurzel bis zur hervorragendsten Stelle des Hinterhaupts . . .	114	Mm.
Längendurchmesser von der hervorragendsten Stelle der Glabella bis zur Spina occipitalis externa . .	102	„
Von der Sutura naso-frontalis bis zum vorderen Rande des Foramen magnum	68	„

Von der Spina nasalis anterior bis zum vorderen Rande des Foramen magnum	68	Mm.
Grösster Querdurchmesser	82	„
Querdurchmesser vom oberen Rande der beiden äusseren Gehörgänge	78	„
Vom Processus zygomaticus des Stirnbeins einer Seite zur andern	68	„
Grösste Höhe vom vorderen Rande des Hinterhauptlochs bis zum Scheitel	69,3	„
Von der Nasenwurzel bis zum Kinn	75,0	„
Von der Spina nasalis anterior bis zum Kinn	47,0	„
Horizontalumfang, so gut er bei gänzlichem Mangel der Tubera frontalia gemessen werden kann	285,0	„
Senkrechter Längsumfang	211+ 67=278	„
Querumfang	77+160=237,0	„
Index cephalicus	72,8	„
Entfernung der beiden Unterkiefer-Winkel von einander	67,0	„
Senkrechte Höhe des Unterkiefers am Kronenfortsatz	37,0	„
Höhe von der Jncisura semilunaris parallel mit dem hinteren Rande des Unterkiefers	30,5	„

Der äusseren Form des Schädeltheiles nach hat der Schädel der Helene Becker am meisten Aehnlichkeit mit denen des Michael und Friedrich Sohn, besonders in Beziehung auf das abgestutzte Hinterhaupt; doch sind die letzteren ansehnlich grösser. Der Gesichtstheil ist indessen auch von diesen wie von allen anderen von Vogt abgebildeten Schädeln sehr verschieden. Dem Schädeltheile nach ist der Schädel ein dolichocephaler, dem Gesichtstheil nach ein orthognather ja opistognather. Er ist nicht ganz symetrisch, sondern die linke Hälfte ist etwas weniger ausgebildet, als die rechte, besonders vorn etwas mehr abgeflacht, wie man besonders gut auf dem Horizontaldurchschnitt, Fig. XII., sieht.

Alle Schädelnäthe mit Ausnahme der Sutura sagittalis und squamosae stehen offen, ja ihre Verbindung ist so wenig consolidirt, dass der Schädel bei der Maceration auseinanderzufallen drohte, und ich manche Verbindung leimen musse. Die beiden genannten Näthe so wie die Stirnnath fehlen dagegen ganz, so dass sich in Beziehung auf die Form des Schädels, das Virchow'sche Gesetz bestätigt findet.

Die Stirn des Schädels ist kaum vorhanden, von den Seiten zusammengedrückt und stark nach hinten fliehend. Die Arcus superciliares sind wenig entwickelt, obwohl die oberen Augenhöhlenränder stark vorspringen, weil sie bei dem starken Zurückweichen der Superficies frontalis fast horizontal stehen. Die Tubera frontalia sind so gut wie ganz fehlend; Stirnhöhlen sind nicht vorhanden, sondern die Substantia spongiosa ist hier nur stärker als irgend sonst wo am Schädeldach entwickelt, so dass der Knochen hier in der Mitte des Stirnbeins an der Nasenwurzel 1 Ctm. dick ist.

Auch die Scheitelbeine sind wenig gewölbt, die Tubera parietalia kaum angedeutet, die Schuppennäthe sind wie gesagt verwachsen und die Lineae semicirculares kaum zu erkennen. Sehr auffallend ist die äusserst geringe Wölbung der Hinterhaupts-Schuppe. Nur in dem dem obern Winkel derselben entsprechenden Theile springt dieselbe stark nach hinten und oben vor und bildet den am meisten nach hinten vorstehenden Theil des Schädeldaches. Dieser Winkel selbst ist indessen kaum vorhanden und die Lambda-Nath verdient ihren Namen nicht, da sie parallel mit der Kronennath verläuft. Mit ihrem übrigen Theile tritt die Schuppe des Hinterhauptbeines fast ganz flach nach unten und vorne, so dass der Schädel hier ganz dem eines Affen z. B. eines Cynocephalus gleicht. Die Spina occipitalis externa ist zwar vorhanden, tritt aber nur wenig vor; ebenso sind die Lineae semicirculares occipitales nur schwach ausgesprochen. Die Basis des Hinterhauptbeines ist in ihrer Substantia spongiosa stark entwickelt, besonderes an dem vorderen Rande des Foramen magnum. Die Dicke der Basis beträgt vorne an der Verbindung mit dem Keilbeinkörper 10 Mm. und hinten auch noch 8. Die Foramina condyloidea posteriora sind vorhanden und stark nach hinten gerichtet. Das Foramen magnum hat 30 Mm. von vorne nach hinten und 25 von rechts nach links im Durchmesser. Es steht ansehnlich weit nach hinten, so dass man bei horizontaler Stellung der Jochbogen und horizontaler Ansicht von hinten, den ganzen Umfang desselben sehen kann. Dieses ist weniger wegen der starken Entwicklung des Gesichtstheiles, als wegen der sehr mangelhaften des hinteren Theiles des Schädels der Fall. Das Verhältniss der sog. Zahnlänge (170) zur Zahnlinie (67) Vogts ist 51,6.

Grosser und kleiner Keilbeinkörper sind zwar miteinander verwachsen, allein in ihrem Innern befindet sich an der Verbindungsstelle in der Substantia spongiosa eine ansehnliche Höhle als Ueberrest dieser Verbindung, eine eigentliche Keilbeinhöhle aber ist nicht vorhanden. Die Sutura basilaris ist nicht nur wie normal zu dieser Zeit noch vorhanden, sondern der Keilbeinkörper ist mit seinem an der Basis etwas hervorragenden hinteren Rande über den vorderen Rand des Körpers des Hinterhauptbeines herübergeschoben, es findet sich hier eine wahre Einknickung. Der Türkensattel ist tief und fast so gross wie bei einem normalen 8jährigen Kinde, besonders ist die hintere Lehne hoch. An den grossen Flügeln bemerke ich nichts Besonderes, sie schieben sich wie gewöhnlich zwischen Stirnbein, Scheitelbein und Schläfenschuppe, aber ihr vorderer oberer Rand ist sehr schmal. An den kleinen Flügeln sind die nach hinten gerichteten Spitzen der Processus clinoidei anteriores auffallend dick und wulstig. Die Processus pterygoidei sind stark entwickelt und bilden bei horizontaler Stellung der Jochbogen mit der Basis des Schädels nicht einmal einen rechten Winkel, während dieselbe bei einem normalen achtjährigen Kinde eine starke Richtung nach vorn haben, und mit der Schädelbasis einen stumpfen Winkel bilden. Die Ala interna bildet noch ein getrenntes Knochenstück, an welchem auch noch der Hamulus, welcher sehr dick und wenig gekrümmt ist, ein besonderes Knochenstück darstellt. Der hintere scharfe Rand der Ala externa ist eigenthümlich eingeknickt, und scheint der untere Theil dieser Ala auch aus einem besonderen Knochen zu bestehen.

Ueber das Schläfenbein ist nichts Besonderes zu sagen. Die Schuppe ist schwach und wie gesagt die Schuppennäthe sind verwachsen; der Processus mastoideus dagegen ist verhältnissmässig stark entwickelt. Der äussere knöcherne Gehörgang hat an seiner unteren Seite eine in die Trommelhöhle eindringende Spalte oder vielmehr rundliche Lücke. Die Gehörknöchelchen haben die normale Gestalt. Die Processus styloidei sind grösstentheils nur knorplig.

Von den Gesichtsknochen ist wenig zu sagen. Die Oberkiefer sind regelmässig gestaltet; die Processus nasales stark und besonders breit nach vorne tretend. Die Processus alveolares sind nicht vorspringend, sondern treten senkrecht herab und sind nach aussen convex

gewölbt. Die Spina nasalis anterior war unzweifelhaft vorhanden, doch ist sie durch Verlust des den mittleren rechten vorderen Schneidezahn deckenden Knochenplättchens beim Maceriren grösstentheils verloren gegangen Die Apertura pyriformis hat die gewöhnliche menschliche Form, tritt aber bei der starken Entwicklung der Nasenbeine und der Nasenfortsätze des Oberkiefers stark vor. Die Gaumennath springt am Gaumen stark vor. Wie es mit den Zwischenkiefern aussah, kann ich leider nicht sagen, da hier bei dem eben stattfindenden Zahnwechsel die Alveolen sehr zart waren und beim Skeletiren verloren gingen. Der Zahnwechsel war, wie gesagt, im Gange. Die beiden mittleren Milchschneidezähne waren zwar noch vorhanden, aber die Wechselzähne auch schon aus den Alveolen mit ihren Schneiden hervorgetreten. Die beiden seitlichen Milchschneidezähne waren bereits abgeworfen, die bleibenden stecken aber noch in den Alveolen. Die Milcheckzähne stecken noch fest und ragen stark hervor; von den bleibenden ist Nichts zu sehen. Die beiden vorderen Milchbackzähne sind auf beiden Seiten abgestossen, und die bleibenden brechen eben hervor. Der erste hintere Backzahn ist besonders rechts schon ganz hervorgetreten; seine Krone hat zwei äussere und drei innere Zacken. Der zweite hintere Backzahn steckt mit schief nach hinten gerichteter Krone noch ganz in der auch noch unvollkommen entwickelten Alveole; vom dritten hinteren Backzahn (Weisheitszahn) ist Nichts zu sehen. Nach diesem Verhalten der Zähne kann man sagen, dass der Zahnwechsel sehr wahrscheinlich, wie bei dem Menschen, nicht wie bei den Anthropoiden, besonders beim Orang Outang erfolgt. Ich habe p. 34 meiner Abhandlung über den Gorilla-, Chimpanse- und Orang-Schädel gezeigt, dass der Unterschied im Zahnwechsel darin besteht, dass bei dem Menschen der vierte Backzahn vor dem Eckzahn wechselt, bei dem Orang und Gorilla aber dieser vor jenem. Da nun hier bei der Helene Becker der vierte Backzahn wenigstens in seiner Krone schon entwickelt, von dem bleibenden Eckzahn aber noch gar nichts zu sehen war, so ist es wahrscheinlich, dass jener vor dem Wechsel des letzteren durchgebrochen sein würde.

Die Jochbeine sind normal, ihre Verbindung mit dem Stirnbein, Oberkiefer, grossen Flügeln des Keilbeins und Jochfortsatz der Schuppe des Schläfenbeines war noch so locker, dass sie sich bei dem Maceriren

ablöseten. Die Gaumenbeine bilden eine Spina palatina posterior, ihre Processus pyramidales sind wulstig und bestehen aus einem eigenen Knochenstück. An den Thränenbeinen, dem Siebbein und Vomer ist nichts Besonderes zu bemerken.

Der Unterkiefer ist auffallend abweichend gebildet. Er bildet nicht, wie bei einem 7—8jährigen Kinde, einen nach vorne in der Mitte vorspringenden Winkel, ein Kinn, sondern einen rundlichen Bogen, wie bei einem Neugeborenen. Ebenso sind die beiden Winkel an dem Uebergang der Basis in die Aeste ganz abgerundet. Auf der linken Seite, etwa 26 Mm. von der Spina mentalis entfernt, findet sich eine durch den ganzen Unterkiefer durchgreifende Nath. Sie fehlt auf der rechten Seite, und es erscheint daher wahrscheinlich, dass sie von einem geheilten Bruche herrührt, obgleich darüber aus der Lebensgeschichte des Kindes Nichts bekannt ist. Indessen ist dasselbe früher einmal aus seiner Wiege hinausgefallen und könnte sich dabei diesen Bruch zugezogen haben. Aber auch die beiden Processus condyloidei besitzen an ihrer Basis eine durchgreifende Nath, die noch sehr wenig verknöchert war, so dass diese beiden Fortsätze, besonders der linke, bei dem Trocknen sich stark nach einwärts gezogen haben, und nicht mehr in ihre Cavitates glenoideae passen. Von den Zähnen des Unterkiefers haben die vier Schneidezähne bereits gewechselt, und die zwei mittleren bleibenden sind auch schon vollkommen vorgetreten. Die beiden Milch-Eckzähne stehen noch; von den vorderen Backzähnen sind rechts beide, links der zweite abgeworfen, die Wechselzähne sind aber noch nicht durchgebrochen. Der dritte Backzahn ist auf beiden Seiten ganz ausgebrochen und hat an seiner Krone drei äussere und zwei innere Zacken. Der vierte Backzahn steckt noch ganz in den Alveolen und von dem fünften ist Nichts zu sehen.

Im Innern des Schädels sieht man, dass die vorderen Schädelgruben wenig entwickelt sind; die Partes orbitales der Stirnbeine sind ansehnlich stark gewölbt und die Iuja cerebralia auf ihnen deutlich entwickelt; die Lamina cribrosa mit der Crista Galli ist schmaal und sehr vertieft. Die Partes petrosae der Schläfenbeine treten stark in die Schädelhöhle vor und sind an ihrer Oberfläche mit stark entwickelten Wülsten und Erhabenheiten versehen. Die mittleren Schädelgruben sind daher ansehnlich tief. Die hinteren Schädelgruben sind wegen der Abflachung der

Schuppe des Hinterhauptbeines wenig umfangreich aber ziemlich tief. Die Protuberantia occipitalis interna und die Lineae cruciatae so wie die Sulci transversi sind wenig entwickelt. Die Iuja cerebralia und Impressiones digitatae sind sowohl an der Innenfläche des Stirnbeins als der Scheitelbeine ansehnlich stark ausgeprägt. Der Sulcus longitudinalis zwischen den beiden Scheitelbeinen ist nur schwach entwickelt; Eindrücke von Pachionischen Drüsen und Foramina parietalia finden sich nicht. An der Schädelbasis sind alle Oeffnungen in normaler Weise und Zahl vorhanden, nur die Foramina iujularia sind mehr in die Breite gezogene Spalten, als rundliche Löcher.

Die Knochensubstanz des ganzen Schädels ist nicht nur sehr unvollkommen entwickelt, sondern auch offenbar pathologisch verändert. Das Schädeldach ist sehr dünn und an den meisten Stellen keine Diploe zu unterscheiden, um so weniger, da auch die beiden Tabulae vitreae osteoporotisch verändert sind. Es giebt viele Stellen an dem Schädeldache, wo dasselbe kaum 1 Mm. dick und daher ganz durchscheinend ist. Die dickste Stelle an der oberen Spitze des Hinterhauptbeines ist 5,6 Mm. Alle Knochen sind sowohl an ihrer äusseren als inneren Oberfläche durch Periostitis osteoporotisch verändert. Letzterer Zustand wurde wohl erst in der späteren Lebensperiode durch die Rachitis, welche das ganze Skelet ergriffen hatte, bedingt.

III. Die Muskeln.

Ich habe die Muskeln der ganzen rechten Seite der Helene Becker selbst präparirt, und die der linken Seite durch meinen Assistenten, Herrn Dr. E. Hermann, präpariren lassen.

Das Resultat ist im Ganzen: dass sich zwar besonders an der oberen Extremität mehrere Abweichungen von dem gewöhnlichen menschlichen Typus, aber keine bestimmten Affenähnlichkeiten in der Anordnung der Muskeln finden.

Im Näheren sind alle Gesichtsmuskeln zwar schwach entwickelt, aber doch ganz normal und von einander isolirt vorhanden, wie bei keinem Affen.

Kein Halsmuskel zeigt eine affenähnliche Anordnung, weder der Sternocleidomastoideus, noch die Scaleni; es findet sich kein Omo-

cervicalis, der Levator scapulae und der Serratus anticus major sind ganz voneinander getrennt, ja ersterem fehlen, entgegengesetzt dem Affentypus, die unteren Zacken ganz; er hat auf der rechten Seite nur zwei, auf der linken noch eine schwache dritte, von den Querfortsätzen der obersten Halswirbel entspringende Zacken. Die Nackenmuskeln, besonders der Cucullaris und die Rhomboidei, sind schwach und letztere gehen nur an die Dornfortsätze der unteren Halswirbel.

Der Pectoralis major und minor verhalten sich ganz wie gewöhnlich, nur dass letzterer nur mit zwei Zacken und stark seitlich von der dritten und vierten Rippe entspringt. Dem Pectoralis major fehlt das in die Scheide des Rectus übergehende Bündel nicht. Die Sehne des Latissimus dorsi entsendet keinen Latissimocondyloideus an den Condylus internus des Oberarms oder an das Ligamentum intermusculare internum.

Alle Schulterblattmuskeln verhalten sich wie gewöhnlich. Der Coracobrachialis ist schwach und wird rechter Seits nicht von dem N. musculocutaneus durchbohrt. Der lange Kopf des Biceps ist auf beiden Seiten sehr schwach.

Die Vorderarm- und Handmuskeln zeigen zwar einige Abweichungen, die aber meistens nicht als specifische, affenähnliche Anordnungen erscheinen. Der Flexor pollicis longus ist ganz isolirt und gut entwickelt, nur fehlt ihm auf beiden Seiten das sich ihm meist anschliessende Bündel des Flexor digitorum communis sublimis. Der Abductor pollicis longus und der Extensor pollicis brevis sind allerdings wie bei den Affen nicht von einander getrennt. Links fehlt der Ext. poll. brev. ganz; rechts trennt sich bei dem Durchtritt der Sehne durch die erste Scheide des Ligam. carpi dorsale, von ersterer eine Sehne ab, welche die Sehne des Ext. poll. brev. zu ersetzen scheint. Der Abductor poll. long. setzt sich fast nur an das Os multangulum maj. an. Der Extensor dig. communis schickt an die vier gewöhnlichen Finger Sehnen; links findet sich aber ausserdem noch ein eigener Extensor digiti medii. Der Extensor indicis proprius schickt auch nach dem Daumen eine feine Sehne, was indessen keine Affeneigenthümlichkeit ist. Der Extensor pollicis longus hat linker Seits eine sich spalten lassende Sehne.

Unter den Handmuskeln ist das Verhalten der kleinen Muskeln des

Daumens eigenthümlich, aber nicht affenähnlich. Der dem Abductor poll. brevis seinem Ursprung und seiner oberflächlichen Lage nach entsprechende Muskel setzt sich nicht an das laterale, sondern an das mediale Sesambein der ersten Phalange des Daumens an. Ein Opponens in der gewöhnlichen Anordnung fehlt ganz; es entspringt dagegen ein Muskel vor der vorderen Fläche des Mittelhandknochens des Daumens, welcher sich auch an das mediale Sesambein festsetzt. Auch der der Lage und dem Ursprunge nach äussere Kopf des Flexor poll. brev. setzt sich nicht an das laterale, sondern an das mediale Sesambein fest. Der von mir als medialer oder innerer Kopf des Flexor poll. brev. bezeichnete kleine Muskel (Interosseus int. I. Dursy und Henle) fehlt. Die beiden Abtheilungen des Adductor pollicis sind vereinigt und setzen sich an das mediale Sesambein des Daumens an. Das Eigenthümliche der Anordnung dieser Muskeln besteht also darin, dass sie sich alle an das mediale, keiner an das laterale Sesambein ansetzen, was bei den Affen nicht vorkommt. Die Interossei verhalten sich wie gewöhnlich; die bei den Affen sich findenden Contrahentes sind nicht vorhanden.

An den Bauchmuskeln ist nichts Abweichendes zu bemerken. Der Rectus entspringt wie gewöhnlich, hat aber nur drei Inscriptiones tendineae, deren oberste längs des siebenten Rippenknorpels verläuft. Unterhalb des Nabels findet sich keine Inscription mehr.

Die Becken- und Gesässmuskeln sind schwach, aber in gewöhnlicher Weise vorhanden. Dasselbe ist mit den Oberschenkelmuskeln der Fall, nur würde sich der Adductor parvus leicht in zwei Portionen spalten lassen. Die Beugemuskeln des Unterschenkels sind schwach, schlecht voneinander isolirt und der dem Semimembranosus entsprechende Muskel verdient diesen Namen nicht, da er mehr als ein rundlicher Muskel mit runder Sehne entwickelt ist. Auf der rechten Seite hängt er durch ein von ihm ausgehendes Muskel-Bündel mit dem Vastus internus zusammen. Der Biceps femoris verhält sich ganz wie gewöhnlich.

Von den Unterschenkelmuskeln ist der Tibialis anticus einfach und nicht einmal in seiner Sehne bei seinem Ansatz an das Os cuneiforme primum getheilt. Der Extensor digit. commun. longus giebt einen Peroneus tertius ab. Auf der rechten Seite verlaufen die Sehnen der beiden Peronei unterhalb des Malleolus ext. in einer Scheide, an welche

ein ansehnliches Muskelbündel des Peroneus longus übergeht. Ein Peroneus parvus fehlt und auch die von der Sehne des Peroneus brevis ausgehende und an den äusseren Fussrand sich ansetzende Sehne, findet sich nicht. Der Soleus hat seine beiden Ursprünge. Der Plantaris fehlt auf der rechten Seite, links findet sich ein solcher, sehr klein und schwach. Die langen Beugemuskeln der Zehen, sowie alle kleinen Fussmuskeln, sind wie immer bei dem Menschen angeordnet. Die zweite Zehe hat zwei interossei interni, nicht die dritte wie bei den Affen. Auch hier fehlen die Contrahentes.

IV. Verdauungsorgane.

Die Zunge ist ganz normal gebildet. Die Geschmackspapillen sind gut entwickelt, namentlich auch die Papillae circumvallatae; doch sind letzterer nur drei auf jeder Seite.

Der Magen hat seine gewöhnliche Form und fasst mässig gefüllt 500, stark gefüllt 750 Cctm.

Der Dünndarm ist 438 Ctm., der Dickdarm mit dem Mastdarm 117 Ctm. lang, zusammen also 555 Ctm.; ohngefähr siebenmal so lang. als der Körper.

Bei dem schon erwähnten 8jährigen Mädchen war der Dünndarm 374 Ctm., der Dickdarm mit Mastdarm 114 Ctm., zusammen 485 Ctm. lang. Die Körperlänge wurde leider nicht gemessen.

Die Valvulae conniventes, welche an dem Darm der beiden secirten normalen Kinder sehr stark und dichtstehend und bis weit in das Ileum herab ausgebildet waren, sind bei der Helene Becker sehr schwach entwickelt, niedrig, stehen weit von einander entfernt und hören 160 Ctm. hinter dem Pylorus schon ganz auf Dieses ist interessant, insofern bekanntlich selbst bei den Anthropoiden die Valvulae conniventes ganz fehlen. Die Zotten stehen auf der Darmschleimhaut ziemlich dicht, und von gewöhnlicher Länge. Die Peyer'schen Drüsen, sowohl die solitariae als agminatae beginnen schon früh am Anfange des Ileum, an dessen Ende sich noch ein grosser Haufen zeigt. Sie sind nicht geschwellt. Das Coecum ist in gewöhnlicher Weise entwickelt, nur geht der 5 Ctm. lange Processus vermiformis trichterförmig von seinem Ende aus, wie bei dem Fötus. Der Mastdarm ist sehr weit.

Die Leber war klein und wog mit der sehr grossen Gallenblase 360 Grm. Die Leber des 8jährigen normalen aber tuberculösen Mädchens wog 622 Grm.; die des 7½jährigen Knaben 463 Grm. Die Gallenblase enthielt 30 Cctm. einer fast ganz hellen schleimigen Flüssigkeit, und in dem Anfang des Ductus cysticus stak ein denselben vollständig ventilartig schliesender, maulbeerförmiger Gallenstein. Nach einer von dem damaligen Privatdocenten und Assistenten des physiolog. Institutes Hrn. Dr. Hofmann freundlichst angestellten Untersuchung, zeigte der Inhalt keine Gallenfarbestoffreaction, enthielt nur äusserst geringe Mengen von Gallensäuren, geringe Mengen von Eiweis und Schleim. 10,0984 Grm. frischer Flüssigkeit lieferten 0,1626 trockene Substanz und diese hinterliess 0,765 Asche, welche stark alkalisch war. Dieser verhältnissmässig grosse Aschengehalt rührt indessen vielleicht theilweise davon her, dass das Glas, in welchem die Galle aufgefangen wurde, nicht staubfrei war.

Die Leber hat insofern eine auffallende Form, als nicht nur ihr unterer scharfer Rand, entsprechend dem Ansatz des Ligamentum suspensorium, sondern auch der obere stark eingekerbt ist, so dass die Eintheilung in einen grossen rechten und linken kleinen Lappen sehr ausgesprochen ist. An der unteren Fläche sind die Furchen der Art nach in der gewöhnlichen Weise vorhanden. Die Fossa longitudinalis dextra anterior ist weit und tief zur Aufnahme der sehr grossen Gallenblase. Dagegen ist die Fossa long. posterior dextra zur Aufnahme der Vena cava inferior sehr kurz. Die Fossa longitudinalis sinistra ist sowohl in ihrem vorderen als hinteren Theile stark und tief entwickelt, obgleich die entsprechenden Ueberreste der Nabelvene nicht besonders stark sind. Die Fossa transversa zwischen den beiden starken und breiten Fossae longitudinales ist kurz und seicht. Aus diesem Grunde sind sowohl der Lobulus quadratus als Spigelii schmal.

V. Herz und Lungen.

In dem Bau des Herzens war keine besondere Abweichung zu bemerken. Der Ursprung der grossen Gefässe aus dem Arcus Aortae zeigte die sogen. Fleischfresser-Varietät, d. h. die linke Carotis entspringt auch noch aus dem Truncus anonymus, doch ist der gemeinschaftliche

Stamm sehr kurz. Dieses ist allerdings die gewöhnliche Anordnung bei den Affen, namentlich auch den Anthropoiden. Doch findet sie sich bekanntlich auch sehr oft bei dem Menschen. Das Foramen ovale und der Ductus arteriosus Botalli sind geschlossen. In der Verzweigung der Arterien fand ich keine besondere Abweichung von dem gewöhnlichen menschlichen Typus. Nur in Beziehung auf die Corotiden fand sich die auch sonst wohl vorkommende Varietät, dass die rechte Carotis interna stärker war, und ein grösseres Verbreitungsgebiet hatte, als die linke. Die rechte Carotis interna gab nämlich ausser ihrer A. Fossae Sylvii und einen starken Ramus communicans posterior, einen für beide Aa. corporis callosi bestimmten Stamm ab, welcher sich bei seinem Eintritt in die Fissura longitud. magna in zwei Aeste theilte. Die linke Carotis interna ging fast ganz in ihre A. Fossae Sylvii auf, und schickte nur einen ganz schwachen Ast in die Fissura long. magna, welcher sich mit der aus der rechten Carotis herrührenden, linken A. corporis callosi verband. Der rechte Ram. communicus posterior fehlte; daher der bekannte Circulus arteriosus wenigstens nicht durch grössere Arterien geschlossen war. — Die beiden Aa. vertebrales verhalten sich wie gewöhnlich und waren auch gleich stark.

VI. Genitalien und Harnwerkzeuge.

An den inneren Genitalien war nichts besonders Abweichendes zu bemerken, ausser einer für das Alter von acht Jahren zurückgebliebenen Entwicklung. Die Eierstöcke sind klein, 7—8 Mm. lang, 4—8 Mm. hoch, 3—4 Mm. dick und von derber Textur. Nach Erhärtung des rechten Eierstocks in Alkohol zeigten sich aufgemachten Durchschnitten zahlreiche Follikel in der Randzone in noch sehr unentwickeltem Zustande, wie bei Neugeborenen. Die Eileiter sind 36—38 Mm. lang, haben ein offenes mit Franzen besetztes Ostium abdominale und sind durchgängig. Eine Fimbria ovarii war nur schwach entwickelt vorhanden. Das Parovarium ist stark entwickelt, auch findet sich linker Seits eine gestielte Hydatide. Der Uterus ist wenig entwickelt, kaum wie bei einem neugeborenen Kinde; besonders der Körper ist schwach und in seinem Fundus eingesenkt; der Mutterhals zwar mehr wie bei dem Neugeborenen vom Körper abgesetzt, aber auch schwach.

Von den äusseren Genitalien sind die grossen Schaamlippen ganz gut entwickelt und gehen oben und unten in eine Commissura anterior und posterior über, wenn gleich letztere nicht sehr scharf zur Bildung eines Frenulum labiorum vorspringt. Dagegen sind die kleinen Schaamlippen bis auf das Praeputium clitoridis und die sich von unten an die Glans clitoridis ansetzenden Frenula reducirt, und werden mit der Clitoris ganz von den grossen Schaamlippen eingeschlossen und bedeckt. Diese Modification in der Bildung der äusseren Genitalien ist nicht affenähnlich, vielmehr gewissermassen das Gegentheil. Bei den Aeffinnen, namentlich auch dem Orang-Outan und dem Chimpansé, deren Genitalien von allerdings nur jungen etwa 4jährigen Thieren ich vor mir liegen habe, muss man sagen, dass eigentlich die grossen Schaamlippen ganz fehlen. Sie werden nur durch flache Wülste repräsentirt, die sich nach aussen von den Schenkeln, nach innen von den kleinen Schaamlippen durch eine Furche absetzen. Weder eine obere noch untere Commissur mit Frenulum ist vorhanden. Der Mons veneris ist aber bei beiden Thieren durch ein starkes Fettpolster ausgezeichnet. Die kleinen Schaamlippen sind dagegen bei beiden stark, besonders in ihrem oberen, das Praeputium und die Frenula clitoridis bildenden Theile, entwickelt. Bei Beiden, besonders beim Chimpansé, laufen sie aber auch zu den Seiten des Scheiden-Einganges herunter und gehen unten durch eine Commissur in einander über.

Es ist aus den Untersuchungen von Cuvier, J. Müller und Luschka bekannt, dass die äusseren Genitalien der Hottentottinnen und Buschmänninen sich von denen der Europäerinnen dadurch unterscheiden, dass ihnen ebenfalls die grossen Schaamlippen fast ganz fehlen, dagegen die Nymphen, namentlich in dem das Praeputinm und die Frenula clitoridis bildenden Theile, stark entwickelt sind; also ganz wie bei dem Orang-Outan und dem Chimpansé. Bei unserer Helene ist es aber gerade umgekehrt, die grossen Schaamlippen sind stark, die kleinen schwach entwickelt. Nun ist es ausserdem bekannt, dass die kleinen Schaamlippen auch bei den Europäerinnen ausserordentliche Verschiedenheiten in ihrer individuellen Entwicklung zeigen, und darunter auch ihre schwache Bildung, wie bei unserer Helene gar nicht selten ist. Es ist das also nur eine individuelle menschliche Modification, keine Affenähnlichkeit.

Das Hymen ist wohl durch Manipulationen während des Lebens schon beeinträchtigt worden, und nur durch zwei seitlich den Introitus vaginae begränzende schwache Fältchen angedeutet. Die Columnae rugarum der Scheide sind schwach entwickelt und vorzüglich nur die vordere. Die Portio vaginalis ist schwach und häutig, aber sonst wie der Muttermund normal.

An den Harnwerkzeugen war nichts Abweichendes zu bemerken. Die rechte Niere ist gegen die Norm etwas grösser als die linke. Harnleiter und Harnblase normal. Die Nebennieren sind beiderseits ansehnlich gross, die rechte grösser, 32 Mm. lang und 30 hoch; die linke 20 lang und 20 hoch.

Nachdem ich in dem Vorstehenden eine, wie ich glaube, hinreichend genaue Beschreibung von dem ganzen Körper und den einzelnen Organen des mikrocephalen Kindes Helene Becker gegeben habe, muss ich es wohl auch noch als meine Aufgabe betrachten, mich über die von C. Vogt aufgestellte Lehre der Genesis und Bedeutung dieser Missbildung der Mikrocephalie auszusprechen, welche in der neueren Zeit ein so grosses Aufsehen gemacht hat, und von so Vielen blindlings als einer der schlagendsten Beweise der Abstammung des Menschen von einem affenartigen Urahn betrachtet worden ist.

Nach Vogt ist „die Mikrocephalie nicht das Resultat einer einfachen Bildungshemmung des Gehirns, die übrigens nirgends in der Natur vorkommt, sondern das Resultat einer aus Hemmung entstandenen Abweichung in der Entwicklung der Hirnwölbung, welche je nach den Fällen sich bald mehr der menschlichen Richtung, bald derjenigen der Affen mehr anschliesst“ (cf. l. l. p. 248). Und ein anderes mal sagt er (pag. 276): „Die Mikrocephalie ist eine partielle atavistische Bildung, welche in den Gewölbtheilen des Gehirns auftritt und als nothwendige Folge eine Ablenkung der embryonalen Entwicklung nach sich zieht, die in ihren wesentlichen Characteren auf den Stamm zurückführt, von welchem aus die Menschengattung sich entwickelt hat.“

Man hat es der Arbeit Vogts, in welcher er diesen Satz von der atavistischen Natur des Mikrocephalen-Gehirns zu beweisen sucht, zum Vorwurf gemacht, dass sie nicht auf die eigene Untersuchung auch nur eines einzigen wirklichen Gehirns eines Mikrocephalen, sondern nur auf

die Untersuchung von Schädeln und Schädelausgüssen gegründet ist. Und in der That kann man es auch wohl nur als ein kühnes Unternehmen betrachten, ohne dieses wichtigste und wesentlichste Material ein so bedeutungsvolles Gebäude aufführen zu wollen.

Allein man kann dagegen sagen, dass es nicht in seiner Macht lag, sich dieses Material zu verschaffen, und dass es bei der Unwahrscheinlichkeit dasselbe in kürzerer Zeit erscheinen zu sehen, gerechtfertigt war, den Versuch der Beantwortung der von ihm erhobenen Frage mit dem ihm zu Gebote stehenden osteologischen Materiale zu machen. Jeder, welcher sich nun mit diesem Versuch näher bekannt macht, wird auch nicht läugnen können, dass Vogt auf denselben einen ungewöhnlichen Fleiss und nicht geringen Scharfsinn verwendet hat.

Allein ebensowenig wird geläugnet werden können, dass Vogt, abgesehen von nicht mangelnden positiven Irrthümern und Fehlern, sein Material weit mehr mit Dialektik und geschickter Gruppirung der Einzelheiten zu seinen Gunsten, als mit objectiver und überzeugender Wahrheit bearbeitet hat, und in seinen Schlüssen weit über Das hinaus gegangen ist, wozu ihn nicht nur sein Material an Schädelausgüssen, sondern auch an Schädeln berechtigte.

Es würde leicht sein, für diese Behauptung den Einzelbeweis zu führen, wenn ich mich entschliessen könnte, ihm Schritt vor Schritt zu folgen. Allein ich kann mich zu einer so ausführlichen Widerlegung, die ein ebenso grosses Maass von Worten und Raum erfordern würde, als ihn Vogt zu dem Aufbau seiner Schlüsse verwendet hat, nicht entschliessen, da der Wissenschaft daraus gar kein Nutzen erwachsen würde. Denn es ist ohne weiteres Eingehen in die Einzelheiten meistens von vorne herein einleuchtend, dass Vogt zu der Begründung seiner Schlüsse nicht entfernt das nothwendige Material hatte, und die aufgewendete grosse Genauigkeit den Mangel desselben nicht zu ersetzen vermochte.

So führt er auf zehn Quartseiten eine weitläufige Untersuchung über das Wachsthum des Schädels der Mikrocephalen, um zu dem Schlusse zu kommen, dass bei denselben die Schädelkapsel nach den für die Affen geltenden Gesetzen, das Gesicht aber nach den für den Menschen bestehenden wachse. Nun standen ihm zu einer solchen Untersuchung nur drei jugendliche Schädel von Mikrocephalen, und zwar von 5, 10

uud 15 Jahren und vier Schädel von Erwachsenen zu Gebote, welche ausserdem selbst wieder untereinander grosse, nicht allein von dem Alter abhängende, Verschiedenheiten zeigen. Einen neugebornen mikrocephalen Schädel besass er nicht. Bedenkt man nun, eine wie grosse Anzahl von Kinder- und Erwachsenen-Schädeln Welker nothwendig hatte, um seine ausgezeichneten Untersuchungen über das Wachsthum des normalen Schädels zu führen, so kann man nicht anders als ohne Weiteres behaupten, dass die ganzen Untersuchungen über das Wachsthum des mikrocephalen Schädels auf Sand gebaut ist. Im ersten Lebensjahre wächst der Menschenschädel fast um ebensoviel als in den folgenden sechzehn Jahren. Was kann man über das Wachsen von Schädeln sagen, die man erst vom 5. Jahre an kennt? Ueber das Wachsen des Affenschädels weiss man ebenfalls in den ersten Lebensjahren gar Nichts, und selbst über die späteren Zeiten hat weder Vogt noch irgend Jemand bisher hinreichende Untersuchungen angestellt.

Ebenso führt Vogt eine lange Untersuchung über den Prognathismus, und schliesst dieselbe mit dem Bekenntniss, dass die einzige wahre Abschätzung desselben die künstlerische Betrachtung des Schädels sei, alle anderen Maasse nur mehr oder weniger Näherungswerthe geben können. Und nun kommt noch sogar der Schädel unserer Helene, welher nicht nur nicht prognath, sondern fast opistognath ist? Was kann man also mit allen von Vogt gegebenen und auf viele Messungen gestützte Tabellen anfangen?

Noch schlimmer steht es natürlich mit Allem, was Vogt über das Gehirn der Mikrocephalen sagt, das er wie gesagt gar nicht kannte, aber dennoch sich nicht enthalten konnte, nach den leicht sehr irre leitenden Schädelausgüssen ganz bestimmte Behauptungen über dieses Gehirn auszusprechen. So braucht er z. B. neun Quartseiten, um mit grosser Genauigkeit durch Messungen und Zahlen den Beweis zu führen, dass der Ausspruch R. Wagners, die Abweichung des mikrocephalen Gehirns beruhe vorzüglich auf einer Reduction der Hinterlappen des grossen Gehirns, während das Affengehirn sich gerade durch die grosse Entwicklung dieser Hinterlappen auszeichne, nicht richtig sei. Wenn man nun weis, dass das Verfahren der Oberflächen-Bestimmung der Hemisphären, mag man dieselben nun mit H. Wagner mit Blattgold, oder mit Vogt

mit Staniol belegen, an und für sich sehr ungenügend und unsicher ist; wenn man ferner weis, dass es kein Mittel giebt, die einzelnen Hirnlappen mit hinreichender Sicherheit und ausreichender Genauigkeit von einander abzugränzen und zu trennen; wenn man dazu noch hinzunimmt, dass Vogt an seinen Schädelausgüssen die wichtigsten zur Trennung der Hirnlappen von einander zu benutzenden Furchen, die Centralfurche kaum, die senkrechte Hinterhauptsfurche etc. gar nicht bestimmen konnte: so sieht man ein, dass auch das scheinbar genaueste, sorgfältigste und umsichtigste Verfahren in dieser Trennung der Gehirnlappen von einander und ihrer Oberflächen-Bestimmung, ganz nutzlos ist und zu keinem Resultate führen kann. Der Triumph, welchen Vogt über R. Wagner davon getragen zu haben glaubt, verschwindet in Nichts gegen die ganz einfache und übereinstimmende Angabe aller Beobachter, dass in der That die Hinterlappen des grossen Gehirns bei allen Mikrocephalen höchst dürftig entwickelt und ganz besonders verkümmert sind.

Es ist gewiss ganz richtig, wenn der von Vogt citirte E. v. Baer sagt: „Die Wissenschaft hat nicht nur die Aufgabe aufzubauen; die Fehler und Irrthümer, welche sie wegräumen muss, bevor die Wahrheit aufgestellt werden kann, geben weit mehr Arbeit, als der neue Aufbau.“ Niemand kann von der Wahrheit dieses Satzes mehr durchdrungen sein als ich. Denn wie bei dem Gehirn der Affen und bei ihren Muskeln, so gebe ich mir auch hier bei diesen Mikrocephalen die an und für sich undankbare Mühe, den Beweis zu liefern, dass man vollkommen unberechtigt durch die vergleichend anatomische Betrachtung dieser Gebilde und Missbildungen, den Beweis geführt zu haben oder führen zu können glaubt, dass der Mensch in einem natürlichen Entwicklungsgange von den Affen abstamme. Freilich wenn man diesen Beweis bestreitet, so heisst es gleich: Niemand hat gesagt, dass der Mensch von den uns bekannten und noch lebenden Affen abstamme; nur Blödsinn oder eine absichtliche Verdrehung kann die Behauptung aussprechen, dass irgend eine Autorität in der Descendenzlehre dieses jemals ausgesprochen habe. Aber dieselben Autoren, und vor Allem Vogt, wissen wieder nichts Eifriges zu thun, und suchen in Nichts mehr zu glänzen, als durch den Vergleich zwischen den noch lebenden Affen und dem Menschen die Gränze zwischen beiden wegzuräumen. Aber dieses Be-

mühen ist vergebens, mag man die Sache nun von Seite des Menschen oder von Seite der Affen angreifen.

Ich bin, wie ich schon einmal erklärt habe, durchaus kein principieller Gegner der Descendenzlehre auch für den Menschen. Aber die Beweise für ihre Richtigkeit auch für den Menschen, müssen anderswo gesucht und herbeigeschafft werden, als von den noch lebenden Affen. Von ihnen aus findet sich der Uebergang nicht. Das Irrthümliche dieser Angabe und dieses Bestrebens muss weggeschafft werden, damit man sich um so mehr bemüht und concentrirt, um andere Beweismittel herbeizubringen. Freilich sieht es damit sehr hoffnungslos aus.

Ich gehe also nicht auf die Vogt'sche Beweisführung in Betreff der Mikrocephalen im Einzelnen ein, sondern begnüge mich, darauf hinzuweisen, wie sich bei ihnen allerdings besonders in Beziehung auf das Gehirn manche Affenähnlichkeit findet und finden kann, ohne dass dadurch der Schluss berechtigt ist, dass wir bei unseren Mikrocephalen das Urbild unserer Abstammung auch nur in ihrem Gehirn auftreten sehen und in ihnen ein atavistischer Anklang an unsere einstigen Vorfahren zur Erscheinung gekommen sei.

In der That kann es nicht geläugnet werden, dass das Gehirn der Helene Becker auf den ersten Blick eine grosse Aehnlichkeit mit dem eines Affen besitzt. Es trägt, wie ich schon bemerkt habe, keine Spuren eines pathologischen Processes an sich, sondern gleicht in Grösse, Gewicht und äusserer Form durchaus dem Gehirn eines grösseren Affen wie z. B. dem eines Cynocephalus. Die Stirnlappen sind schmal, von beiden Seiten zugeschärft, und gehen vorne und unten in einen ziemlich stark entwickelten Siebbeinschnabel aus. Die Scheitellappen und besonders die Schläfenlappen sind verhältnissmässig gross. Mit den Hinterlappen ist dieses allerdings nicht der Fall, allein die unverhältnissmässig starke Entwicklung des kleinen Gehirns, bringt doch ein ähnliches Ansehen wie bei den Affen hervor, dass man das kleine Gehirn bei der Ansicht von oben und hinten vortreten sieht. Der Stammlappen mit den betreffenden Windungen fehlt so gut wie ganz, wie bei den meisten Affen.

Der Fossa Sylvii fehlt wie bei fast allen Affen der vordere Ast. Es ist zwar keine durchgreifende Fiss. occipit. perp. externa vorhanden;

allein dadurch, dass die Fiss. occip. perpend. interna oben durch keine Windung abgeschlossen ist, entsteht doch ein Anschein ersterer. Die Fiss. occip. perp. int. geht wenigstens auf der linken Seiten nicht in die Fiss. calcarina über, was bei den Affen Regel, bei dem Menschen sehr selten der Fall ist.

In Betreff der Windungen, so stimmt deren Zahl etwa mit der des Gehirns eines Ateles überein, ist aber entschieden kleiner, als die der Anthropoiden.

Die dritte Stirnwindung um den vorderen Ast der Fossa Sylvii herum, fehlt so gut wie ganz. Dieses ist, wie ich gezeigt habe (Beiträge zur Anatomie d. Hylobates p. 272 und pag. 76 der Sp.-Ab.), bei allen niederen Affen der Fall, und nur bei den Anthropoiden findet sich ein Anfang derselben. Die vordere Centralwindung ist wenigstens auf der rechten Seite nur unvollkommen von den Stirnwindungen geschieden, was auch bei vielen Affen sich findet. Die innere obere Scheitelbogenwindung (Premier pli de passage supér. externe) ist gar nicht vorhanden; gewiss nicht in ihrem für den Menschen so charakteristischen lateralen Verlauf um das obere Ende der Fiss. occip. perp. interna. Die innere untere Scheitelbogenwindung (Deuxième pli de Passage interne) umgiebt nur auf der rechten Seite das untere Ende der ebengenannten Fissur in schwach lateralem Verlauf; auf der linken trennt sie gerade verlaufend, wie gesagt, diese Fissur von der Fissura calcarina. Die Windungen der Insel fehlen mit dieser selbst wie bei den meisten Affen.

Trotz dieser zahlreichen Affenähnlichkeiten stimmt dennoch das Gehirn der Helene Becker in seiner ganzen Beschaffenheit und namentlich auch in der Anordnung seiner Windungen, mit keinen Gehirne irgend eines bekannten Affen überein. Ich glaube dieselben so ziemlich vollständig entweder in Natur oder wenigstens nach guten Abbildungen zu kennen, und kenne keines, als dessen atavistische Reproduction das Gehirn der Helene bezeichnet werden könnte Dieses wäre nun allerdings auch im Sinne Vogts gar nicht nothwendig, ja nicht einmal wahrscheinlich, da der Mensch nach ihm von einem Affen abstammt, welcher längst verschwunden ist.

Aber mit dem Gehirne dieses untergegangenen Affen müsste nach der Definition und Feststellung des Atavismus das Gehirn unsrer Mikro-

cephalen übereinstimmen. Denn Vogt sagt ausdrücklich, dass der Atavismus das Zurückschlagen auf eine bestimmte Bildung bezeichnet, welche bei einem Vorfahren normal war. So wie bei dem Hipparion die zwei seitlichen Zehen an seinen Füssen normal waren, und ihr jetziges zuweilen beobachtetes Auftreten bei unserem Pferde eine atavistische Bildung ist, so müsste das Gehirn unserer Helene Becker, wenn dasselbe eine atavistiache Gehirnform darstellen sollte, genau mit dem normalen Gehirne irgend eines vorweltlichen Affen übereinstimmen.

Ich glaube aber, dass es nachzuweisen ist, dass dieses mikrocephale Gehirn, so wie es hier gebildet ist, niemals das normale Gehirn irgend eines Thieres gewesen sein kann.

Zu diesem Beweise rechne ich erstens die ungleiche und asymetrische Bildung der Furchen und Windungen auf beiden Seiten des Gehirns. Bei den niederen Affen, zu denen unser Urahn jedenfalls gehört haben würde, ist die Symetrie der Windungen auf beiden Seiten ganz streng, und selbst wenn bei den höheren Affen, wie bei dem Menschen, Asymetrie auftritt, so ist sie doch anderer Art, wie hier bei dem mikrocephalen Gehirne. Die Asymetrie findet sich hier in den Windungen aller Hirnlappen, und ist namentlich rücksichtlich der vorderen Centralwindung und ihrem Verhalten zu den Stirnwindungen vorhanden, wo sie doch selbst bei dem menschlichen Gehirne meist nur in geringem Grade sich findet. Man sieht gleich, dass dieselbe mehr durch irgend eine Störung in der Ausbildung dieser oder jener Windung hervorgebracht ist, als durch eine Modification des sonst auf beiden Seiten gleichen Typus. Es ist zweitens kaum glaublich, dass irgend ein Affe normal so verkümmerte Hinterhauptslappen und Windungen besessen haben soll, als dieses Mikrocephalen-Gehirn sie aufzeigt. Auf dieser Stufe seiner Ausbildung hätte ein normales Affengehirn jedenfalls eine Fissura perp. externa und einen sogenannten Klappdeckel gezeigt. Davon ist hier nur dadurch ein Schein vorhanden, dass die innere obere Scheitelwindung verkümmert ist. Von den sogenannten Uebergangswindungen, die bei den Affen so charakteristisch sind, findet sich hier so gut wie gar Nichts. Mit der gewiss nicht normalen Entwicklung der Hinterlappen hängt auch, wie ich oben schon angab, das Verhältniss des kleinen Gehirns zum grossen zusammen, welches sicherlich niemals in solcher Weise bei

einem normalen Affen vorhanden war. Ganz gewiss hat sich drittens in Beziehung auf die innere Anordnung des Gehirns niemals eine Affe gefunden, bei welchem der Balken in so eigenthümlicher Weise, besonders in seinem Splenium mangelhaft entwickelt und der Fornix in seinen aufsteigenden Schenkeln und mittleren Theile so sehr mit dem Balken vereinigt war, als hier, so dass ein Septum pellucidum ganz fehlt, und die Foramina Monroi so gross sind, und eine so weite Communication der Seitenventrikel unter einander gegeben war.

Wenn es daher wohl keinem Zweifel unterliegen kann, dass dieses Gehirn der Helene Becker kein normal ausgebildetes, mit dem eines jemals gelebt habenden normalen Thiere übereinstimmendes ist, so hat es anderer Seits gar keine Schwierigkeit, in demselben ein verkümmertes menschliches Gehirn zu erblicken, welches auf einer früheren Stufe seiner Entwicklung eine Störung erlitt. Es trägt daher in seinen wesentlichen Anordnungen, namentlich auch in Beziehung auf die Furchen und Windungen der grossen Hemisphären den menschlichen Typus an sich; doch kam derselbe nicht zu seiner vollen Ausbildung, sondern blieb auf einer früheren Stufe seiner Entwicklung stehen und bildete sich nun partiell in einzelnen Richtungen weiter fort, so dass es den vollständigen menschlichen Typus nicht erreichte. Da es aber keinem Zweifel unterliegt, dass das Affengehirn nach demselben Grundtypus sich entwickelt, wie das menschliche, aber bei seiner Ausbildung eine andere Richtung einschlägt (S. meine Abhandlung „Ueber die Grosshirnwindungen des Menschen etc.“ in den Abhandlungen d. K. bayer. Ak. d. W. II. Cl. X. Bd. II. Abth. pag. 486 1868), so ist es nicht zu verwundern, dass das Mikrocephalen Gehirn eine bestimmte Aehnlichkeit mit einem Affengehirn an sich trägt.

Was die Zeit betrifft, wann diese Störung stattfand, so könnte man vielleicht geneigt sein, dieselbe nach der Grösse des Gehirns und nach dem Reichthum seiner Windungen in die zweite Hälfte des achten Fötus-Monates zu verlegen; aber die Anordnung der Windungen stimmt mit dieser Annahme durchaus nicht überein, wie unter Anderem ein Vergleich unserer Fig. IV. und V. von dem Gehirn der Helene Becker mit Fig. X. oder XI. der Taf. IV. meiner Schrift: Ueber die Grosshirnwindungen des Menschen zeigt. Vielmehr hat wahrscheinlich der störende

Einfluss das Gehirn der Helene schon in viel früherer Zeit, etwa am Ende des dritten Fötus-Monates, stattgefunden, da er ja selbst die Ausbildung der Fossa Sylvii. die zu dieser Zeit sich in ihren drei Abschnitten zu entwickeln anfängt, und die um den vorderen Ast derselben sich herumziehende dritte Stirnwindung getroffen hat. Von da an ist zwar die Entwicklung noch weiter fortgeschritten, aber in eigenthümlicher nicht mit dem normalen menschlichen Typus übereinstimmender Weise, und ohne überhaupt einen höheren Entwicklungsgrad, als wie etwa bis zum 8. Monate zu erreichen.

Allerdings ist es schwierig zu sagen, welches dieser die Entwicklung des Gehirns der Helene Becker oder irgend eines anderen Mikrocephalen störende Einfluss gewesen ist, und gerade um ihn zu suppliren, ist die Vogt'sche Hypothese von dem atavistischen Rückschlage ersonnen worden.

Man könnte vielleicht geneigt sein, auch hier wie in anderen Fällen zuerst an den Schädel zu denkèn, und in ihm die Ursache der Verkümmerung der Entwicklung des Gehirns zu suchen, wie dieses auch in der That von den beiden Autoren, welche sich über die Helene Becker noch während ihres Lebens ausgesprochen haben, geschehen ist. Prof. Schaffhausen und Dr. Büchner vermutheten, dass der Schädel ungewöhnlich dick und die Näthe verknöchert sein würden. Allerdings sind, wie wir gesehen haben, die Pfeilnath und die beiden Schuppennäthe verwachsen und auch die Fontanellen sollen schon bei der Geburt geschlossen gewesen sein. Die Wirkung davon spricht sich auch in Bestätigung des Virchow'schen Gesetzes, in der dolichocephalen Gestalt des Schädels aus. Allein ebenso sicher ist, dass alle übrigen Schädelnäthe nur sehr locker miteinander vereinigt waren, und dass die Schädelknochen sehr dünn und weich sind und daher der Entwicklung des Hirnes wohl schwerlich ein hinreichendes Hinderniss bereiten konnten. Die Schädelknochen sind krankhaft verändert, jedenfalls durch eine Periostitis, und unzweifelhaft war dieselbe rachitischer Natur, da ja das ganze Skelet in hohem Grade von Rachitis ergriffen war. Es fragt sich nur, in welche Zeit man diese Rachitis verlegen soll, ob sie sich erst in den späteren Lebensjahren ausbildete, oder schon früher, vielleicht schon im Fötusleben vorhanden war. Prof. Schaffhausen, welcher die Helene im 4. Lebensjahre

untersuchte, sagt Nichts von einer bei ihr vorhandenen Rachitis, spricht vielmehr von schlanken und wohlgeformten Gliedern; und auch ich selbst, als ich das Kind etwas später in demselben Jahre sah, bemerkte Nichts von Rachitis; Dr. Büchner dagegen, welcher die Helene etwa zwei Jahre später untersuchte, sagt, dass die Handwurzel-Gelenke damals eine rachitische Auftreibung gezeigt hätten. Es ist also wahrscheinlich, dass die Rachitis sich erst in späteren Lebensjahren entwickelte und nicht mit der verkümmerten Hirnbildung in direktem Zusammenhang stand. Ausserdem ist durch die Untersuchungen Vogts erwiesen, dass Synostose der Schädelnäthe durchaus nicht zu den wesentlich die Mikrocephalie begleitenden Zuständen gehört. Ferner wenn man auch irgend eine Veränderung an dem Schädel immer gleichzeitig mit der Mikrocephalie ausgebildet fände, würde daraus doch noch nicht hervorgehen, dass sie die Ursache der Hirnverkümmerung wäre, sondern beide Hirn- und Schädelverkümmerung könnten von ein und derselben Ursache herrühren. Weiter, wenn man selbst nachweisen könnte, dass die Hirnverkümmerung durch eine Schädelkrankheit bedingt gewesen sei, so wäre doch dadurch die Frage nur weiter dahin hinausgeschoben, dass man fragen müsste, welches die Ursache der Schädelkrankheit, Synostose, Hyperostose etc. gewesen sei. Endlich habe ich oben schon erwähnt, dass die Verkümmerung in dem Gehirn höchst wahrscheinlich in einer sehr frühen Zeit, am Ende des dritten Monates, begann, wo von einer Schädelkrankheit als Ursache derselben gar keine Rede sein konnte.

Aber auch mit der Annahme einer atavistischen Erscheinung in der Mikrocephalie, ist, wie leicht einzusehen, durchaus keine Erklärung gegeben, selbst wenn ihre Richtigkeit erwiesen werden könnte. Denn man würde ja sogleich danach fragen müssen, welche Ursache denn bei dem betreffenden Individuum auf einmal nach so vielen Jahrhunderten einen Rückschlag auf eine ursprüngliche Bildung veranlasste, und würde dadurch in alle Räthsel der organischen Formbildung verwickelt werden, in deren Erkenntniss wir auch durch die Darwin'sche Lehre nicht um den kleinsten Schritt weiter gekommen sind.

Doch hat die Vogt'sche Lehre eine so allgemeine und weite Verbreitung gefunden, dass es nicht überflüssig erscheint, sie auch noch von anderen Seiten zu beleuchten.

Und da scheint eine ihrer schwächsten Seiten die zu sein, dass fast alle bis jetzt bekannt gewordenen Mikrocephalen in ihrer Hirn- und Schädelbildung so verschieden von einander sind, dass dieselben gar nicht auf eine einzige Urahnen-Bildung zurückgeführt werden könnten. Man braucht nur die von Gratiolet, Theile und R. Wagner, Dr. Sander, Dr. v. Mierjeievsky, und mir von verschiedenen Gehirnen, und ebenso die von Vogt reproducirten und original gegebenen Abbildungen von Schädeln zu betrachten und zu vergleichen, so wird man trotz gewisser allgemein übereinstimmender Charaktere, doch solche Verschiedenheiten unter denselben finden, wie sie sich niemals unter verschiedenen Individuen derselben Art, z. B. unter verschiedenen Menschen finden. Die Grössen- und Gewichtsverhältnisse wechseln schon ganz enorm und steigen auf mehr als das Dreifache. Aber auch in der Anordnung der Windungen und in dem inneren Baue des grossen Gehirns finden sich Verschiedenheiten, die sich gar nicht auf individuelle Modificationen zurückführen lassen. Verschiedenheiten, wie sie hier der Schädel unserer Helene Becker und die der meisten anderen Mikrocephalen darbieten, finden sich sicherlich nicht unter Individuen derselben, ja kaum verschiedener Racen. Auf Altersverschiedenheiten lassen sich diese Unterschiede nicht zurückführen, da dieselben theils nicht wirklich gegeben sind, theils alle untersuchten Individuen in meinem Alter waren, wo sich höchstens nur noch quantitative, nicht mehr qualitative Unterschiede in der Hirn- und Schädelbildung entwickeln. Dass aber verschiedene Individuen ein und derselben Art unseres Urahnen so verschiedene Schädel- und Hirnbildungen besessen hätten, wird man wohl ebensowenig geneigt sein anzunehmen, als dass diese verschiedenen Mikrocephalen verschiedenen Arten oder Racen oder Entwicklungsstufen unseres Urahnen angehören.

Folgen wir ferner den Vogt'schen Ansichten über die Entstehung der Menschen und der Affen, aus einem gemeinschaftlichen Stamme, so muss man in Beziehung auf das Gehirn dieses Stammes annehmen, dass dasselbe weder dem eines Menschen noch dem eines Affen gleich, sondern eine neutrale Form besass, aus der sich in der einen Richtung das Menschen-, in der anderen das Affengehirn entwickelte. Die Form des Gehirns dieses Stammvaters muss sehr einfach gewesen sein, einfacher noch, als die der niedrigsten Affen und Halbaffen. Von der

Affenreihe sind alle Entwicklungsglieder, von dem Halbaffen bis zum Orang-Outan und Chimpansé vorhanden; von der Menschenreihe wissen wir durchaus Nichts. Aber diese Menschenreihe muss wahrscheinlich auch sehr zahlreich gewesen sein, zahlreicher selbst als die Affenreihe, da das Menschengehirn ja eine weit höhere Entwicklungsstufe erreicht hat, als das Affengehirn. Auf keiner Stufe ihrer Entwicklung können aber die Gehirne beider Reihen einander gleich gewesen sein; kein Gehirn der Menschenreihe war jemals gleich einem Gehirne der noch bestehenden Affenreihe. Nun kennen wir aber das Bildungsgesetz, dass die Organe des Fötus bei ihrer Entwicklung Formen durchlaufen, welche in den niedriger stehenden Arten ihrer Reihe bleibend geworden sind. Bleibt also ein Menschengehirn auf einer niederen Stufe seiner Entwicklung stehen, so wird es doch nur einem Gehirn der untergegangenen Menschenreihe, nie einem der Affenreihe gleich sein, weil es ganz anderen Bildungsgesetzen folgt.

Es leuchtet also ein, dass das ganze Bestreben, die atavistische Natur eines mikrocephalen Gehirnes durch seinen Vergleich mit einem Affengehirne darthun zu wollen, ein unlogisches ist. Das Menschenhirn ist nach Darwin-Vogt'schen Ansichten nicht aus einem der bekannten Affengehirne hervorgegangen; wie kann man nun die atavistische Natur eines mikrocephalen Gehirnes durch Vergleich mit einem Affengehirn beweisen wollen?! Es ist dieses der gewöhnliche oben schon gerügte Trugschluss.

In meinem früheren Aufsatze über das Gehirn der Helene Becker habe ich schon darauf hingewiesen und Prof. Schaffhausen hat nach einem Berichte in der A. A. Zeitung vom 17. August 1872 bei der Versammlung der deutschen anthropologischen Gesellschaft in Stuttgart denselben Gedanken verfolgt, wie unnatürlich es sei, anzunehmen, dass der atavistische Rückschlag bei der Mikrocephalie nur das Gehirn und den Schädel, nicht aber auch andere Organe getroffen haben sollte, oder mit anderen Worten, dass das Gehirn des Mikrocephalen allein das seines affenartigen Urahns sein solle, während alle anderen Organe menchliche sind.

Dieser Einwurf war allerdings bisher nur auf die allgemeine Kenntniss und äussere Erscheinung der Mikrocephalen gebaut, welche mit

Ausnahme des Kopfes, rein menschlich ist; eine genaue anatomische Zergliederung eines Mikrocephalen fehlte bis jetzt. Aus der von mir oben gegebenen der Helene Becker ersehen wir nun, dass sich allerdings auch im übrigen Körper derselben einige Anordnungen finden, welche nicht mit dem am meisten verbreiteten menschlichen Typus übereinstimmen.

Dahin gehören mehrere Varietäten in der Anordnung der Muskeln besonders des Vorderarms; die Art des Ursprungs der grossen Gefässe aus dem Aortenbogen; die geringe Entwicklung der Valvulae conniventes des Darms; die geringe Entwicklung ja fast der Mangel der kleinen Schaamlippen. Allein diese Abweichungen sind theils solche, welche häufig bei ganz normal gebildeten Menschen vorkommen, wie z. B. die Gefässanordnung und die Vereinigung des Abductor longus pollicis mit dem Extensor pollicis brevis, welche daher jedenfalls bei der Helene Becker nicht mehr Affenähnlichkeit beweisen, wie bei vielen anderen Menschen. Theils sind sie solche, die gar keine Affenähnlichkeit, sondern geradezu eine Verschiedenheit von denselben darbieten, wie die übrigen Muskelvarietäten, und die mangelhafte Entwicklung der kleinen Schaamlippen. Nur in der geringen Ausbildung der Valvulae conniventes des Darms könnte man etwa eine besondere Hinneigung zu dem Affentypus erblicken, wenn es nicht so viel einfacher wäre, darin eine Erscheinung mangelhafter Ausbildung überhaupt zu sehen, die in dem ganzen Körper des Kindes hervorleuchtet.

Die Zurückweisung dieses Einwurfes gegen die atavistische Bedeutung der Verkümmerung des Gehirns der Mikrocephalen, durch die Bemerkung, dass es sich dabei eben nur um einen partiellen Rückschlag handle, welche Partialität gar nichts Auffallendes habe, vielmehr diesen Fall den meisten Anderen von Atavismus anreihe, bei denen es sich ebenfalls gewöhnlich nur um ein Zurückschlagen eines einzelnen Organs oder einer einzelnen Eigenschaft auf die entsprechende eines Urahnen handle, passt entschieden nicht hierher. Denn in allen diesen Fällen gleicht der Enkel in allen wesentlichen Stücken seinem Vorfahren, er besitzt nur Etwas oder hat Etwas abgelegt, welches dieser Vorfahre normal hatte. Wenn sich nun bei einem der Enkel nur dieses Eine wiederfindet oder wieder abgelegt wird, so ist das ganz begreiflich, denn

in allem Anderen ist er ja seinem Urahnen von selbst schon gleich oder ähnlich. Z. B. bei dem Hipparion sind beide, der Hipparion und unser Pferd in allen anderen Stücken so gleiche und ähnliche Pferde, wie alle Pferde untereinander, nur die beiden seitlichen Zehen jenes hat unser Pferd abgelegt. Wenn sie jetzt bei einem derselben wiederkehren, so kann der Atavismus begreiflich nur ein Organ, nur einen Theil treffen, er muss ein partieller sein, weil ja nur eine partielle Abweichung sich ausgebildet hatte.

Allein hier bei dem Mikrocephalen verhält sich die Sache ganz anders. Er ist, wie wir sehen, in allen anderen Stücken ein Mensch; nur in seiner Gehirn- und Schädelbildung soll er uns einen Rückschlag auf einen affenähnlichen Urahnen zeigen. Allein dieser Urahn war sicherlich nicht allein in seinem Gehirne von uns verschieden, sondern unzweifelhaft auch in seiner ganzen übrigen Organisation, und wahrscheinlich noch mehr, als es die jetzigen Affen sind. Wenn sich also bei uns jetzt ein Rückschlag auf diesen Urahnen ausbildet, so ist es doch wahrlich sehr sonderbar, dass dieser Rückschlag immer nur das Gehirn und nie andere Organe trifft, die sich doch ebenso wesentlich von ihrem Urbilde entfernt haben. Die Sache wird dadurch eine ganz andere, und, ebenso unwahrscheinlich, als sie in den anderen Fällen des Atavismus begreiflich, ja nothwendig ist.

Ausserdem sind diese anderen Fälle des Atavismus meistens in ihrer Genesis um einen bedeutenden Schritt verständlicher, als es die Mikrocephalie als Atavismus sein würde. Denn wir wissen, dass in jenen meistens die Keime zu jenem bei dem Enkel ausgefallenen, oder sich stärker entwickelt habenden, atavistisch auftretende Organe oder Gebilde, bei beiden, bei dem Urahnen und bei dem Enkel, vorhanden sind oder waren, und dass es daher nur einen anderen Entwicklungsgang, als den gewöhnlichen bedurfte, um diese Keime entweder wieder zu stärkerer Entwicklung zu bringen, oder vor ihrer Entwicklung zu unterdrücken. Alle Pferde-Embryonen besitzen die Keime zu jenen zwei Zehen ihres Urahnen, sie kommen nur bei den meisten nicht mehr zur Entwicklung; dass dieses aber doch zuweilen geschieht, erscheint uns, seit wir dieses wissen, nicht mehr so befremdend. Sollte also diese Analogie auf das mikrocephale Gehirn passen, so müsste es in der Entwicklung des normalen menschlichen Gehirnes

eine Periode geben, wo es dem mikrocephalen Gehirn und dann zugleich dem unseres Urahnen gleich wäre. Allein dieses ist, wie ich schon angegeben, nicht der Fall; ganz abgesehen davon, dass die mikrocephalen Gehirne selbst wieder sehr von einander verschiedene sind. — Zu keiner Zeit zeigt das normale menschliche Gehirn während seiner Entwicklung eine solche Uebereinstimmung mit dem mikrocephalischen Gehirne, dass wir die Entstehung desselben einfach auf diesen Keimzustand und dessen Erhaltung zurückzuführen und daraus abzuleiten vermöchten. Freilich es giebt auch dafür eine Ausrede. Vogt sucht desshalb für die Zeit des Rückschlages eine Periode aus, wo das Menschengehirn noch keinen bestimmten Charakter an sich trägt, und lässt es sich dann gemäss des Affentypus entwickeln!

Wenn wir nun in solcher Weise nicht im Stande sind, in der Mikrocephalie ein Zurückschlagen in der Bildung des menschlichen Gehirns, auf das Gehirn eines affenartigen Urahnen zu erblicken, so findet sich anderer Seits gar keine Schwierigkeit, dieselbe unter die grosse Zahl jener Bildungsabweichungen zu rechnen, welche durch eine Störung oder Hemmung in der normalen menschlichen Entwicklung Thierähnlichkeiten reproduciren. Die Darwinianer sind freilich geneigt, diese Bildungsabweichungen alle unter den Begriff des Atavismus zu vereinigen und in ihnen allen einen Rückschlag auf die frühere normale Stammesbildung zu erkennen. Allein, wer die Reihen dieser sogenannten Hemmungsbildungen vollständig kennt, wer weiss, wie dieselben eine fast ununterbrochene Reihe von den geringfügigsten Abweichungen von der normalen Bildung, bis zu den auffallendsten darstellen, deren grösste Zahl niemals eine normale Bildung bei etwa untergegangenen Thierformen gewesen sein kann; wer sodann den normalen Entwicklungsgang kennt und daraus ersieht, dass diese Abweichungen von der normalen Form offenbar durch ein Stehenbleiben auf einer gewissen Entwicklungsstufe, durch einseitige Weiterbildung auf derselben, oder selbst durch eine Rückbildung hervorgerufen sind, der wird dadurch, dass einzelne dieser Abweichungen eine gewisse Uebereinstimmung mit normalen Thierformen darbieten, doch nicht zu der Ansicht kommen können, dass diese wenigen der Reihe, einen Rückschlag auf normale Formen anzeigen, die grössere Zahl derselben Reihe aber einen anderen Ursprung haben solle. Immer wird

dem die Sache unbefangen Prüfenden die Lehre v. Baers genügender erscheinen, dass die bei diesen Bildungshemmungen auftretenden Thierähnlichkeiten davon herrühren, dass die Keime aller Wirbelthiere eine gewisse Summe im Anfange wenigstens für unsere sinnliche Erkenntniss gleichartiger Theile darbieten, deren verschiedene Entwicklung die Verschiedenheit der reifen Thiere hervorbringt. Nimmt daher bei einem Keime der Entwicklungsgang eine von der normalen abweichende Richtung, so wird er in manchen Fällen eine Aehnlichkeit mit anderen normalen Formen darbieten, oft genug aber wird dieses auch nicht der Fall sein.

Freilich ist es uns in den meisten Fällen unbekannt, was diese Unterbrechung und Abweichung von dem normalen Bildungsgang veranlasst; allein im schlimmsten Falle sind wir dabei nicht unwissender, als bei der Annahme, dass dabei ein Rückschlag auf eine frühere vielleicht untergegangene Stammesform stattfindet; denn was diesen Rückschlag in dem individuellen Falle bedingt, davon wissen wir auch so Viel als von Herrn Schwerdleins Tode.

Immerhin wird es die Aufgabe der wissenschaftlichen Forschung sein, in dem individuellen Falle zu untersuchen, ob eine Bildungsabweichung durch eine Störung in der Entwicklung oder wirklich durch ein Zurückgehen auf eine frühere normale Form veranlasst ist; aber beide Gebiete müssen durchaus auseinandergehalten werden. Denn wie Prof. Virchow neulich bei der Versammlung der deutschen anthropologischen Gesellschaft in Stuttgart sehr richtig sagte: Die Bildungshemmung ist eine Störung des Gesetzes, nach welchem sich das normale Wachsthum vollzieht; der Atavismus aber, wenn er wirklich zur Erscheinung kommt, ist gerade die Vollziehung des Gesetzes.

Eines der wichtigsten Kriterien zur Unterscheidung, mit welchem Falle, mit einer Bildungshemmung oder mit einem Atavismus, man es zu thun hat, ist aber sicher das, wie Virchow sagt, dass die Bildungshemmung niemals ein normales Wesen zu Stande bringt, was sich durch Generationen durch Fortpflanzung erhalten kann; der Atavismus aber wird das wohl vermögen.

Nun ist es aber gewiss, dass auf einer wie niedrigen Stufe seiner Hirnbildung und seiner Intelligenz wir uns auch unseren Urahnen denken

mögen, niedriger selbst, als die meisten noch lebenden Affen; mit einem Gehirne, wie das unserer Mikrocephalen, hätte er nie zu existiren und niemals sich fortzupflanzen vermocht. Unsere Mikrocephalen zeigten und zeigen sämmtlich einen solchen Mangel an physischer Befähigung und Intelligenz oder auch nur Instinct, dass sie ohne beständige Pflege und Hülfe von Anderen durchaus nicht zu leben vermögen. Bei den Meisten, wie auch bei unserer Helene ist nicht einmal der Nahrungstrieb so weit entwickelt, dass sie selbstständig nach Nahrung verlangen, vielweniger zeigen sie sich irgendwie befähigt, sich dieselbe zu verschaffen. Sie würden alle in kürzester Zeit zu Grunde gegangen sein, wenn man ihnen nicht die Nahrung herbeigeschafft, sie gefüttert und verpflegt hätte. Obgleich ferner bei ihnen die Muskeln oft ganz kräftig entwickelt sind, so dass sie eine bedeutende Stärke besitzen, so ist doch bei Allen der Gehirneinfluss auf diese Muskeln ein so unvollkommener, dass sie zu gar keiner geordneten und zweckmässigen Bewegung befähigt sind. Sie sind höchst unruhig, beständig in Activität, aber ohne allen Zweck und Absicht. Unsere Helene war in ihrem ganzen Leben nicht im Stande, auch nur zu stehen oder sich selbstständig vom Orte zu bewegen. Wie lässt es sich denken, dass Geschöpfe mit so unvollkommener Bewegungsfähigkeit jemals selbstständig existirt haben?

In einem Artikel der Frankfurter Zeitung vom 10. November 1872 hat C. Vogt den Satz, dass die Mikrocephalie eine Bildungshemmung sei, nicht nur anerkannt, sondern dessen ersten Ausspruch sogar für sich in Anspruch genommen, und zum Beweise dessen mit Recht auf mehrere Stellen seiner Schrift verwiesen. Er vertritt aber auch den weiteren Satz, dass diese Bildungshemmung eine partielle atavistische Bildung sei, durch Einweisung auf das, wie er meint, von Fritz Müller zuerst entwickelte und durch Haeckel unter dem Namen der Ontogenie weiter ausgebildete Gesetz, wonach die Entwicklung eines jeden Einzelwesens ähnliche Phasen durchläuft, wie die historische Ausbildung des Typus. Denn wenn dieser Satz richtig sei, so müsste jede Hemmungsbildung zugleich ein Atavismus sein.

Abgesehen von den beiden hier aufgestellten Prioritäten in Betreff der Mikrocephalie als Hemmungsbildung und der sogenannten Ontogenie, welche Lehren lange vor jeder Spur von Vogt und F. Müller ausgesprochen

wurden, sagt hier C. Vogt ganz richtig: Wenn dieser Satz (der Ontogenie) richtig ist". Er betheiligt sich aber hiebei zunächst an der Verwirrung, welche in dem Gebrauche der beiden Worte Bildungshemmung und Hemmungsbildung liegt, auf welche ich schon vor zwanzig Jahren aufmerksam machte (Handwörterb. der Phys.-Art. Entwicklungsgeschichte p. 35), von denen das erste einen Vorgang, das zweite aber ein Product dieses Vorganges bezeichnet. Wenn ich eine Missbildung als eine Bildungshemmung bezeichne, so sage ich dadurch nur, dass sich während der Bildung des Fötus eine Störung in dem normalen Entwicklungsgange ereignete, welche zu irgend einer beliebigen, zu sehr verschiedenen, ja vielleicht einander äusserlich geradezu entgegengesetzten Resultaten (z. B. Spaltbildungen und Verwachsungen) führen kann. Spreche ich aber von einer Hemmungsbildung, so bezeichne ich damit eine ganz bestimmte Missbildung, welche durch eine Hemmung in der Entwicklung entstand. Wenn ich also sage, die Mikrocephalie ist eine Bildungshemmung, so sage ich damit nur: zu irgend einer Zeit trat eine Störung in der Entwicklung des Gehirns ein, welche zu sehr verschiedenen Producten der Gehirnbildung führen konnte, die Mikrocephalen-Gehirne und Schädel können untereinander alle verschieden sein, und sie stimmen nur darin überein, dass sie alle eine Störung in ihrer Entwicklung documentiren.

Wenn dagegen Vogt sagt: die Mikrocephalie ist eine Hemmungsbildung, so bezeichnet er damit ein ganz bestimmtes Product, eine ganz bestimmte Bildung, welche so wie viele Andere, aber in anderer Weise, durch eine Störung, durch eine Hemmung in der Entwicklung hervorgebracht wurde. Denn er sagt, dass es sich hier um ein Affengehirn handle, welches durch eine Hemmung in der Entwicklung eines Menschen entstanden sei. Der Unterschied ist gross, aber das grosse Publicum, welches promiscue mit Bildungshemmung und Hemmungsbildung tractirt wird, hält beides für einerlei, und meint, wir Andern stimmten also mit Vogt überein.

Was aber die Ontogenie betrifft, so ist sie in der Ausdehnung und Anwendung, welche ihr Haeckel gegeben, und dadurch der Descendenztheorie eine für die Auffassung der Laien so bedeutsame Folie gegeben hat, eben nicht richtig, und unter anderen zeigt ihre Anwendung

auf die Mihrocephalie, dass sie nicht richtig ist. Es ist hier nicht möglich, auf den allgemeinen Beweis der Unrichtigkeit dieser Ontogenie einzugehen, allein bei dem Mikrocephalengehirn zeigt sich ihre Unrichtigkeit sehr leicht darin, dass dieses Gehirn, oder besser gesagt, „diese Gehirne“, den normalen Fötus-Gehirnen eben zu keiner Zeit gleich sind, wobei ich mich nur gegen eine Verwechslung der beiden Worte „gleich“ und des sehr vagen „ähnlich“ verwahre.

So gewiss also das Mikrocephalen-Gehirn keinem Gehirne irgend eines Affen gleich sein kann, und so gewiss es auch keinem menschlichen Fötus-Gehirn zu irgend einer Zeit seiner Entwicklung gleich ist, so gewiss ist es auch kein atavistisches Gehirn.

Nachtrag.

Zu meinem Bedauern war die Abfassung und der Druck dieser Abhandlung bereits zu weit fortgeschritten als dass ich den Bericht des Hr. Dr. v. Frantzius über die Verhandlungen über Mikrocephalie bei der dritten allgemeinen Versammlung der deutschen Gesellschaft für Anthropologie noch hätte benutzen und berücksichtigen können. Meine Ansichten in Beziehung auf Anschauung der Mikrocephalie als einer atavistischen Bildung hatte ich bereits in der Sitzung der bayr. Akademie der Wissenschaften vom 8. Juni 1872 entwickelt und waren auch dieselben bereits gedruckt, ehe jene Versammlung im August stattfand. Sie stimmen mit denen der Mehrheit bei dieser Versammlung überein, doch würde ich mich gerne ihnen noch näher angeschlossen haben, wären sie mir früher in dieser Vollständigkeit und Autorität bekannt gewesen. So habe ich nur einige unvollständigere Zeitungsnachrichten benutzen können.

Inzwischen will ich doch hier noch nachtragen, dass das von Hrn. Prof. v. Luschka beobachtete Mikrocephalen-Gehirn 450 Grm. wog und der Schädelinnenraum 500 Cctm. betrug. Das Gehirn zeigte kein einziges charakteristisches Merkmal eines Affenhirns, war vielmehr ein durch Bildungshemmung in der Entwicklung nach Grösse und Detailmodelirung zwar zurückgebliebenes, jedoch den menschlichen Typus noch

darbietendes Organ. In Vergleich mit dem Gehirn der Helene Becker war es ansehnlich grösser und schwerer. Die Fossa Sylvii war nach Prof. v. Luschka in allen ihren drei Theilen ausgebildet und auch die dritte Stirnwindung um den vorderen Schenkel. C. Vogt war dagegen der Meinung, dass man kaum von einem vorderen wohl ausgeprägten Theile (Schenkel) der Fossa Sylvii an dem betreffenden Gehirne reden könne, was mir bemerkenswerth erschienen ist, weil ich, wie oben erörtert, der Ansicht bin, dass gerade die mangelhafte Entwicklung dieses vordereren Schenkels der Fossa Sylvii und der um sie herumgelegten dritten Stirnwindung für alle Mikrocephalen-Gehirne charakteristisch ist. Interessant ist mir auch, dass in der Bildung der Centralwindungen an dem von Hrn. Prof. v. Luschka vorgelegten Gehirn ähnliche Abweichungen sich finden, wie bei dem der Helene Becker.

In Beziehung auf das von Hrn. Prof. Ecker in Abbildungen vorgelegte Gehirn, bin ich trotzdem, dass ich, wie oben erwähnt, es ebenfalls zur Charakteristik der Mikrocephalie für sehr beachtenswerth halte, dass die Schädel und Gehirne aller Mikrocephalen an Grösse und Ausbildung sehr verschieden sind, doch in Zweifel, ob der betreffende Fall, in welchem der Schädelinnenraum 700 Cctm. betrug, das Hirn also wahrscheinlich gegen 650 Grm. wog, noch unter die eigentliche Mikrocephalie gerechnet werden kann. Wenigstens würde sich dann dieselbe dem häufig vorkommenden Idiotismus mit nicht so gar auffallender Abweichung in Grösse und Gewicht des Schädels und Hirns unmittelbar anschliessen. Vielleicht ist dieses indessen der ganz richtige Weg, und wir werden auf demselben möglicher Weise einmal zu einer vollständigen Reihe von menschlichen Gehirnen gelangen, die in ihrer Entwicklung zu irgend einer Zeit und in irgend einem Grade gehemmt wurden, und dem gemäss auch während ihres Lebens irgend einen Grad und irgend eine Form der Störung ihres psychischen Lebens wahrnehmen liessen. Wir würden auf diese Weise vielleicht den Räthseln dieser psychischen Thätigkeiten und ihrer Verbindung mit den verschiedenen Theilen des Gehirnes um einen Schritt näher kommen können; doch würden dazu sehr genaue und kritisch geführte Beobachtungen gehören, für welche die Zeit noch nicht reif genug geworden ist.

Beschreibung der Abbildungen.

Die nachfolgenden Bilder des Gehirnes und Schädels der Helene Becker sind durch Lichtdruck von Photographien hergestellt. Ich muss dabei erwähnen, dass die photographische Aufnahme des Gehirns erst nach der Erhärtung desselben in Weingeist erfolgen konnte. Die Form des Gehirns ist daher nicht die ganz naturgemässe, da sich dieselbe in keiner Weise vollständig erhalten lässt; auch sind die Bilder ein gut Theil kleiner, als das frische Gehirn war. Allein der Treue der Wiedergabe, besonders der Windungen wegen, zog ich doch die Photographirung des so in seiner Form und Grösse veränderten Gehirnes, der des Schädelausgusses, auf welchen ich die Windungen, nach dem Gehirn modelliren lassen, vor. Die Stellung der Figuren ist aber die, als wenn das Gehirn in dem mit horizontal verlaufenden Jochbogen aufgestellten Schädel läge. — In Beziehung auf den Schädel ist zu bemerken, dass die Bilder Etwas, aber nur wenig, kleiner sind, als der Schädel selbst. Da hier die relativen Verhältnisse das Wichtigste sind, und diese natürlich die Photographie ganz vollkommen wiedergegeben hat, so lag mir Nichts daran, dass der Photograph bei der Aufnahme die Grösse etwas verfehlte.

Fig. I. stellt den Kopf der Helene Becker in natürlicher Grösse in der Seitenansicht dar; von der Leiche entnommen.

Fig. II giebt die Ansicht des Gehirnes von oben.

Fig. III die Ansicht des ganzen Gehirnes von unten;

Fig. IV die Ansicht nur des grossen Gehirnes von unten nach Entfernung des kleinen Hirnes, der Brücke und Vierhügel;

Fig. V die Seitenansicht des Gehirnes von rechts;

Fig. VI die Seitenansicht des Gehirnes von links;

Fig. VII die mediale Ansicht der rechten,

Fig. VIII die mediale Ansicht der linken Hemisphäre.

Die Bezeichnung ist bei allen vorstehenden Figuren dieselbe.

1. Fissura centralis
2. Fissura occipitalis perpendicularis interna
2'. Unvollkommene Fissura occipitalis perpendicularis externa
4. Stamm der Fossa Sylvii
6. Hinterer Ast der Fossa Sylvii
α. Scheinbarer vorderer Ast der Fossa Sylvii auf der rechten Seite.
7. Fissura calcarina
9. Fissura calloso marginalis
11. Fissura parallela.
a. Erste Stirnwindung
b. Zweite Stirnwindung
d. Vordere Centralwindung
d'. Hintere Centralwindung
e. Vorzwickel

f. Erste Scheitelbogenwindung
g. Zweite Scheitelbogenwindung
h. Scheinbare obere innere Scheitelbogenwindung
i. Zwickel
k. Untere innere Hinterhauptswindung (zungenförmiges Läppchen)
l. Untere äussere Hinterhauptswindung (spindelförmiges Läppchen)
m. Innere untere Scheitelbogenwindung
n. Gyrus Hippocampi
o. Mittlere Schläfenwindung
p. Obere Schläfenwindung
r. Gyrus cinguli
t. Balken.

Fig. IX Ansicht des Schädels von vorne;
Fig. X Linke Seitenansicht des Schädels;
Fig. XI Senkrechter Durchschnitt des Schädels;
Fig. XII Basis Cranii von Innen;
Fig. XIII Basis Cranii von Aussen.

Fig I.

BRITISH
NATURAL HISTORY.

Fig. II.

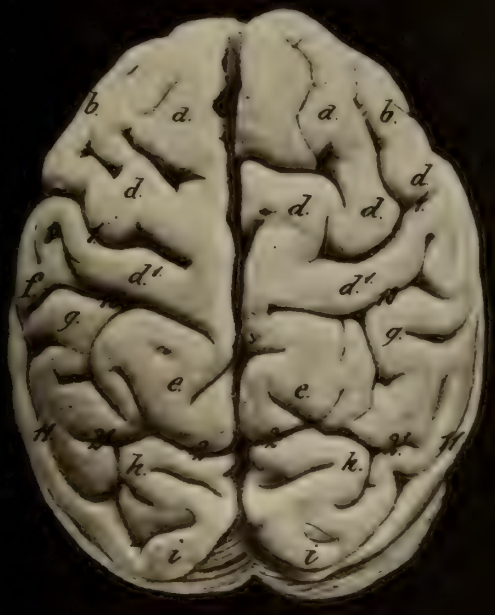


Fig. III.

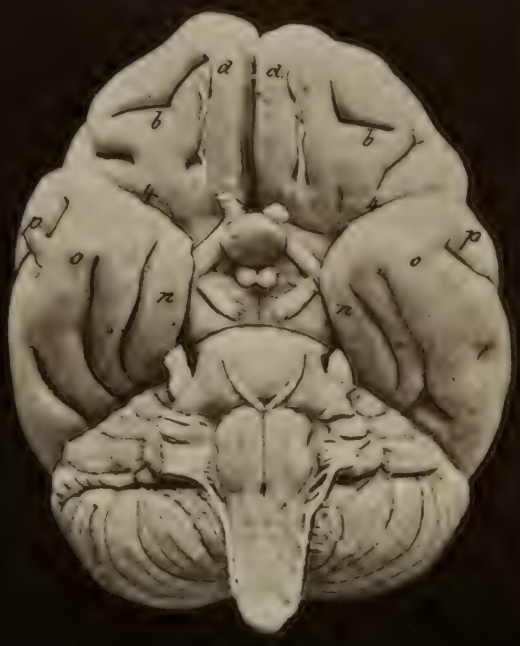
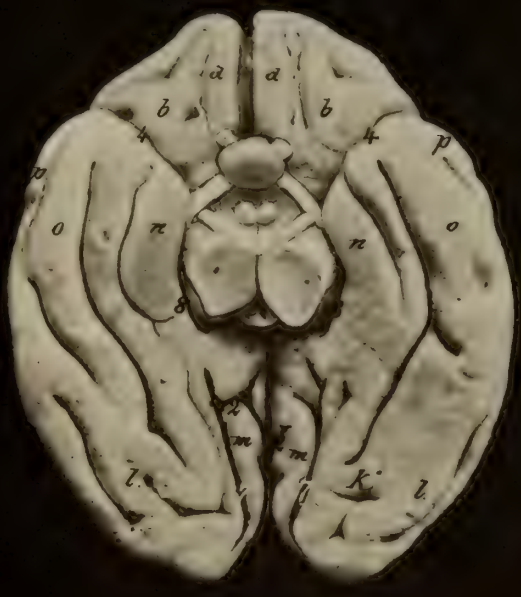


Fig. IV.



BRITISH
NATURAL HISTORY

Fig. V.

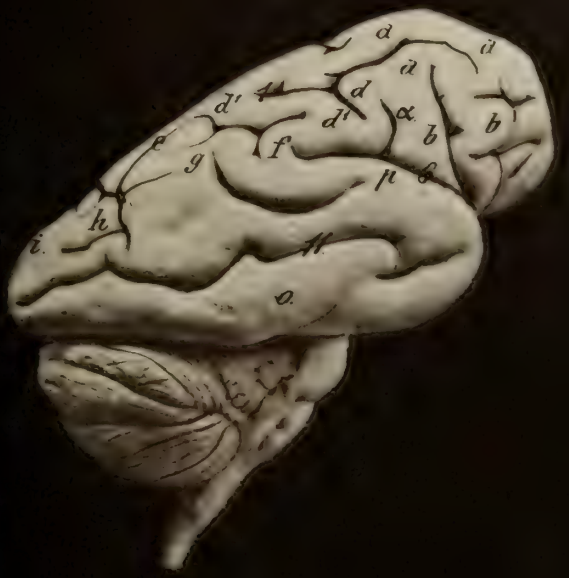


Fig. VI.

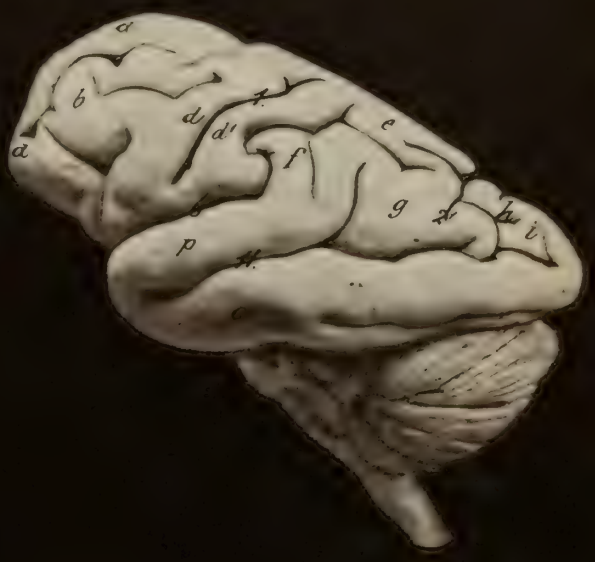


Fig. VII.

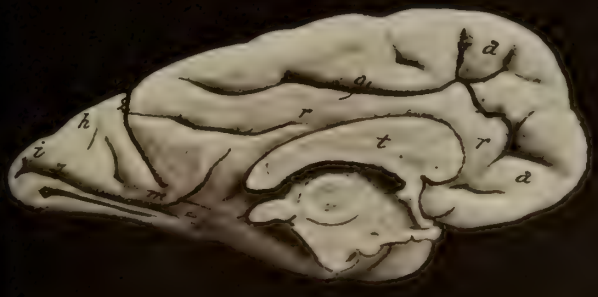
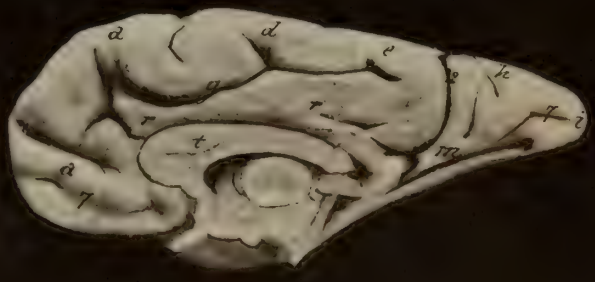


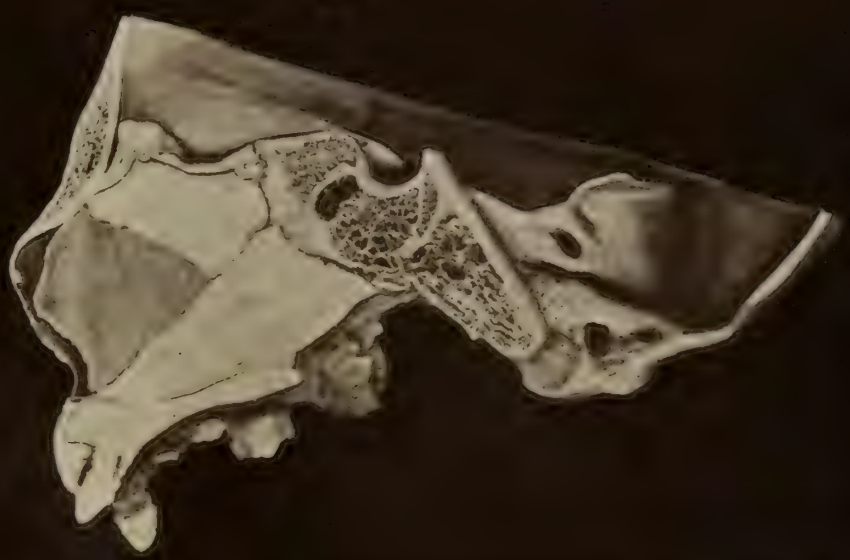
Fig. VIII.



BRITISH MUSEUM
NATURAL HISTORY

Fig. IX.

Fig. X.



BRITISH
NATURAL HISTORY.

Fig. XI

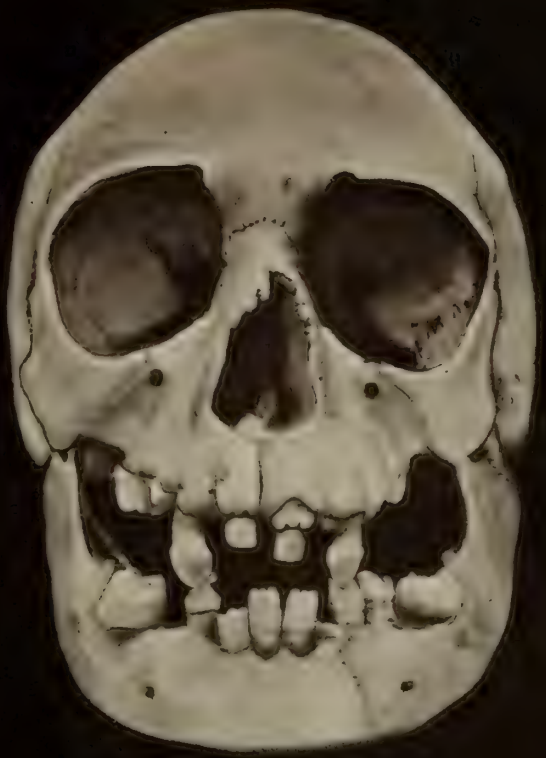


Fig. XII

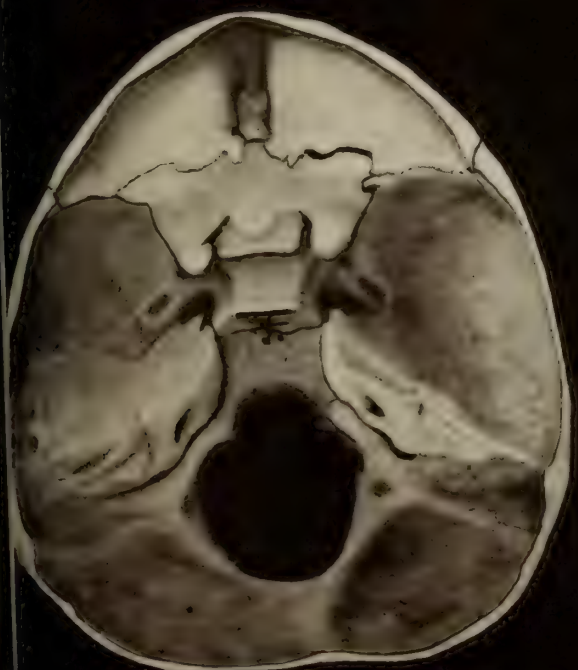
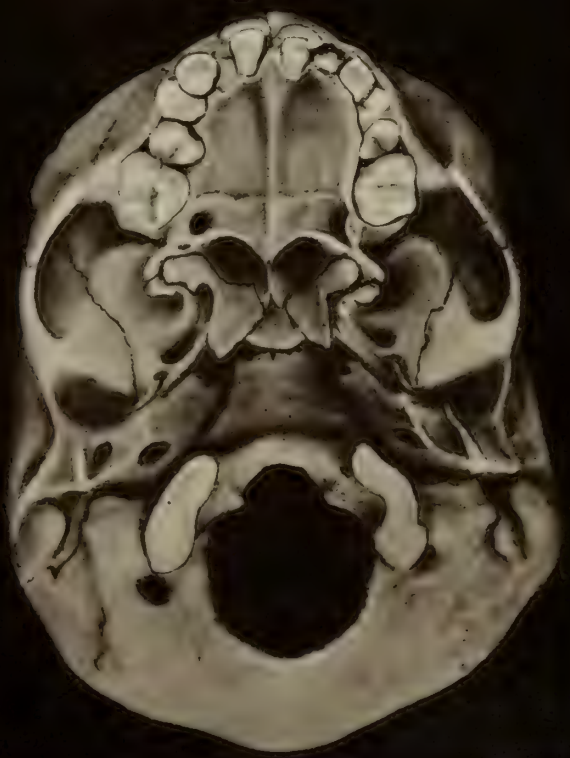


Fig. XIII.



BRITISH
NATURAL HISTORY.

Inhalt.

Seite

Geodaetische Bestimmung der Erdkrümmung und Lothablenkung. Mit 10 Holzschnitten. Von *Carl Max v. Bauernfeind* 1

Das Bayerische Präcisions-Nivellement. Zweite Mittheilung. Von *Carl Max v. Bauernfeind* 41

Von einem Kettenbruche Euler's und einem Theorem von Wallis. Von *G. Bauer* 97

Anatomische Beschreibung eines mikrocephalen 8jährigen Mädchens Helene Becker aus Offenbach. Mit 5 Tafeln in Lichtdruck. Von *Th. L. W. v. Bischoff* 117

ABHANDLUNGEN

DER

MATHEMATISCH-PHYSIKALISCHEN CLASSE

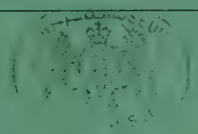
DER KÖNIGLICH BAYERISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

EILFTEN BANDES

DRITTE ABTHEILUNG.

IN DER REIHE DER DENKSCHRIFTEN DER XI. BAND.



MÜNCHEN,
1874.

VERLAG DER K. AKADEMIE,
IN COMMISSION BEI G. FRANZ.

ABHANDLUNGEN

DER

MATHEMATISCH-PHYSIKALISCHEN CLASSE

DER KÖNIGLICH BAYERISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

EILFTEN BANDES

DRITTE ABTHEILUNG.

ABHANDLUNGEN

DER

MATHEMATISCH-PHYSIKALISCHEN CLASSE

DER KÖNIGLICH BAYERISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

EILFTEN BANDES

DRITTE ABTHEILUNG.

IN DER REIHE DER DENKSCHRIFTEN DER XL. BAND.

MÜNCHEN,
1873.

VERLAG DER K. AKADEMIE,
IN COMMISSION BEI G. FRANZ.

Inhalt.

Seite

Die Reciprocität zwischen Kreisen, welche dieselbe gemeinschaftliche Secante haben und den confocalen Kegelschnitten. Von *Otto Hesse* 1

Beobachtungen und Untersuchungen über die Eigenschaften und die praktische Verwerthung der Naudet'schen Aneroïdbarometer. Von *Carl Max von Bauernfeind.* Mit 1 Steindrucktafel 25

Ueber ein Verfahren die Gleichungen, auf welche die Methode der kleinsten Quadrate führt, sowie lineäre Gleichungen überhaupt, durch successive Annäherung aufzulösen. Von *Ludwig Seidel* 81

Ueber das Pascal'sche Theorem. Von *G. Bauer* 109

Das Bayerische Präcisions-Nivellement. (Dritte Mittheilung.) Von *Carl Max von Bauernfeind* 141

Die Reciprocität zwischen Kreisen, welche dieselbe gemeinschaftliche Secante haben, und den confocalen Kegelschnitten.

Von

Dr. Otto Hesse.

Die Reciprocität zwischen Kreisen, welche dieselbe gemeinschaftliche Secante haben, und den confocalen Kegelschnitten.

Von

Dr. Otto Hesse.

Man hat in der Geometrie der Ebene zwei Sätze, welche, wenn man sie mit einander vergleicht, lebhaft an das Princip der Reciprocität erinnern:

„Die vier gemeinschaftlichen Tangenten an zwei Kreisen werden durch die gemeinschaftliche Secante der beiden Kreise halbirt."

„Die Tangenten in jedem der vier Schnittpunkte zweier confocalen Kegelschnitte stehen auf einander senkrecht.

Die Vermuthung, dass die genannten beiden Sätze nichts anderes seien, als reciproke Sätze, wird noch bestätiget, wenn man erwägt, dass zwei Kreise Kegelschnitte sind, welche sich in vier Punkten scheiden (von welchen allerdings zwei Schnittpunkte im Unendlichen liegen), während zwei confocale Kegelschnitte von denselben vier geraden Linien berührt werden (die freilich imaginär sind); und dass Kegelschnitte, welche sich in denselben vier Punkten schneiden, nach dem Gesetze der Reciprocität Kegelschnitten entsprechen, welche dieselben vier geraden Linien berühren.

Wenn die gehegte Vermuthung zur Wahrheit werden soll, so muss sich ein Kegelschnitt auffinden lassen, in Rücksicht auf welchen, als Direktrix genommen, Kreise mit gemeinschaftlicher Secante als reciproke Figuren confocalen Kegelschnitten entsprechen. Findet sich wirklich eine solche Direktrix, so werden sich nicht allein die beiden hervorgehobenen Sätze als reciproke Sätze darstellen, sondern noch eine grosse Zahl anderer Sätze. Man wird sogar in der Lage sein, aus den bekannten Sätzen über Kreise mit gemeinschaftlicher Secante etwa noch unbekannte Sätze über confocale Kegelschnitte zu entdecken, wie umgekehrt.

Wir werden nachweisen, dass der Kreis die gesuchte Direktrix ist.

Da bei dieser Gelegenheit neben der Direktrix noch verschiedene andere Kreise auftreten, so wird es sich empfehlen, denjenigen Kreis mit beliebigem Radius, welcher als Direktrix gewählt werden soll, zum Unterschiede von anderen Kreisen immer nur mit dem Namen der Direktrix zu bezeichnen und seinen Radius als die Längeneinheit zu nehmen. Wenn wir alsdann den Mittelpunkt e der Direktrix als den Anfangspunkt des rechtwinkligen Coordinatensystemes wählen, auf welches sich unsere Gleichungen beziehen sollen, so haben wir die Gleichung der Direktrix in homogenen Punktcoordinaten:

$$1) \ldots \qquad x^2 + y^2 - z^2 = 0,$$

und wenn wir die Coordinaten irgend eines Poles mit x, y, z und die Coordinaten seiner Polare mit u, v, w bezeichnen, so haben wir nach 20) der siebenzehnten Vorlesung*) zwischen ihnen die Relationen:

$$2) \ldots \qquad x = u \ , \ x = v \ , \ z = -w.$$

Die Gleichung irgend eines Kreises

$$3) \ldots \qquad x^2 + y^2 + (ax + by + cz)\, z = 0$$

*) Die Citate beziehen sich auf meine „Vorlesungen aus der analytischen Geometrie der geraden Linie, des Punktes und des Kreises in der Ebene", Leipzig, Teubner 1873, und auf die Fortsetzung derselben betitelt: „Sieben Vorlesungen aus der analytischen Geometrie der Kegelschnitte", Leipzig, Teubner 1874.

enthält drei willkührliche Constanten a, b, c, welche sowohl die Coordinaten des Mittelpunktes, als den Radius des Kreises bestimmen, wie umgekehrt.

Setzen wir für x, y, z die Ausdrücke 2) in 3), so erhalten wir

$$3^*) \ldots \qquad u^2 + v^2 - (au + bv - cw)\, w = o,$$

die Gleichung der reciproken Polare des Kreises in Liniencoordinaten.

Diese Gleichung lässt sich aus zwei Gleichungen zusammensetzen:

$$(au + bv - cw)\, w = o \ , \ u^2 + v^2 = o.$$

Die erste Gleichung drückt ein Punktepaar aus, von dem ein Punkt $w = o$ der Mittelpunkt e der Direktrix 1) ist. Mit diesem Punktpaare ist nach der einundzwanzigsten Vorlesung der Kegelschnitt 3*) confocal. Es ist mithin die reciproke Polare 3*) des Kreises 3) ein Kegelschnitt, von dem ein Brennpunkt mit dem Mittelpunkte e der Direktrix zusammenfällt. Was den zweiten Punkt é des Paares anbetrifft, so lassen sich seine Coordinaten α, β aus der Gleichung ablesen: $\alpha = -\frac{a}{c}$, $\beta = -\frac{b}{c}$. Mit diesem Punktepaare ist auf Grund der Zusammensetzung der Gleichung 3*) aus den darauf folgenden Gleichungen der Kegelschnitt 3*) confocal, und die Gleichung 3*) mit den willkürlichen Constanten a, b, c stellt alle möglichen Kegelschnitte dar, von welchen ein Brennpunkt e mit dem Mittelpunkte der Direktrix zusammenfällt.

Nennen wir nun focale Kegelschnitte solche, welche einen Brennpunkt gemein haben, so können wir sagen:

4) ... Die reciproken Polaren aller Kreise, bezogen auf einen beliebigen Kreis als Direktrix, sind focale Kegelschnitte, deren gemeinsamer Brennpunkt mit dem Mittelpunkte der Direktrix zusammenfällt.

Die reciproken Polaren aller focalen Kegelschnitte, bezogen auf einen beliebigen Kreis, dessen Mittelpunkt der gemeinsame Brennpunkt ist, sind Kreise.

Die in dem Vorhergehenden betrachteten focalen Kegelschnitte 3*) werden im Speciellen confocale Kegelschnitte, wenn wir die Coordinaten α und β des zweiten Brennpunktes é als gegeben betrachten, dagegen die Constante c variiren lassen. Führen wir desshalb die gegebenen Coordinaten, indem wir setzen $a = -\alpha c$, $b = -\beta c$, in die Gleichungen der reciproken Polaren 3) und 3*) ein, so gehen dieselben über in:

5) ... $\quad x^2 + y^2 - c(\alpha x + \beta y - z)\, z = o.$

5*) ... $\quad u^2 + v^2 + c(\alpha u + \beta v + w)\, w = o.$

Die letzte Gleichung 5*) mit dem veränderlichen Parameter c drückt confocale Kegelschnitte aus, deren Brennpunkte e und é sind. Es erhebt sich nun die Frage, welche Eigenschaften ihre reciproken Polaren, die Kreise 5), haben werden.

Um diese Frage zu beantworten, bemerken wir, dass für $z = 1$ sämmtliche Kreisgleichungen 5), die in der dreizehnten Vorlesung definirte Normalform haben. Fixirt man daher irgend zwei von diesen Kreisgleichungen und zieht die eine von der anderen ab, so erhält man auf Grund der vierzehnten Vorlesung die Gleichung der gemeinschaftlichen Secante S:

6) ... $\quad \alpha x + \beta y - 1 = o$

der beiden fixirten Kreise und zugleich aller Kreise, deren analytischer Ausdruck die Gleichung 5) mit der willkührlichen Constante c ist. Es sind demnach die reciproken Polaren confocaler Kegelschnitte in Rücksicht auf die Kreis-Direktrix, deren Mittelpunkt in einem der gemeinschaftlichen Brennpunkte liegt, Kreise mit gemeinschaftlicher Secante.

Man wird sich nun fragen, welche Lage die genannte gemeinschaftliche Secante zu den Brennpunkten der confocalen Kegelschnitte hat? Aus ihrer Gleichung 6) wird ersichtlich, dass dieselbe nichts anderes ist, als die Polare des Brennpunktes é, dessen Coordinaten α und β sind, rücksichtlich der Direktrix 1).

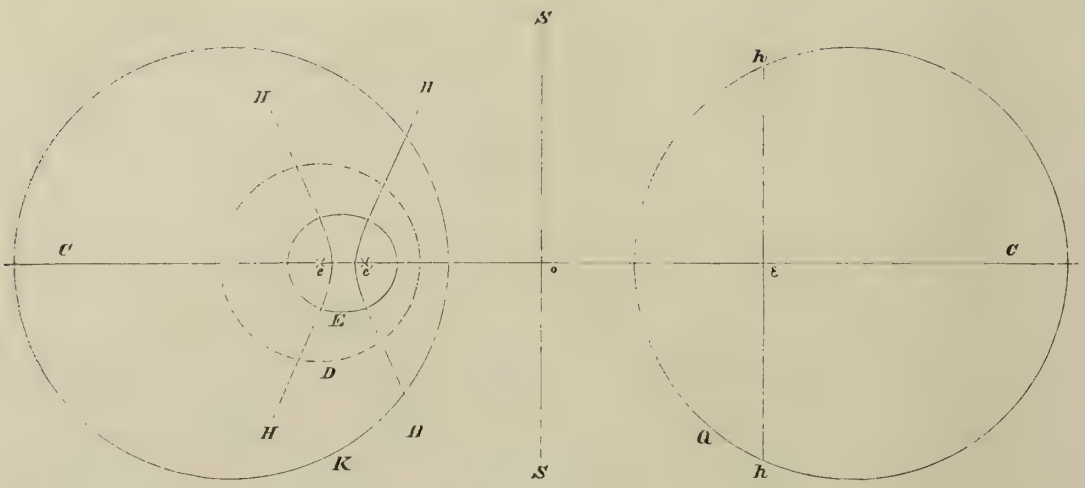
Die gemachten Bemerkungen fassen wir zusammen in dem einem Satze:

7) ... Die reciproken Polaren von confocalen Kegelschnitten rücksichtlich einer beliebigen Kreis-Direktrix, deren Mittelpunkt in einem der gemeinschaftlichen Brennpunkte liegt, sind Kreise mit gemeinschaftlicher Secante und letztere ist die Polare des andern Brennpunktes.

Die oben aufgeworfene Frage kehren wir nur um, wenn wir uns folgende Aufgabe stellen: „Wenn ein System von Kreisen 5) gegeben ist mit gemeinschaftlicher Secante S, so soll die Kreis-Direktrix gefunden werden, in Rücksicht auf welche die reciproken Polaren der gegebenen Kreise confocale Kegelschnitte sind.“ Wir beantworten die aufgeworfene Frage mit dem Hinweis auf die vierzehnte Vorlesung, aus welcher ersichtlich ist, dass unter den Kreisen 5) mit gemeinschaftlicher Secante zwei Kreise sich auszeichnen, deren Radien verschwinden. Ihre Mittelpunkte wurden dort Grenzpunkte genannt, und es ergaben sich zwei Grenzpunkte, die gleiche Abstände von der gemeinschaftlichen Secante haben. Nun findet sich aber unter den Kreisen 5) mit der gemeinschaftlichen Secante S ein Kreis, dessen Radius verschwindet, wenn c verschwindet. Sein Mittelpunkt fällt, wie aus seiner Gleichung ersichtlich ist, mit dem Mittelpunkte e der Direktrix zusammen. Es ist mithin der Punkt e ein Grenzpunkt des Systemes 5) von Kreisen mit gemeinschaftlicher Secante. Daraus entspringt der umgekehrte Satz:

8) ... Die reciproken Polaren von Kreisen mit gemeinschaftlicher Secante rücksichtlich einer beliebigen Kreis-Direktrix, deren Mittelpunkt mit einem der Grenzpunkte zusammenfällt, sind confocale Kegelschnitte. Der eine gemeinsame Brennpunkt ist der Mittelpunkt der Direktrix, der andere ist der Pol der gemeinschaftlichen Secante.

Die folgende Figur ist dazu bestimmt, die reciproken Sätze 7) und 8) zu verdeutlichen:



Man erblickt in der Figur zwei Kreise, K und Q, welche absichtlich von gleicher Grösse angenommen sind. Die gerade Linie CC ist die Centrallinie, welche die Mittelpunkte der Kreise verbindet. Auf ihr steht in o die gemeinschaftliche Secante SS senkrecht und ist von jedem der beiden Kreise gleich weit entfernt. Die Punkte e und ε, welche auf der Centrallinie C von o ebenfalls gleich weit abstehen, stellen die Grenzpunkte des Systemes der Kreise mit gemeinschaftlicher Secante dar. Um den Grenzpunkt e als Mittelpunkt ist die Kreis-Direktrix D beschrieben mit einem beliebigen Radius, welcher aber als die Längeneinheit anzunehmen ist. Der Punkt é soll den Pol der geraden Linie SS rücksichtlich der Direktrix vorstellen. Die reciproke Polare des Kreises K ist durch die Ellipse E angedeutet und die reciproke Polare des Kreises Q soll die mit der Ellipse E confocale Hyperbel H vorstellen. Die in dem Punkte ε auf der Centrallinie CC errichtete Senkrechte schneidet den Kreis Q in den Punkten hh, deren Bedeutung dem Folgenden vorbehalten bleibt.

Obwohl die Gleichungen 5) und 5*) der reciproken Polaren einfach genug sind, so wollen wir sie doch, um Rechnungen zu ersparen, dadurch noch einfacher machen, dass wir den Brennpunkt é, dessen Coordinaten α und β sind, in die x-Axe des Coordinatensystems verlegen, indem wir $\beta = o$ setzen. Hierdurch gehen die genannten

Gleichungen, wenn wir zugleich an Stelle des Parameters c den Parameter λ durch die Relation $c\lambda + 1 = o$ einführen, über in:

$$9) \ldots \qquad x^2 + y^2 + \frac{1}{\lambda}(\alpha x - z)z = o$$

$$9^*) \ldots \qquad u^2 + v^2 - \frac{1}{\lambda}(\alpha u + w)w = o$$

und es wird in der Figur $eé = \alpha$, $eo = \frac{1}{\alpha}$, weil die Punkte é und o harmonische Pole der Direktrix sind, und $e\varepsilon = \frac{2}{\alpha}$.

Um nun die Bedeutung der geraden Linien hh in der Figur festzustellen, bemerken wir, dass die Gleichung der Polare eines gegebenen Punktes, x_1, y_1, z_1, für den Kreis 9) ist:

$$x_1\left(x + \frac{\alpha}{2\lambda}z\right) + y_1 y + \frac{z_1}{\lambda}\left(\frac{\alpha}{2}x - z\right) = o$$

welche Gleichung übergeht in folgende von λ unabhangige Gleichung:

$$\frac{\alpha}{2}x - z = o$$

wenn der gegebene Punkt mit dem Punkte e zusammenfällt.

Dieses ist aber gerade die Gleichung der geraden Linie hh, welche von dem Punkte e um $\frac{2}{\alpha}$ absteht. Wir drücken dieses als Satz aus, wie folgt:

10) ... Die Polaren eines Grenzpunktes in einem Systeme von Kreisen, welche dieselbe gemeinschaftliche Secante haben, fallen mit derjenigen geraden Linie zusammen-welche in dem anderen Grenzpunkte auf der Centrallinie senkrecht steht.

Es sind daher der Grenzpunkt e und jeder beliebige Punkt auf der geraden Linie hh harmonische Pole für das ganze System von Kreisen mit gemeinschaftlicher Secante. Es folgt daraus aber noch, dass die Schnittpunkte h , h der gleich bezeichneten geraden Linie mit dem Kreise Q die Berührungspunkte der von dem Grenzpunkte e an den Kreis gezogenen Tangenten sind. Für die Direktrix wird diese gerade Linie hh die Polare des Halbirungspunktes M der geraden Linie eé, welcher Punkt zugleich Mittelpunkt aller confocalen Kegelschnittte 9*) ist, weil $eM = \frac{\alpha}{2}$ und $eo = \frac{2}{\alpha}$. Da nun die Polaren aller Punkte auf der geraden Linie hh, rücksichtlich der Direktrix D, durch den Punkt M gehen und die Polaren der Schnittpunkte h h Tangenten der Hyperbel H werden, so sieht man, dass die Polaren der Punkte h , h, rücksichtlich der Direktrix D, die Asymptoten der Hyperbel H sind. Es wird ferner der Kreis Q durch seine Polare h h des Punktes e in zwei Theile getheilt. Die Polaren aller Punkte des einen Theiles, rücksichtlich der Direktrix, werden Tangenten des einen Zweiges der Hyperbel HH, die den Punkten des andern Theiles entsprechenden Polaren berühren den andern Zweig der Hyperbel.

Die reciproke Polare des Kreises K auf der linken Seite der gemeinschaftlichen Secante SS wurde in der Figur als die Ellipse E aufgeführt, die dem Kreise Q auf der andern Seite der gemeinschaftlichen Secante entsprechende reciproke Polare wurde als die Hyperbel HH bezeichnet. Dieses wird seine Rechtfertigung finden, wenn wir auf die Natur der Kreise 9) und ihrer reciproken Polaren 9*) näher eingehen.

Wir entnehmen aus der Gleichung 9) den Abstand A des Mittelpunktes des durch die Gleichung ausgedrückten Kreises und seinen Radius R:

$$11) \ldots \qquad A = -\frac{\alpha}{2\lambda}, \quad R^2 = \left(\frac{\alpha}{2\lambda}\right)^2 + \frac{1}{\lambda}.$$

Aus diesen Gleichungen ist ersichtlich, dass mit wachsendem Werthe von λ von o bis $+\infty$ sowohl die Entfernungen A der Mittelpunkte der Kreise 9) von dem Grenzpunkte e als auch die Radien R von ∞ bis o

abnehmen. Die Kreise selbst füllen den Theil der Ebene aus, welcher auf der linken Seite der gemeinschaftlichen Secante SS liegt.

Lässt man λ weiter von o bis $-\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2$ abnehmen, so liegen die Kreise 9) auf der rechten Seite der gemeinschaftlichen Secante und ihre Radien sowohl als die Entfernungen der Mittelpunkte von dem Grenzpunkte ε nehmen von ∞ bis o ab Diese Kreise erfüllen wieder den rechts von der gemeinschaftlichen Secante gelegenen Theil der Ebene, so dass die ganze Ebene ausgefüllt wird durch die Kreise 9), welchen alle Werthe entsprechen zwischen den Grenzen $+\infty$ und $-\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2$. Die erste Grenze entspricht dem Grenzpunkte e, die andere dem Grenzpunkte ε. Man kann daraus schliessen, dass alle Kreise, für welche λ zwischen den Grenzen $-\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2$ und $-\infty$ liegt, imaginäre Kreise sein müssen. Und in der That weiset die letzte Gleichung 11) in den angegebenen Fällen auf imaginäre Radien hin.

Die angegebenen Grenzen für die Kreise 9) und ihre Zwischenstadien müssen auch ihre Bedeutung haben für die reciproken Polaren 9*) der Kreise. Diese zu erforschen soll unsere nächste Aufgabe sein.

Zu diesem Zwecke übersetzen wir die in Liniencoordinaten gegebene Gleichung 9*) der reciproken Polare des Kreises 9) nach bekannter Regel in eine durch Punktcoordinaten ausgedrückte Gleichung, indem wir die Relation aufstellen:

$$u - \frac{\alpha}{2\lambda}w = x\ ,\ v = y\ ,\ -\frac{\alpha}{2\lambda}u - \frac{1}{\lambda}w = z.$$

Die Auflösung dieser Gleichungen giebt, wenn wir $z = 1$ setzen:

$$\frac{\frac{1}{\lambda}x - \frac{\alpha}{2\lambda}}{\frac{1}{\lambda} + \left(\frac{\alpha}{2\lambda}\right)^2} = u\ ,\ y = v\ ,\ \frac{-\frac{\alpha}{2\lambda}x - 1}{\frac{1}{\lambda} + \left(\frac{\alpha}{2\lambda}\right)^2} = w.$$

Setzen wir diese Werthe von u, v, w in die Gleichung 9*) ein, so erhalten wir die Gleichung der reciproken Polaren 9*), ausgedrückt durch Punktcoordinaten:

$$12) \ldots \qquad \frac{\left(x - \frac{\alpha}{2}\right)^2}{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 + \lambda} + \frac{y^2}{\lambda} - 1 = 0.$$

Für alle positiven Werthe von λ, welche den Kreisen 9) links von der gemeinschaftlichen Secante entsprechen, werden die confocalen Kegelschnitte 12) Ellipsen, welche die ganze Ebene ausfüllen. Für die negativen Werthe von λ von o bis $-\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2$, welche den Kreisen 9) rechts von der gemeinschaftlichen Secante entsprechen, liegen confocale Hyperbeln vor, welche ebenfalls die ganze Ebene ausfüllen. Nimmt endlich λ noch weiter ab von $-\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2$ bis $-\infty$, so entsprechen den imaginären Kreisen auch imaginäre reciproke Ellipsen 12).

Damit nun Kreise des Systemes 9) leicht aufgefunden werden können, welche gleiche Radien haben, so wollen wir an Stelle des Parameters λ den Parameter k einführen durch die Gleichung

$$13) \ldots \qquad \frac{1}{\lambda} = k \; \frac{1}{2}\left(\frac{2}{\alpha}\right)^2.$$

Hierdurch geht die Kreis-Gleichung 9) über in:

$$14) \ldots \quad x^2 + y^2 + \left(k - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{\alpha}\right)^2\right)\left(\alpha x - z\right) = 0$$

und die Gleichung 12) der reciproken Polare geht über in:

$$14^*) \ldots \quad \frac{\left(x - \frac{\alpha}{2}\right)^2}{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 k + \frac{1}{2}} + y^2 - \frac{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2}{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 k - \frac{1}{2}} = 0$$

Positive Werthe von k entsprechen dann den Kreisen links von der gemeinschaftlichen Secante und gleich grosse negative Werthe von k entsprechen gleich grossen Kreisen auf der rechten Seite. Für k zwischen den Grenzen $k = \pm \frac{1}{2}\left(\frac{2}{\alpha}\right)^2$ giebt es weder reelle Kreise 14) noch reelle, ihnen entsprechende, reciproke Polaren 14*).

In dieser Weise werden die reciproke Polare 14*) und die reciproke Polare:

$$15) \ldots \quad \frac{\left(x - \frac{\alpha}{2}\right)^2}{-\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 k + \frac{1}{2}} + y^2 + \frac{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2}{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 k + \frac{1}{2}} = o$$

irgend zwei gleich grossen Kreisen 14) auf der einen und der andern Seite der gemeinschaftlichen Secante entsprechen. Ziehen wir nun eine von diesen Gleichungen von der anderen ab, so erhalten wir die sehr einfache Gleichung:

$$16) \ldots \qquad x\,(x - \alpha) = o$$

welche im Zusammenhange mit dem Vorhergehenden folgende geometrische Interpretation gestattet.

17) ... Die reciproken Polaren von zwei gleich grossen Kreisen 14) sind confocale Kegelschnitte verschiedener Gattung, welche sich in vier Punkten schneiden, die auf denjenigen beiden geraden Linien liegen, welche auf der Verbindungslinie der Brennpunkte in den Brennpunkten senkrecht stehen.

Nachdem wir in dem Vorhergehenden die vorstehende Figur in allen ihren Theilen gerechtfertigt haben, so unterbrechen wir unsere Untersuchung, um einige Sätze vorzuführen, die in dem Folgenden gute Dienste leisten werden. Der erste von diesen Sätzen lautet also:

18) ... Wenn irgend ein Kegelschnitt als Direktrix gegeben ist und in Beziehung auf denselben zwei andere Kegelschnitte als reciproke Polaren vorliegen, so sind die Polaren von zwei harmonischen Polen des einen Kegelschnittes, rücksichtlich der Direktrix, für den anderen Kegelschnitt harmonische Polaren, und umgekehrt sind die Pole von zwei harmonischen Polaren des einen Kegelschnittes, rücksichtlich der Direktrix, harmonische Pole des anderen Kegelschnittes.

Stellen wir uns, um den Satz zu beweisen, zwei Kegelschnitte vor, welche reciproke Polaren sein sollen, und für den einen Kegelschnitt liege ein harmonisches Polepaar a , á vor. Alsdann schneidet die Verbindungslinie der Pole den betreffenden Kegelschnitt in einem Punktepaare b , b', welches harmonisch mit dem Polepaar ist. Diese beiden Punktepaare entsprechen in der Direktrix Polarenpaaren A , A' und B , B', welche nach dem Satze 18) der neunzehnten Vorlesung harmonisch zu einander sind. Da nun B und B' Tangenten des reciproken Kegelschnittes und A und A' harmonisch zu ihnen sind, so sind B und B' nach der Definition harmonische Polaren des reciproken Kegelschnittes.

Auf Grund von 13) der sechszehnten Vorlesung stellt die Gleichung $f - \lambda\varphi = o$ jeden beliebigen Kegelschnitt dar, welcher durch die Schnittpunkte irgend zweier gegebenen Kegelschnitte $f = o$ und $\varphi = o$ geht. Die Bedingung, dass zwei durch ihre Coordinaten x_0 , y_0 , z_0 und x_1 , y_1 , z_1 gegebenen Punkte harmonische Pole des beliebigen Kegelschnittes seien, wird nach 5) und 9) der siebenzehnten Vorlesung durch die Gleichung $f_{10} - \lambda\varphi_{01} = o$ ausgedrückt. Da diese Gleichung aber erfüllt wird, wenn $f_{01} = o$ und $\varphi_{01} = o$ ist, so können wir, indem wir uns die geometrische Bedeutung der beiden letzten Gleichungen vergegenwärtigen, die reciproken Sätze aussprechen:

19) ... Wenn zwei Punkte harmonische Pole sind für irgend zwei gegebene Kegelschnitte, so sind sie auch harmonische Pole für jeden Kegelschnitt, der durch die vier Schnittpunkte der gegebenen Kegelschnitte geht.

20) ... Wenn zwei gerade Linien harmonische Polaren sind für irgend zwei gegebene Kegelschnitte, so sind sie auch harmonische Polaren für jeden Kegelschnitt, welcher die vier gemeinschaftlichen Tangenten der gegebenen Kegelschnitte berührt.

Aus dem ersten dieser beiden Sätze ergiebt sich, dass jeder beliebig gegebene Punkt seinen harmonischen Pol aufzuweisen hat in dem Systeme von Kegelschnitten, welche durch dieselben vier Punkte gehen. Denn construirt man die Polaren des gegebenen Punktes für zwei dieser Kegelschnitte, so wird der Schnittpunkt derselben der gesuchte harmonische Pol sein. Ebenso hat eine jede gerade Linie ihre harmonische Polare in dem Systeme Kegelschnitte, welche vier gerade Linien berühren. Sie ist die Verbindungslinie der Pole der geraden Linie für irgend zwei der genannten Kegelschnitte.

Die vorstehenden allgemeinen Sätze wollen wir nun verwerthen an dem durch die Gleichung 9) ausgedrückten Systeme von Kreisen mit gemeinschaftlicher Secante und dem Systeme der reciproken Polaren 9*).

Zu diesem Zwecke nehmen wir an, es sei ein harmonisches Polepaar des Systemes 9) durch seine Coordinaten x_0 , y_0 , z_0 und x_1 , y_1 , z_1 gegeben. Die Coordinaten ihrer Polaren rücksichtlich der Direktrix werden alsdann auf Grund von 2):

$$x_0 = u_0 \ , \ y_0 = v_0 \ , \ z_0 = -w_0$$

$$x_1 = u_1 \ , \ y_1 = v_1 \ , \ z_1 = -w_1$$

und diese Polaren bilden nach 18) ein Polarenpaar des Systemes 9*). Da nun das genannte Polepaar auch ein Polepaar des Kreises 9) für $\lambda = \infty$ sein muss, so haben wir die Relation:

$$x_0x_1 + y_0y_1 = 0$$

welche unter Vermittelung der angegebenen sechs Gleichungen übergeht in:

$$u_0u_1 + v_0v_1 = 0.$$

Diese Gleichung sagt aber nichts anderes aus, als dass das in Rede stehende Polarenpaar des Systemes 9*), einen rechten Winkel bildet.

Auf diese Weise entspricht einem jeden Polepaare des Systemes 9), durch die Direktrix, ein Paar Polaren des Systemes 9*), welche auf einander senkrecht stehen. Ebenso entspricht einem jeden Paare Polaren des Systemes 9*) ein Polepaar des Systemes 9). Denn dass ein jedes Paar Polaren des Systemes 9*) einen rechten Winkel bilden muss, folgt daraus, dass dasselbe auch dem Kegelschnitte 9*) für $\lambda = \infty$ angehört, wofür die zuletzt aufgestellte Gleichung die Bedingung ist.

Erinnern wir uns nun des in der vierzehnten Vorlesung doppelt ausgedrückten Satzes von jedem Polepaare des Systemes von Kreisen, welche sich in denselben beiden Punkten schneiden, so können wir folgende beiden Sätze als reciproke Sätze proklamiren:

21) ... Die Verbindungslinie eines jeden Paares harmonischer Pole für ein System von Kreisen, welche durch zwei Punkte gehen, wird durch die gemeinschaftliche Tangente der Kreise halbirt.

Ein jedes Paar harmonischer Polaren für ein System von confocalen Kegelschnitten bildet einen rechten Winkel.

Die Berührungspunkte einer gemeinschaftlichen Tangente zweier Kreise bilden ein Polepaar für jeden der beiden Kreise, weil die Polare des einen Berührungspunktes immer durch den anderen geht. Ebenso sind die Tangenten in dem Schnittpunkte zweier Kegelschnitte ein Paar Polaren für jeden der beiden Kegelschnitte. Halten wir nun diese Bemerkungen zusammen mit den eben ausgesprochenen reciproken Sätzen, so ergiebt sich daraus die am Anfange unserer Untersuchung vermuthete Reciprocität der Sätze:

22) ... Die vier gemeinschaftlichen Tangenten an zwei Kreisen werden durch die gemeinschaftliche Secante der beiden Kreise halbirt.

Die Tangenten in jedem der vier Schnittpunkte zweier confocalen Kegelschnitte stehen aufeinander senkrecht.

Den letzten Satz haben wir schon in der einundzwanzigsten Vorlesung unter 25) mit anderen Worten ausgedrückt. Dieser Satz war an der angeführten Stelle nur ein Corollar des allgemeinen Satzes 24) über confocale Kegelschnitte: „Wenn man von einem beliebigen Punkte an confocale Kegelschnitte Tangentenpaare legt, so werden die Winkel, welche ein jedes Tangentenpaar bildet, von einem und demselben Linienpaare halbirt."

Es erhebt sich nun die Frage, welcher reciproke Satz diesem allgemeineren Satze entsprechen wird. Die aufgeworfene Frage beantworten wir aus dem Vorhergehenden damit, dass wir das von dem beliebigen Punkte ausgehende Linienpaar, welches die von den Tangentenpaaren gebildeten Winkel halbirt, als Polarenpaare der confocalen Kegelschnitte auffassen. Denn in dieser Auffassung drückt sich die gesuchte Reprocität schon in den Sätzen 21) aus. Will man jedoch den Wortlaut des angeführten Satzes nicht ändern, so würde sein reciproker Satz so auszusprechen sein: „Wenn man zwei Kreise durch eine gerade Linie schneidet und auf ihr dasjenige Punktepaar fixirt, welches harmonisch ist mit jedem Schnittpunktepaare, so wird die Verbindungslinie des fixirten Punktepaares durch die gemeinschaftliche Secante der Kreise halbirt."

In dieser Weise sind auch folgende Sätze von minderer Bedeutung reciproke Sätze:

„Wenn zwei Kreise und eine gerade Linie gegeben sind, so giebt es zwei Kreise, welche durch die Schnittpunkte der gegebenen Kreise gehen und zugleich die

„Wenn zwei confocale Kegelschnitte und ein Punkt gegeben sind, so giebt es zwei mit den gegebenen Kegelschnitten confocale Kegelschnitte, welche durch

gegebene gerade Linie berühren. Die Berührungspunkte bilden ein harmonisches Polepaar der Kreise.“

den gegebenen Punkt gehen. Die Tangenten der letzteren in dem gegebenen Punkte bilden ein harmonisches Polarenpaar der confocalen Kegelschnitte.“

Wir führen diese Sätze nur auf, weil sie lehren erstens dasjenige harmonische Polepaar von Kreisen, die sich in denselben beiden Punkten schneiden, zu bestimmen, welches auf einer gegebenen geraden Linie liegt; und zweitens dasjenige harmonische Polarenpaar confocaler Kegelschnitte zu bestimmen, welches sich in einem gegebenen Punkte schneidet. Freilich lässt sich durch einfachere Hülfsmittel dasselbe erreichen.

„Wenn zwei Kreise und ein Punkt gegeben sind, und man construirt einen Kreis, der durch die Schnittpunkte der gegebenen Kreise und den gegebenen Punkt geht, so verbindet die Tangente desselben in dem gegebenen Punkte diesen Punkt mit seinem harmonischen Pole der Kreise.“

„Wenn zwei confocale Kegelschnitte und eine gerade Linie gegeben sind, und man construirt denjenigen confocalen Kegelschnitt, welcher die gegebene gerade Linie berührt, so bildet die gerade Linie und die in dem Berührungspunkte auf ihr senkrecht stehende gerade Linie ein harmonisches Polarenpaar der confocalen Kegelschnitte.“

Aus diesen Sätzen ergiebt sich nun erstens eine Construktion des, einem gegebenen Punkte entsprechenden harmonischen Poles für das System von Kreisen, welche sich in zwei gegebenen Punkten schneiden, und zweitens eine Construktion der, einer gegebenen geraden Linie entsprechenden, harmonischen Polare in einem Systeme confocaler Kegelschnitte.

Wir haben am Anfange unserer Untersuchung die allgemeinen reciproken Sätze 4) abgelesen aus den Gleichungen 3) und 3*) reciproker Kegelschnitte, rücksichtlich der Kreis-Direktrix 1). Es lag dort irgend ein Kreis 3) und eine beliebige Kreis-Direktrix 1) vor. Wir specialisiren nun unsere im Vorhergehenden durchgeführte Untersuchung, wenn wir

in dem Folgenden annehmen, dass der Mittelpunkt der Kreis-Direktrix 1) in der Peripherie des Kreises 3) liegt. In diesem Falle haben wir für den Kreis 3) und seine reciproke Polare 3*) die Gleichungen:

23) ... $x^2 + y^2 + (ax + by)z = o$

23*) ... $u^2 + v^2 - (au + bv)w = o.$

Da in der letzten Gleichung das mit w^2 multiplicirte Glied fehlt, so können wir auf Grund von 14) der neunzehnten Vorlesung die reciproken Sätze aussprechen:

24) ... Die reciproke Polare eines beliebig gegebenen Kreises rücksichtlich einer Kreis-Direktrix, deren Mittelpunkt auf der Peripherie des Kreises liegt, ist eine Parabel, deren Brennpunkt mit dem Mittelpunkte der Direktrix zusammenfällt.

Die reciproke Polare einer beliebig gegebenen Parabel rücksichtlich einer Kreis-Direktrix, deren Mittelpunkt in dem Brennpunkte der Parabel liegt, ist ein Kreis.

Verlegen wir nun den Mittelpunkt des Kreises 23) in die x-Axe des Coordinatensystemes, indem wir setzen $b = o$ und führen an Stelle des Parameters a den Parameter k ein durch die Gleichung $ak = 2$, so gehen die Gleichungen 23) und 23*) der reciproken Polaren über in:

24) ... $x^2 + y^2 + \frac{2}{k}xz = o$

24*) ... $u^2 + v^2 - \frac{2}{k}uw = o$

und die letzte Gleichung, wenn man die Liniencoordinaten ersetzt durch Punktcoordinaten, wie folgt:

$$u - \frac{1}{k}w = x \ , \ v = y \ , \ - \frac{1}{k}u = z$$

nimmt die Gestalt an:

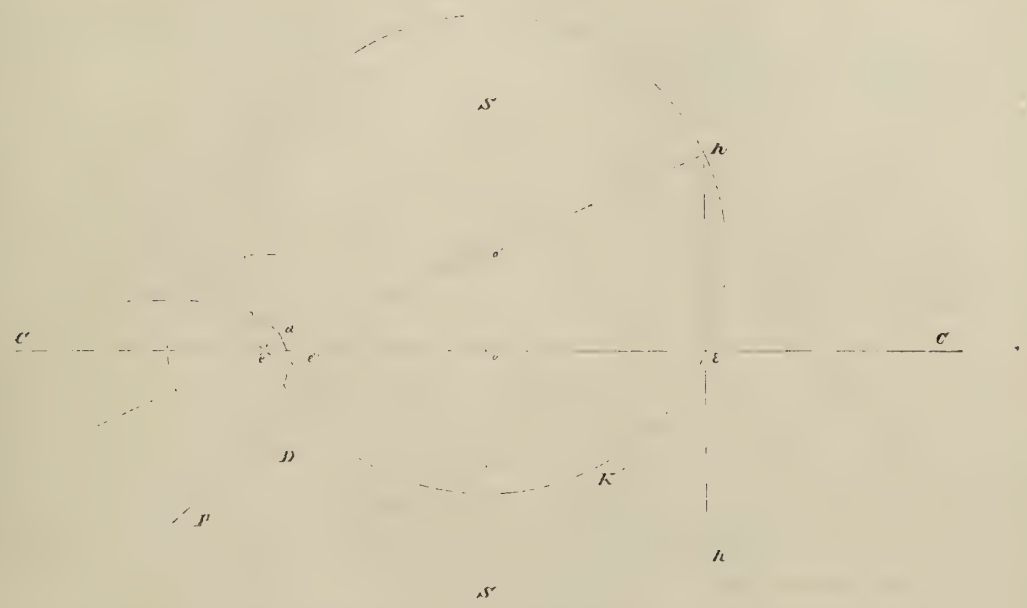
$$25) \ldots \qquad y^2 - 2k\left(x + \frac{k}{2}\right) = 0.$$

Dieselbe Gleichung ist am Ende der zweiundzwanzigsten Vorlesung unter 16) als der analytische Ausdruck confocaler Parabeln aufgeführt. Wir schliessen daraus:

26) ... Die reciproken Polaren aller Kreise, welche sich in einem gegebenen Punkte berühren, rücksichtlich einer Kreis-Direktrix, deren Mittelpunkt der gegebene Berührungspunkt ist, sind confocale Parabeln; und umgekehrt sind die reciproken Polaren aller confocalen Parabeln Kreise, die sich in dem Brennpunkte der Parabeln berühren, wenn der Brennpunkt Mittelpunkt der Kreis-Direktrix ist.

Wenn ein Kreis K' und eine Kreis-Direktrix D, deren Mittelpunkt e auf dem Kreise liegt, gegeben sind, so sieht man ohne Weiteres, dass die Centrallinie eó der beiden Kreise Durchmesser der dem gegebenen Kreise reciproke Parabel P ist. Die Verlängerung der Centrallinie schneidet den gegebenen Kreis in einem Punkte h, dessen Polare, rücksichtlich der Direktrix, Tangente der Parabel P in ihrem Scheitel a ist. Der Scheitel a der Parabel und der Punkt h des gegebenen Kreises sind daher harmonische Punkte zu den Schnittpunkten ihrer Verbindungslinie und der Direktrix. Da nun jeder dieser Punkte den anderen bestimmt, so braucht man von der Parabel nur den Scheitel a zu kennen, um umgekehrt den Punkt h des der Parabel reciproken Kreises und damit den Kreis selbst zu bestimmen. Von der angegebenen Construktion der Tangente der reciproken Parabel in ihrem Scheitel werden wir in dem Folgenden Gebrauch machen.

Die beschriebene Figur liegt hier zur Ansicht vor. Sie ist zugleich bestimmt als Ergänzung der ersten Figur in Folgendem zu dienen. Es sind darum gleiche Figuren-Theile mit gleichen Buchstaben bezeichnet.



Die vorstehenden Entwickelungen beabsichtigten vorzugsweise die in der dreizehnten und vierzehnten Vorlesung über Kreise dargelegten Eigenschaften durch das in der zwanzigsten Vorlesung beschriebene Gesetz der Reprocität für Kegelschnitte nutzbar zu machen. Das Thema ist keineswegs erschöpft. So sehen wir zum Beispiele, dass in der vierzehnten Vorlesung Kreise auftreten, welche das System Kreise mit gemeinschaftlicher Secante senkrecht schneiden, von welchen noch gar nicht die Rede gewesen ist. Nehmen wir deshalb zum Schlusse unserer Untersuchung die beregten Kreise auf.

Es lagen die Kreise 9) vor mit gemeinschaftlicher Secante. Die Entfernungen e und ε der Grenzpunkt dieser Kreise von dem Mittelpunkte e der Direktrix D auf der angenommenen x-Axe waren o und $\frac{2}{\alpha}$. Es ist darum die Gleichung des Kreises, der durch die Grenzpunkte geht und seinen Mittelpunkt in der x-Axe hat:

$$\left(x - \frac{1}{\alpha}z\right)^2 + y^2 - \left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 z^2 = o.$$

Hieraus ergiebt sich nun die Gleichung aller Kreise K', welche das System 9) senkrecht schneiden:

$$27) \ldots \quad \left(x - \frac{1}{\alpha}z\right)^2 + y^2 - \left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 z^2 + \mu yz = o \ ,$$

und unter Vermittelung von 2) erhalten wir die Gleichung ihrer reciproken Parabeln:

$$27^*) \ldots \quad \left(u + \frac{1}{\alpha}w\right)^2 + v^2 - \left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 w^2 - \mu vw = o$$

von welchen in der Figur nur die Parabel P vorliegt, deren reciproke Polare der Kreis K' ist mit dem Mittelpunkte ó auf der gemeinschaftlichen Secante SS der Kreise 9).

Die Tangente der Parabel P in ihrem Scheitel a ist die gerade Linie, welche die Schnittpunkte der Kreise D und K' verbindet, denn sie ist die Polare des Punktes h, rücksichtlich der Kreis-Direktrix D. Sie geht also durch den Pol M der geraden Linie hh, den wir als den Mittelpunkt der geraden Linie eé bezeichnet haben. Es liegen demnach die Scheitel der Parabeln 27*) auf einem Kreise, der die gerade Linie eM zum Durchmesser hat. Die in M auf dem Durchmesser senkrecht stehende gerade Linie ist Tangente für sämmtliche Parabeln 27*), weil ihre reciproken Kreise 27) durch den Punkt ε gehen. Diese vorgeführten Thatsachen lassen sich kurz durch folgende Sätze ausdrücken:

28) ... Die reciproken Polaren aller Kreise, welche durch zwei beliebig gegebene Punkte gehen, rücksichtlich einer Kreis-Direktrix, deren Mittelpunkt in einem der gegebenen Punkte liegt, sind focale Parabeln, deren gemeinsamer Brennpunkt mit dem Mittelpunkte der Direktrix zusammenfällt und deren Scheitel auf einem Kreise liegen, der durch den gemeinsamen Brennpunkt geht.

29) ... Die reciproken Polaren aller focalen Parabeln, deren Scheitel auf einem durch den gemeinsamen Brennpunkt gehenden Kreise liegen, rücksichtlich einer um den Brennpunkt als Mittelpunkt beschriebenen Kreis-Direktrix, sind Kreise, welche sämmtlich durch den Brennpunkt und einen anderen ganz bestimmten Punkt gehen.

München im Februar 1874.

Beobachtungen und Untersuchungen

über die

Eigenschaften und die practische Verwerthung

der

Naudet'schen Aneroïdbarometer

von

Carl Max v. Bauernfeind.

Mit 1 Steindrucktafel.

Beobachtungen und Untersuchungen

über die

Eigenschaften und die practische Verwerthung

der

Naudet'schen Aneroïdbarometer

von

Carl Max v. Bauernfeind.

Die Aneroïde oder Federbarometer haben sich unglaublich rasch unter denjenigen Gelehrten und Ingenieuren, deren Beruf ihnen die Bestimmung der gegenseitigen Lage von Punkten der Erdoberfläche auferlegt, verbreitet, und hiezu trug nicht blos die Bequemlichkeit des Transports und der Handhabung, sondern auch der Glaube an die grosse Leistungsfähigkeit dieser Instrumente bei. Insbesondere haben sich die Bauingenieure derselben bemächtigt, um damit vorläufige Tracirungen von Strassen und Eisenbahnen vorzunehmen, wobei es wesentlich nur darauf ankommt, die Höhenlage von aufeinander folgenden Thälern und Wasserscheiden mit einzelnen Zwischenpunkten annähernd zu kennen. Gerade aber in dieser Kategorie höherer Techniker begegnet man sehr oft übertriebenen Vorstellungen von der Genauigkeit der Höhenbestimmung mit Federbarometern. Die schon ziemlich ausgebreitete Literatur über diesen Gegenstand begünstigt im Allgemeinen jene Vorstellungen und tritt ihnen nur ausnahmsweise entgegen; in beiden Fällen jedoch, wie ich glaube, ohne vollständige Begründung. Denn ein richtiges Urtheil über den Werth eines Instruments kann man nur durch zahlreiche Beobachtungen und Vergleichungen erlangen, welche

sich sowohl auf dessen Constanten, als auf die Wiedergabe von vorher schon genau gemessenen Grössen erstrecken. An dergleichen Beobachtungen und Vergleichungen leiden wir aber immer noch Mangel, sowie es auch an scharfen Begriffsbestimmungen über die Constanten der Aneroïde und an experimentellen Nachweisen über die Richtigkeit der analytischen Ausdrücke für die an den Messungsresultaten anzubringenden Verbesserungen fehlt. Um diesen Mängeln abzuhelfen, habe ich seit längerer Zeit an und mit drei Naudet'schen Aneroïden, deren Abbildung und Beschreibung in meinen Elementen der Vermessungskunde (IV. Auflage 1873, Bd. I, S. 410—417, Bd. II, S. 342—348) zu finden ist,[1]) zahlreiche Beobachtungen angestellt und die damit verknüpften Untersuchungen nunmehr zum Abschlusse gebracht.

Indem ich deren Ergebnisse nach dem Beschlusse der mathematisch-physicalischen Classe unserer Akademie vom 7. März d. J. an dieser Stelle veröffentliche, gebe ich mich der Hoffnung hin, dass hiedurch nicht blos einige schon von Anderen ausgesprochene Ansichten bestätigt, sondern auch neue Thatsachen und Methoden zur Constantenbestimmung begründet, schwankende Begriffe festgestellt und unklare Vorstellungen von der Grösse der mittleren Messungsfehler der Aneroïde berichtigt werden.

I. Die Beziehungen zwischen den Angaben eines Naudet'schen Feder- und eines Quecksilberbarometers.

Mein oben angeführtes Lehrbuch der technischen Geometrie und die Abhandlung von Höltschl überheben mich einer genauen Abbildung und Beschreibung der Naudet'schen Aneroïde, womit ich meine Beobachtungen und Untersuchungen angestellt habe. Ich bemerke nur, dass alle drei gleiche Construction und Schablonenscalen von 12 Centimeter Durchmesser besitzen, und dass sie nicht direct vom Verfertiger, sondern von J. Feiglstock in Wien bezogen worden sind: zwei die Zahlen 38255 und 38262 tragende bereits im Jahre 1871 und das dritte mit der Zahl 50700 versehene im verflossenen Jahre 1873. In der

1) Ausserdem vergleiche man: Bulletin de la société d'encouragement etc. Sept. 1866, und J. Höltschl, die Aneroïde von Naudet und Goldschmidt, Wien 1872.

Folge werde ich das mit der Zahl 38255 bezeichnete Instrument Nr I, das mit 38262 überschriebene Nr II und das zuletzt angeschaffte Nr III nennen.

Um mit einem Naudet'schen Federbarometer in der Weise, wie es mit einem Quecksilberbarometer geschieht, Höhen messen zu können, muss man im Stande sein, aus den Angaben des Aneroïds, nämlich aus der Ablesung B an der Scala und der Temperatur t des Instrumentes, den auf die Normaltemperatur 0^0 reducirten Stand A_0 des Quecksilberbarometers zu berechnen, welcher jenen Angaben entspricht. Diese Reduction hängt erfahrungsgemäss von drei Correctionen ab, nämlich von der absoluten oder Standcorrection c, der Theilungscorrection c' und der Wärmecorrection c''.

1. Unter der absoluten oder Standcorrection verstehe ich die Anzahl Millimeter c, um welche die Barometerstände A_0 und B_0 bei der Normaltemperatur 0^0 und dem Normalluftdruck von einander abweichen. Nimmt man diesen Druck A_0 zu 760 ^{mm} Quecksilber an, so ist allgemein

$$c = 760 - B_0 \qquad (1)$$

und es kann hienach die Constante c positiv oder negativ sein. Diese Correction des Barometerstandes B_0 würde wegfallen, wenn es anginge, das Aneroïd durch die auf der Rückseite desselben angebrachte Stellschraube so zu berichtigen, dass dessen Zeiger bei dem Normaldrucke und der Normaltemperatur immer über der Zahl 760 stünde; diese Stellung ist jedoch nicht leicht hervorzubringen und, wenn sie einmal stattfindet, nur auf kurze Zeit zu erhalten, weil der Mechanismus der Aneroïde ziemlich wandelbar ist. Es ist daher nothwendig, die Standcorrection c (so genannt, weil sie den bei 0^0 Temperatur stattfindenden Unterschied zweier Barometerstände A_0 und B_0 anzeigt) von Zeit zu Zeit nach einer der weiter unten zu beschreibenden Methoden zu bestimmen und bei den Reductionen in Rechnung zu bringen.

Es bedarf wohl kaum der Erinnerung, dass die Definition der Standcorrection keineswegs unbedingt an den normalen Luftdruck von 760 ^{mm} Quecksilber, wie er am Meere stattfindet, gebunden ist; es empfiehlt sich aber, diesen Druck in die Begriffsbestimmung der Stand-

correction aufzunehmen, weil er eine allgemein bekannte Grösse ist und, wie sich später ergibt, bei allen wirklichen Höhenmessungen die Theilungscorrection c' positiv macht. Wollte also Jemand den mittleren Barometerstand seines Wohnorts in die Definition der Standcorrection einführen, so unterläge dieses keinem Anstande, es würde dann aber nicht blos die Constante c, sondern auch die Theilungscorrection c' sich ändern und nur die algebraische Summe beider Correctionen dieselbe bleiben.

2. Was die Theilungscorrection c' anbelangt, so rührt dieselbe davon her, dass die Scalen der Aneroïde nach Schablonen angefertigt sind und folglich bei gleichem Durchmesser auch gleiche Theile haben, während die Zeiger der Federbarometer sich nicht genau proportional dem Luftdrucke bewegen. Die Ausgleichung, welche nothwendig ist, um bei der Normaltemperatur 0^0 die Angabe eines Aneroïds (B + c) der des Quecksilberbarometers (A_0) gleich zu machen, heissen wir Theilungscorrection. Eine solche Ausgleichung wäre unnöthig in dem Falle, wo die Scala des Federbarometers genau nach der des Normalbarometers abgeglichen, d. i. etwa von 5 zu 5 oder von 10 zu 10 Theilstrichen durch Versuche mit der Luftpumpe, bei der Temperatur 0^0 angestellt, bestimmt worden wäre; solche Specialscalen kommen aber bei den zu wirklichen Messungen verwendeten Federbarometern selten oder nicht vor und deshalb kann auch die Theilungscorrection c' bei der Reduction der Aneroïdablesungen auf den Stand des Quecksilberbarometers in der Regel nicht entbehrt werden.

Diese Correction ist bei der Normaltemperatur 0^0 und dem normalen Luftdrucke von 760^{mm} Quecksilber offenbar null und wird um so grösser, je weiter der Zeiger des Aneroïds von dem Theilstriche 760 nach der einen oder anderen Seite absteht, d. h. je grösser der Bogen $760 - A_0$ ist. Es liegt daher nahe, die Theilungscorrection c' diesem Bogen proportional anzunehmen und

$$c' = b\,(760 - A_0) \qquad (2)$$

zu setzen, wobei b ein durch Versuche zu bestimmender Coefficient, der Theilungscoefficient, ist und A_0 den auf 0^0 reducirten Stand des

Quecksilberbarometers bezeichnet, welcher der bei der Temperatur des schmelzenden Eises auf dem Federbarometer gemachten Ablesung B_0 entspricht.

Der Ausdruck (2) für die Theilungscorrection, welcher sich zunächst lediglich durch seine Einfachheit und den Umstand empfiehlt, dass er jedenfalls mit dem Bogen $760 - A_0$ in irgend einer Weise wachsen muss, wird nicht von allen Schriftstellern über das Naudet'sche Aneroïd als unbedingt richtig angenommen, indem einige den Ausdruck für c' noch durch ein zweites Glied von der Form $b'(760 - A_0)^2$ verbessern wollen, was andere jedoch nicht für nothwendig halten.[1]) Ich muss mich auf Grund von Versuchen, die ich weiter unten mittheilen werde, und die ich angestellt habe, weil es von Anderen noch nicht oder doch nicht in genügender Weise geschehen war, für die letztere Ansicht aussprechen und halte demzufolge den Ausdruck $b(760 - A_0)$ für ausreichend, um daraus die Verbesserungen der Ablesungen auf den Schablonenscalen der Federbarometer zu berechnen, sobald b bestimmt ist.

3. Wenn man bei gleichbleibendem Drucke A_0 der Atmosphäre ein Aneroïd bei verschiedenen Temperaturen abliest, so findet man, dass diese Ablesungen bei höheren Temperaturen grösser und bei niedrigeren kleiner werden als bei der Normal-Temperatur von 0^0; es ist also in dem erstem Falle von der Ablesung B eine positive Grösse c'' abzuziehen und in dem zweiten eine solche zur Ablesung hinzuzufügen, um die Ablesung B_0, welche der Normaltemperatur entspricht, zu erhalten. Diese Grösse c'' heissen wir die Wärmecorrection und verstehen demnach darunter den Unterschied zwischen der um die Stand- und Theilungscorrection verbesserten Aneroïdablesung $(B + c + c')$ und dem auf 0^0 reducirten Stande (A_0) des Quecksilberbarometers, welcher zur Ablesung B auf dem Federbarometer gehört. In dem besonderen Falle, wo $c' = 0$ ist, bedeutet die Wärmecorrection den Unterschied zwischen der bei der Temperatur t und dem Normaldrucke erhaltenen

---

1) Man vergleiche J. Höltschl, die Aneroïde von Naudet und Goldschmidt, Wien 1872; ferner H. Schoder, Hülfstafeln zur barometrischen Höhenmessung, Stuttgart 1872; weiter W. Jordan, das Federbarometer und seine Anwendung zum Höhenmessen in der Zeitschrift für Vermessungswesen, Jahrgang 1873; endlich den in dieser Zeitschrift geführten Streit zwischen Schoder und Höltschl, Jahrgang 1873.

und um die Standcorrection verbesserten Aneroïdablesung (B + c) und dem Normaldrucke von 760 ^{mm} Quecksilber. Da die Wärmecorrectionen, wie ich ebenfalls weiter unten durch Versuche nachweisen werde, den von 0 ^{0} an gezählten Temperatur-Differenzen t proportional gesetzt werden dürfen, so ist bei den für diese Differenzen gebräuchlichen Vorzeichen und dem vorhin besprochenen Steigen und Fallen der Werthe von B die Wärmecorrection

$$c'' = - at \qquad (3)$$

wobei a den durch Versuche zu bestimmenden Wärmecoefficienten bezeichnet. Diese Verbesserung wird also bei allen Beobachtungen null, für welche die Temperatur des Instrumentes $t = 0$ ist, und es ist nothwendig, letzteres in diesen Wärmezustand zu versetzen, wenn man c oder c' unabhängig von c'' bestimmen will.

4. Fasst man sämmtliche Verbesserungen der an einem Federbarometer gemachten Ablesung B zusammen, so ergibt sich der auf 0^{0} reducirte Stand A_0 des Quecksilberbarometers, welcher jener Ablesung entspricht, aus der Gleichung

$$A_0 = B + c + c' + c'' = B + c + b\,(760 - A_0) - at. \qquad (4)$$

Wenn man aus Erfahrung weiss, dass die Constante c selten einen Werth von 3 ^{mm} hat; dass ferner der Theilungscoefficient in der Regel zwischen 0,01 und 0,02 schwankt, somit die Correction c' nur ausnahmsweise die Grösse von 1 ^{mm} erreicht oder übersteigt; und dass endlich die Temperaturcorrection $c'' = - at$ in vielen Fällen die Summe der beiden anderen Correctionen c + c' aufhebt oder mindestens sehr vermindert: wenn sonach der Stand A_0 nur wenig von B verschieden und der Coefficient b jederzeit sehr klein ist, so ist es in den meisten Fällen, wo A_0 nicht an einem Quecksilberbarometer beobachtet werden konnte, erlaubt, in dem Ausdrucke für c' den Bogen $(760 - A_0)$ durch $(760 - B)$ zu ersetzen. In jedem Falle kann man, um einen genäherten Werth von A_0 zu erhalten, zunächst

$$A_0 = B + c + b\,(760 - B) - at \qquad (5)$$

nehmen und dann die so erhaltene Reductionsgrösse A_0 in die rechte Seite der Gleichung (4) einführen. Man wird auf diesem Wege in den meisten Fällen den Werth von A_0 bis auf $0{,}1^{mm}$ oder diejenige Grösse richtig erhalten, welche ungefähr der mittleren Genauigkeit der Einstellung und Ablesung der Nadel entspricht. Diese Genauigkeitsgrenze hindert nicht, bei Beobachtungen noch halbe Decimillimeter abzulesen, d. h. jeden auf der Scala angezeigten Halbmillimeter noch in zehn Theile zu theilen; weiter gehende Ablesungen erscheinen jedoch gesucht und werthlos.

II. Methoden zur unmittelbaren Bestimmung der Constanten eines Naudet'schen Federbarometers.

Bei der Aufstellung von Methoden zur Bestimmung der Correctionen c'', c', c oder der Constanten a, b, c eines Naudet'schen Aneroïds hat man zu fragen, welche physicalische Hilfsmittel hiefür zu Gebote stehen: ob diese Bestimmung nur für ein Aneroïd oder gleichzeitig für zwei oder mehrere zu machen ist; ob man Sommer- und Wintertemperaturen, den Druck der Atmosphäre auf Bergen und in Thälern dazu benützen kann, oder die erforderlichen Temperaturgrade und Drückungen künstlich erzeugen muss; endlich ob bei den Berechnungen der Beobachtungen die Wahrscheinlichkeitsrechnung angewendet werden darf oder nicht. Wir werden nach und nach verschiedene Methoden kennen lernen; zunächst gehen wir darauf aus, mit allen Hilfsmitteln, welche uns Physik und Mathematik darbieten, die Constante c und die Coefficienten a und b so direct als möglich zu bestimmen und die Richtigkeit der im I. Abschnitte aufgestellten Definitionen und Gleichungen zu beweisen.

1. Die Constante c. Wenn es sich lediglich um die Standcorrection c eines Naudet'schen Aneroïds handelt, so folgt aus Gleichung (4) sofort, dass diese Grösse direct erhalten werden kann, wenn man das Aneroïd einer Temperatur $t = 0$ und einem Drucke $A_0 = 760^{mm}$ Qu. aussetzt, denn in diesem Falle geht die Gleichung (4) in (1) über, wonach $c = 760 - B_0$ ist. Dieses Verfahren setzt erstens einen Normalbarometer oder wenigstens einen sehr guten Gefässbarometer, dann eine Luftpumpe mit entsprechender Glocke, in der das Aneroïd

auf 0^0 abgekühlt werden kann, und schliesslich ein mit der Luftpumpe in Verbindung zu setzendes Quecksilbermanometer voraus. Mit diesen Hilfsmitteln habe ich die Standcorrection in folgender Weise bestimmt.

Das Aneroïd wurde in eine hinreichend weite und tiefe cylindrische Schüssel von Weissblech und mit dieser in eine zweite grössere mit Eis gefüllte Schüssel von gleichem Metall gestellt und dann in eine hinreichend grosse und dicke Metallglocke gebracht, die sich durch ein dickes Spiegelglas luftdicht abschliessen liess. Die Glocke stand durch eine metallene Röhre mit einer Luftpumpe in Verbindung und eine zweite Röhre verband diese Pumpe mit dem einen Schenkel des vorhin erwähnten und aus zwei mit Quecksilber gefüllten Barometerröhren bestehenden Manometers, dessen anderer Schenkel gegen die Atmosphäre offen war. Der Druck der Atmosphäre wurde am Normalbarometer des physicalischen Cabinets der hiesigen polytechnischen Schule gemessen. Sobald durch die Luftpumpe auf das Aneroïd und den Manometer ein Druck ausgeübt wurde, der den der Atmosphäre übertraf oder nicht erreichte, entstand in den beiden mit Quecksilber gefüllten Röhren des Manometers eine Niveaudifferenz, deren Grösse ein in passender Entfernung stehender Kathetometer genau angab.

Selbstverständlich kann ein einziger Beobachter die eben erwähnten Grössen nicht gleichzeitig übersehen; ich wurde daher bei den in Rede stehenden Versuchen von dem Assistenten am physicalischen Laboratorium und Privatdocenten Herrn Edelmann und vom Assistenten des geodätischen Instituts des hiesigen Polytechnicums Herrn Decher unterstützt: Der erstere handhabte die Luftpumpe, der letztere den Kathetometer, während ich das Aneroïd und den Normalbarometer ablas. So erhielten wir am 21. und 22. December 1873 die in den ersten 4 Spalten der Tafeln Nr 1, Nr 2 und Nr 3 stehenden Zahlen, von denen

N_0 den auf 0^0 reducirten Stand des Normalbarometers,
K_0 die kathetometrisch bestimmte Druckdifferenz,
A_0 den auf 0^0 reducirten Gesammtdruck $N_0 + K_0$ und
B_0 den auf 0^0 reducirten Stand des Federbarometers

in Millimetern bezeichnet, und wozu nur zu bemerken ist, dass, da sich die Temperatur des Aneroïds nicht genau auf 0^0 erhielt, kleine Reduc-

tionen der Aneroïdablesungen nothwendig waren, welche nach Gleichung (3) mit dem Coefficienten $a = -0{,}135$ für 1^0 R vorgenommen wurden.

Wenn der absolute Werth dieses Wärmecoefficienten sich später etwas kleiner als 0,135 (nämlich = 0,132) herausstellte, so hat der Unterschied von 0,003 bei den vorliegenden Reductionen keinen Belang, weil alle Werthe von t innerhalb $\pm$ $2{,}5^0$ R lagen und daher ein grösserer Fehler als $\pm$ 0,01 mm nicht begangen werden konnte[1]).

Fassen wir in den drei ersten Tafeln nur die Beobachtungen Nr 5 in's Auge, für welche A_0 nahezu 760 mm Qu. beträgt und bringen wir an denselben die fast verschwindenden Theilungscorrectionen $c' = 0{,}015\ (760 - A_0)$ an, so wird nach Gleichung (4) für den Federbarometer

Nr I	die	Correction	$c = 760 - 758{,}59$	$=$	1,41 mm
Nr II	„	„	$c = 760 - 757{,}44$	$=$	2,56
Nr III	„	„	$c = 760 - 759{,}76$	$=$	0,24.

Diese aus je einer einzigen ganzen Beobachtung hervorgegangenen Werthe von c stimmen ziemlich nahe mit den Mittelwerthen überein, welche aus grösseren Beobachtungsreihen erhalten wurden. (Vergl. die Formeln Nr 9 auf Seite 39).

Statt des oben beschriebenen complicirten Apparats zur Bestimmung der Standcorrection c habe ich eine sehr einfache auf dem Princip der communicirenden Röhren beruhende Vorrichtung erfunden, welche gestattet, Drückungen von 0,8 bis 1,2 Atmosphären auf den Federbarometer auszuüben und zu messen, ohne dass dazu eine Luftpumpe oder ein Quecksilberbarometer nöthig ist. Ich hoffte, diesen meinen Apparat hier beschreiben zu können, bin jedoch in dieser Hoffnung durch den Mechaniker getäuscht worden, der die Ausführung desselben über Gebühr verzögert hat; ich behalte mir daher die beabsichtigte Beschreibung für später vor, und bemerke vorläufig blos, dass meine Druckvorrichtung nur wenig kosten wird.

---

1) Temperaturen unter Null kommen nur bei Untersuchung des Aneroïds Nr III vor, wo in Folge der bei I und II gemachten Erfahrungen etwas Kochsalz unter das Eis gemischt worden war.

2. Die Summe $c+c'$. Nach Gleichung (4) ergibt sich die Summe der Stand- und Theilungscorrectionen $c + c' = A_0 - B_0$, wenn man die Werthe von A_0 und B_0 bei gleichem auf den Normal- und den Federbarometer ausgeübten Druck beobachtet und die Temperatur des letzteren auf Null bringt.

Bei den in Abschnitt II, Nr 1 beschriebenen Versuchen wurden A_0 und B_0 nicht blos bei 760^{mm} Quecksilber-Druck, sondern bei verschiedenen Drückungen über und unter dem einfachen Atmosphären-Druck und bei der Temperatur des schmelzenden Eises bestimmt. Hatte das Aneroïd die Temperatur 0^0 nicht ganz angenommen, so wurde, wie schon bemerkt, der positive oder negative Werth von t, welcher höchstens 2^0R betrug, mit 0,135 multiplicirt, um hiedurch die Ablesung B auf 0^0 zu reduciren: hieraus erklärt sich, warum die Werthe von B_0 in den nachfolgenden drei Tafeln auf einzelne Hundertel-Millimeter angegeben sind, während die Ablesungen nur bis auf ganze oder halbe Zehntel-Millimeter gemacht wurden.

Tafel Nr I.

Beobachtungen über die Summen der Stand- und Theilungscorrectionen am Federbarometer Nr I, ausgeführt am 21. December 1873.

Nr	N_0	K_0	A_0	B_0	o	v	v^2
1	723,25	0	723,25	721,09	2,16	− 0,235	0,0552
2	10	+ 10,55	733,65	731,98	1,67	+ 0,098	0,0096
3	10	+ 19,57	742,67	741,11	1,56	+ 0,073	0,0053
4	00	+ 29,60	752,60	750,95	1,65	− 0,166	0,0276
5	00	+ 37,88	760,88	759,47	1,41	+ 0,050	0,0025
6	00	+ 47,75	770,75	769,79	0,96	+ 0,252	0,0635
7	00	+ 59,70	782,70	781,28	1,42	− 0,387	0,1498
8	05	0	723,05	721,28	1,77	+ 0,157	0,0246
9	15	− 11,65	711,50	709,76	1,74	+ 0,360	0,1296
10	25	− 21,70	701,55	699,25	2,30	− 0,050	0,0025
11	25	− 31,75	691,50	688,85	2,65	− 0,249	0,0620
12	25	− 41,95	681,30	678,72	2,58	− 0,026	0,0007
13	25	− 51,15	672,10	669,34	2,76	− 0,068	0,0046
14	25	0	723,25	721,34	1,91	+ 0,014	0,0002
			10170,75	10144,51	26,54	$\varepsilon = \pm 0{,}203$	0,5377
			726,48	724,63	1,895	$\varepsilon' = \pm 0{,}054$	

Tafel Nr 2.

Beobachtungen über die Summen der Stand- und Theilungscorrectionen am Federbarometer Nr II, ausgeführt am 21. December 1873.

Nr	N_0	K_0	A_0	B_0	o	v	v^2
1	723,33	0	723,33	720,23	3,10	+ 0,017	0,0003
2	33	+ 9,20	732,53	729,64	2,89	+ 0,080	0,0064
3	33	+ 19,30	742,63	739,84	2,79	+ 0,018	0,0003
4	33	+ 29,20	752,53	749,75	2,78	— 0,130	0,0169
5	20	+ 39,75	762,95	760,39	2,56	— 0,077	0,0059
6	20	+ 49,45	772,65	770,30	2,35	— 0,022	0,0005
7	25	+ 58,65	781,90	779,70	2,20	— 0,020	0,0004
8	25	0	723,25	720,32	2,93	+ 0,188	0,0353
9	25	— 10,05	713,20	709,72	3,48	— 0,201	0,0404
10	25	— 21,00	702,25	699,05	3,20	+ 0,254	0,0645
11	27	— 29,50	693,77	689,85	3,92	— 0,314	0,0986
12	27	— 39,60	683,67	679,65	4,02	— 0,253	0,0640
13	27	— 50,45	672,82	668,94	3,88	+ 0,045	0,0020
14	27	0	723,27	720,34	2,93	+ 0,188	0,0353
			10180,75	10137,72	43,03	$\varepsilon = \pm 0{,}169$	0,3708
			727,20	724,12	3,07	$\varepsilon' = \pm 0{,}045$	

Nachdem die Bildung und Bedeutung der in den vier ersten Spalten der Tafeln Nr 1, Nr 2, Nr 3 enthaltenen Zahlenwerthe schon früher erklärt wurde, will ich hier nur noch beifügen, dass in der fünften Spalte die beobachteten Summen der Stand- und Wärmecorrectionen $c + c' = A_0 - B_0 = o$, in der sechsten die Fehler $v = c + b\,(760 - A_0) - o$ und in der siebenten die Fehlerquadrate enthalten sind; letztere lediglich deshalb, um die mittleren Fehler jeder einzelnen beobachteten Summe $c + c' = o$ berechnen zu können.

3. Die Constanten b und c. Für die Summe der Correctionen c und c' gilt nach Gleichung (4) die Beziehung

$$c + b\,(760 - A_0) = A_0 - B_0 = o$$

oder, wenn man die Differenz $760 - A_0 = m$ setzt,

$$c + bm = o. \qquad (6)$$

Tafel Nr 3.

Beobachtungen über die Summen der Stand- und Theilungscorrectionen am Federbarometer Nr III, ausgeführt am 22. December 1873.

Nr	N_0	K_0	A_0	B_0	o	v	v^2
1	724,40	0	724,40	723,60	0,80	+ 0,059	0,0035
2	40	+ 6,85	731,25	730,50	0,75	— 0,007	0,0000
3	40	+ 16,35	740,75	740,50	0,25	+ 0,331	0,1096
4	42	+ 26,15	750,57	750,03	0,54	— 0,126	0,0159
5	42	+ 35,82	760,24	760,00	0,24	+ 0,010	0,0001
6	45	+ 46,38	770,83	770,83	0,00	+ 0,070	0,0049
7	45	+ 56,55	781,00	780,82	0,18	— 0,283	0,0801
8	50	0	724,50	723,65	0,85	+ 0,008	0,0001
9	50	— 12,50	712,00	710,80	1,20	— 0,130	0,0169
10	45	— 22,55	701,90	700,95	0,95	+ 0,292	0,0853
11	45	— 32,40	692,05	690,40	1,65	— 0,241	0,0581
12	45	— 42,85	681,60	679,95	1,65	— 0,063	0,0040
13	45	— 52,45	672,00	670,40	1,60	+ 0,150	0,0225
14	40	— 62,20	662,20	660,09	2,11	— 0,193	0,0372
15	40	0	724,40	723,68	0,72	+ 0,139	0,0183
			10829,69	10816,20	13,49	$\varepsilon = \pm 0{,}181$	0,4565
			721,98	721,08	0,90	$\varepsilon' = \pm 0{,}048$	

Zur Bestimmung der beiden Unbekannten b und c besitzen wir nach den Tafeln Nr 1, Nr 2, Nr 3 für die beiden Federbarometer Nr. I und II je 14 und für den Federbarometer Nr III sogar 15 beobachtete Werthe von o: wir haben also in allen drei Fällen einen grossen Ueberschuss von Beobachtungen und können daher auf die Berechnung von b und c die Methode der kleinsten Quadrate anwenden.

Nennen wir n die Zahl der mit jedem Aneroid angestellten Beobachtungen, [m], [o], [mm], [mo] die Summe aller m, o, mm, mo, und setzen wir die Fehler zwischen Rechnung und Beobachtung

$$v_1 = c + bm_1 - o_1 \; ; \; v_2 = c + bm_2 - o_2 \; ; \; v_3 = c + bm_3 - o_3 \text{ u. s. w.}$$

so ergeben sich nach bekannten Regeln aus der Summe der Fehlerquadrate, wenn man sie zuerst nach c und dann nach b ableitet und

jede Ableitung gleich Null setzt, die beiden Bestimmungsgleichungen

$$[m]\ b + nc = [o]$$
$$[mm]\ b + [m]c = [mo]$$

und aus diesen die Unbekannten

$$b = \frac{n\,[mo] - [m]\,[o]}{n\,[mm] - [m]\,[m]} \qquad (7)$$

$$c = \frac{[o]\,[mm] - [m]\,[mo]}{n\,[mm] - [m]\,[m]}\,. \qquad (8)$$

Führt man diese Gleichungen für alle in den drei ersten Tafeln dargestellten Beobachtungen aus, so ergibt sich für den Federbarometer

Nr I	die Correction	c = 1,373	und	der	Coefficient	b = 0,0151	
Nr II	„	„	c = 2,530	„	„	„	b = 0,0165 (9)
Nr III	„	„	c = 0,254	„	„	„	b = 0,0169.

Mit diesen Werthen von c und b lassen sich nunmehr die Summen $c + c' = c + bm$ berechnen und damit die in den vorletzten Spalten der Tafeln 1, 2, 3 enthaltenen Fehler v herstellen. So ist z. B. für die Beobachtung Nr 1 zum Aneroïd I die Summe $c + bm = 1{,}373 + 0{,}015\ (760 - 723{,}25) = 1{,}925$ und daher $v_1 = 1{,}925 - 2{,}160 = -0{,}235$; für die Beobachtung Nr 1 zum Aneroïd II ist die Summe $c + bm = 2{,}53 + 0{,}0165\ (760 - 723{,}33) = 3{,}117$ und daher $v_1 = 3{,}117 - 3{,}100 = 0{,}017$; und für die Beobachtung Nr 1 zum Aneroïd III ist die Summe $c + bm = 0{,}25 + 0{,}017\ (760 - 724{,}4) = 0{,}859$ und daher $v_1 = 0{,}859 - 0{,}800 = 0{,}059$. Die mittleren Fehler der ganzen Einzelbeobachtungen sind in den Tafeln mit ε und jene der arithmetischen Mittel von o mit ε' bezeichnet.

4. Die Theilungscorrection c'. Wenn man von den in den vorhergehenden drei Tafeln enthaltenen Summen o der Stand- und Theilungscorrectionen die Standcorrectionen c abzieht, so bleiben die beobachteten Werthe der Theilungscorrectionen c' übrig. Es ist somit (bei Abkürzung der Werthe von c auf zwei Decimalstellen, welche

erlaubt ist) für den Federbarometer

$$\begin{array}{lll} \text{Nr I die Theilungscorrection} & c' = o - 1{,}37 & \\ \text{Nr II} \quad ,, \quad ,, & c' = o - 2{,}53 & (10) \\ \text{Nr III} \quad ,, \quad ,, & c' = o - 0{,}25. & \end{array}$$

Stellt man diese Theilungscorrectionen aus den in den Tafeln Nr 1, Nr 2, Nr 3 enthaltenen Werthen von o her und trägt sie, wie in den Figuren 1, 2, 3 geschehen, als Ordinaten und die Barometerstände A_0 als Abscissen auf, so gibt jede Verbindungslinie der Ordinaten-Kopfpunkte ein Bild von dem Gange der Theilungscorrectionen durch die verschiedenen Stadien des Drucks, und man erkennt zugleich an jedem dieser Bilder, dass der Verlauf der genannten polygonalen Verbindungslinie durch die Gerade $c' = b(760 - A_0)$ im Wesentlichen dargestellt wird. Ich sage: im Wesentlichen, weil es allerdings auch möglich wäre, den polygonalen Zug durch eine sehr flache Curve auszugleichen. Durch eine solche Ausgleichung würde man jedoch nur die Berechnung der Theilungscorrectionen ohne Nutzen erschweren. Bleiben wir daher bei der Ausgleichungslinie $c' = b(760 - A_0)$ stehen und berechnen hieraus die Wärmecorrectionen, so begehen wir nach den vorstehenden Tafeln bei einer ganzen Beobachtung keinen grösseren mittleren Fehler als $\pm$ 0,16 bis 0,20^{mm}; einen kleineren darf man aber um so weniger erwarten, als eine ganze Beobachtung die Ablesung von zwei Barometern und zwei Thermometern in sich schliesst.

Dass in der That die mittleren Fehler ε, welche aus den Tafeln Nr 1, Nr 2, Nr 3 für die Summen der Stand- und Theilungscorrectionen $c + c'$ folgen, auch für die Theilungscorrectionen c' allein gelten, geht einfach daraus hervor, dass in beiden Fällen die Fehler v gleich gross werden; denn in dem ersten ist $v = c + b(760 - A_0) - o$ und in dem zweiten $v = b(760 - A_0) - (o - c) = c + b(760 - A_0)$. Fasst man die Summe der Fehlerquadrate aus den drei Tafeln zusammen, so beträgt diese für 43 ganze Beobachtungen 1,365 und hieraus berechnet sich ein mittlerer Fehler für jede solche Beobachtung von $\pm$ 0,18 Millimeter: man kann also den linearen Ausdruck (2) für die Theilungscorrection c' als hinreichend genau ansehen und bei allen Beobachtungen verwenden.

5. Die Wärmecorrectionen c''. Um die Grösse dieser Correctionen bei verschiedenen Temperaturen zu erfahren und zugleich den experimentellen Nachweis zu liefern, dassdiesel ben durch den in Gl. (3) gegebenen Ausdruck $c'' = -at$ berechnet werden können, habe ich die auf den Tafeln Nr 4, Nr 5, Nr 6 in ihren Ergebnissen dargestellten Beobachtungen gemacht. Dieselben waren so angeordnet, dass der Gefäss- und die Federbarometer des geodätischen Instituts des hiesigen Polytechnicums theils in theils vor meinem Arbeitszimmer in gleicher Höhenlage aufgestellt waren und folglich bei gleichem atmosphärischen Druck aber verschiedener Temperatur beobachtet werden konnten. Bei jeder dieser Beobachtungen, wie bei allen vorausgegangenen und nachfolgenden, wurden der Quecksilber- und die Federbarometer durch Klopfen mit der Hand erschüttert und jede Ablesung doppelt gemacht, das zweite Mal in der umgekehrten Reihenfolge: die Aufschreibungen sind das Mittel aus beiden, wenn eine kleine Differenz zwischen der ersten und zweiten Ablesung sich ergab. Da nach der allgemeinen Reductionsformel Gl. (4) die Wärmecorrection

$$c'' = -at = A_0 - (B + c + b(760 - A_0)) \qquad (11)$$

ist, so enthalten die Tafeln Nr 4, Nr 5, Nr 6, welche hier eingeschaltet sind, folgende Werthe:

A_0 den auf 0^0 reducirten Stand des Gefässbarometers,
B die Ablesung auf dem Federbarometer bei der Temperatur t,
B' den Aneroïdstand, welcher dem Druck 760^{mm} Qu. entspricht,
t die Temperatur des Instruments in Reaumur'schen Graden,
c'' die aus $760 - (B' + c)$ berechnete Wärmecorrection,
v die Abweichung zwischen der beobachteten und aus der Temperatur berechneten Wärmecorrection, d. i. die Differenz $c'' - at$, worin a stets negativ ist und t sowohl potitiv als negativ sein kann.

Die Werthe B, t, welche unmittelbare Beobachtungen sind, und die A_0, welche sich aus den Ablesungen des Stands und der Temperaturen des Gefässbarometers sofort ergeben, bedürfen keiner weiteren Erläuterung; die übrigen können jedoch nicht als selbstverständlich vorausgesetzt und müssen deshalb erläutert werden.

Tafel Nr 4.

Nach den Temperaturen geordnete Beobachtungen über die Wärmecorrectionen am Federbarometer Nr I.

Nr	1873	A_0	B	B′	t	c″	v	v^2
1	Dec 9	728,56	725,90	757,81	− 5,0	+ 0,82	+ 0,160	0,0256
2	„ 10	27,23	24,60	57,86	− 4,0	+ 0,77	+ 0,242	0,0586
3	„ 8	32,10	30,00	58,32	− 3,5	+ 0,31	− 0,152	0,0231
4	„ 8	32,75	30,80	58,46	− 2,0	+ 0,17	− 0,094	0,0088
5	„ 8	31,70	29,80	58,52	− 1,6	+ 0,11	− 0,101	0,0102
6	„ 11	28,10	26,50	58,88	− 1,0	− 0,25	− 0,382	0,1459
7	„ 8	32,70	31,10	58,81	0,0	− 0,18	− 0,180	0,0324
8	„ 21	23,25	21,20	58,50	+ 0,9	+ 0,13	+ 0,249	0,0620
9	„ 21	23,05	21,50	59,00	+ 1,8	− 0,37	− 0,132	0,0174
10	„ 21	23,25	21,60	58,90	+ 2,1	− 0,27	+ 0,007	0,0000
11	„ 6	22,30	20,65	58,72	+ 3,0	− 0,29	+ 0,106	0,0112
12	„ 6	23,00	21,80	59,26	+ 3,7	− 0,73	− 0,242	0,0586
13	„ 9	31,40	30,45	59,48	+ 4,7	− 0,85	− 0,230	0,0529
14	„ 15	25,30	24,00	59,22	+ 6,1	− 0,59	+ 0,215	0,0462
15	„ 31	20,20	19,00	59,40	+ 6,4	− 0,77	+ 0,075	0,0056
16	„ 31	20,15	19,05	59,50	+ 7,1	− 0,87	+ 0,067	0,0045
17	„ 31	20,05	19,05	59,60	+ 8,2	− 0,97	+ 0,112	0,0125
18	„ 31	20,00	19,15	59,75	+ 9,6	− 1,12	+ 0,147	0,0216
19	„ 31	20,10	19,20	59,70	+ 10,6	− 1,07	+ 0,329	0,1082
20	„ 31	19,95	19,30	59,95	+ 11,6	− 1,32	+ 0,211	0,0445
21	„ 9	29,45	29,20	60,21	+ 12,0	− 1,58	+ 0,004	0,0000
22	„ 7	31,70	31,45	60,17	+ 12,5	− 1,54	+ 0,110	0,0121
23	„ 7	30,20	30,00	60,25	+ 13,7	− 1,62	+ 0,188	0,0353
24	„ 7	31,50	31,65	60,58	+ 14,0	− 1,95	− 0,102	0,0104
25	„ 7	30,40	30,50	60,55	+ 14,5	− 1,92	− 0,006	0,0000
26	„ 28	15,80	15,80	60,66	+ 15,0	− 2,03	− 0,050	0,0025
27	„ 10	28,00	28,30	60,78	+ 15,3	− 2,15	− 0,130	0,0169
28	„ 10	27,00	27,60	61,10	+ 16,0	− 2,47	− 0,358	0,1282
29	„ 31	19,30	19,65	60,96	+ 17,5	− 2,33	− 0,020	0,0004
30	„ 31	19,30	19,60	60,91	+ 18,4	− 2,28	+ 0,149	0,0222
31	„ 31	19,30	20,00	61,31	+ 19,3	− 2,68	− 0,132	0,0174
32	„ 31	719,30	720,10	761,41	+ 20,1	− 2,78	− 0,127	0,0161
		725,20	724,33	759,64	247,0	− 32,67	$\varepsilon = \pm 0{,}181$	1,0113

Tafel Nr 5.

Nach den Temperaturen geordnete Beobachtungen über die Wärmecorrectionen am Federbarometer Nr II.

Nr	1873	A_0	B	B′	t	c″	v	v^2
1	Dec. 11	729,80	725,40	756,08	− 7,1	+ 1,39	+ 0,432	0,1866
2	„ 11	29,90	25,55	56,13	− 6,7	+ 1,34	+ 0,435	0,1892
3	„ 11	29,40	25,50	56,59	− 5,0	+ 0,88	+ 0,205	0,0420
4	„ 10	28,05	24,60	57,06	− 4,0	+ 0,41	− 0,130	0,0169
5	„ 8	32,10	29,00	57,35	− 3,6	+ 0,12	− 0,366	0,1340
6	„ 8	32,75	29,60	57,29	− 2,1	+ 0,18	− 0,104	0,0108
7	„ 8	31,70	28,80	57,55	− 1,7	− 0,08	− 0,309	0,0955
8	„ 8	32,70	29,90	57,64	− 0,4	− 0,17	− 0,224	0,0502
9	„ 8	31,77	28,90	57,57	0,0	− 0,10	− 0,100	0,0100
10	„ 10	26,93	23,80	57,40	+ 0,7	+ 0,07	+ 0,165	0,0272
11	„ 21	23,27	20,60	57,92	+ 2,1	− 0,45	− 0,166	0,0276
12	„ 21	23,33	20,60	57,86	+ 3,0	− 0,39	+ 0,015	0,0002
13	„ 10	27,23	24,80	58,09	+ 4,3	− 0,62	− 0,039	0,0015
14	„ 9	28,56	26,40	58,34	+ 5,0	− 0,87	− 0,195	0,0380
15	„ 14	27,63	25,50	58,39	+ 6,0	− 0,92	− 0,110	0,0121
16	„ 31	20,20	18,05	58,49	+ 6,7	− 1,02	− 0,115	0,0132
17	„ 31	20,15	17,60	58,09	+ 7,3	− 0,62	+ 0,366	0,1340
18	„ 31	20,00	17,75	58,39	+ 8,0	− 0,92	+ 0,160	0,0256
19	„ 31	20,00	17,95	58,59	+ 8,7	− 1,12	+ 0,055	0,0030
20	„ 31	20,10	18,20	58,74	+ 9,4	− 1,27	− 0,001	0,0000
21	„ 31	19,95	17,95	58,64	+ 10,1	− 1,17	+ 0,194	0,0376
22	„ 31	19,70	18,00	58,94	+ 11,1	− 1,47	+ 0,029	0,0008
23	„ 7	31,70	30,45	59,20	+ 12,5	− 1,73	− 0,042	0,0018
24	„ 7	30,20	28,95	59,23	+ 13,7	− 1,76	+ 0,090	0,0081
25	„ 7	31,15	29,85	59,16	+ 14,8	− 1,69	+ 0,309	0,0955
26	„ 31	19,30	18,40	59,15	+ 15,8	− 2,28	− 0,147	0,0216
27	„ 31	19,30	18,45	59,80	+ 16,2	− 2,33	− 0,162	0,0262
28	„ 31	19,30	18,55	59,90	+ 17,0	− 2,43	− 0,135	0,0182
29	„ 31	19,30	18,70	60,05	+ 18,5	− 2,58	− 0,082	0,0067
30	„ 31	719,30	718,80	760,15	+ 20,2	− 2,68	+ 0,047	0,0022
		728,83	723,22	758,26	180,5	− 24,28	$\varepsilon = \pm 0{,}206$	1,2363

Tafel Nr 6.

Nach den Temperaturen geordnete Beobachtungen über die Wärmecorrectionen am Federbarometer Nr III.

Nr	1873	A_0	B	B′	t	c″	v	v^2
1	Dec. 10	727,23	725,69	759,01	− 7,5	+ 0,74	− 0,220	0,0484
2	„ 11	29,80	28,05	58,75	− 6,5	+ 1,00	+ 0,168	0,0282
3	„ 10	27,55	26,05	59,04	− 5,4	+ 0,71	+ 0,019	0,0004
4	„ 9	28,56	27,30	59,27	− 4,8	+ 0,48	− 0,134	0,0180
5	„ 9	29,45	28,10	59,16	− 3,6	+ 0,59	+ 0,129	0,0166
6	„ 9	29,37	28,50	59,64	− 2,4	+ 0,11	− 0,197	0,0388
7	„ 15	25,43	24,60	59,75	− 1,8	0,00	− 0,230	0,0529
8	„ 8	32,70	32,00	59,76	− 0,2	− 0,01	− 0,036	0,0013
9	„ 22	24,40	23,60	59,79	0,0	− 0,04	− 0,040	0,0016
10	„ 22	24,40	23,80	59,99	+ 1,0	− 0,24	− 0,112	0,0125
11	„ 13	29,45	28,75	59,81	+ 2,0	− 0,06	+ 0,196	0,0384
12	„ 15	25,10	24,40	59,88	+ 2,9	− 0,13	+ 0,241	0,0581
13	„ 12	29,63	29,20	60,10	+ 3,8	− 0,35	+ 0,136	0,0185
14	„ 31	20,20	19,85	60,31	+ 4,6	− 0,56	+ 0,029	0,0008
15	„ 13	29,57	29,60	60,54	+ 5,6	− 0,79	− 0,073	0,0053
16	„ 15	25,43	25,45	60,60	+ 6,0	− 0,85	− 0,082	0,0067
17	„ 13	29,85	30,05	60,70	+ 7,2	− 0,95	− 0,028	0,0008
18	„ 31	20,00	19,90	60,57	+ 8,8	− 0,82	+ 0,306	0,0936
19	„ 31	19,90	19,95	60,72	+ 9,6	− 0,97	+ 0,259	0,0671
20	„ 31	19,90	20,15	60,92	+ 10,2	− 1,17	+ 0,136	0,0185
21	„ 31	19,70	20,30	61,27	+ 11,9	− 1,52	+ 0,003	0,0000
22	„ 7	31,70	32,75	61,52	+ 12,8	− 1,77	− 0,132	0,0174
23	„ 7	31,50	32,90	61,88	+ 14,2	− 2,13	− 0,312	0,0973
24	„ 7	31,80	33,10	61,77	+ 15,3	− 2,02	− 0,062	0,0038
25	„ 31	19,30	20,50	61,88	+ 17,0	− 2,13	+ 0,046	0,0021
26	„ 31	19,30	20,60	61,98	+ 17,5	− 2,23	+ 0,010	0,0001
27	„ 31	19,40	20,85	62,13	+ 19,0	− 2,38	+ 0,052	0,0027
28	„ 31	719,40	721,05	762,33	+ 20,1	− 2,58	− 0,007	0,0000
		725,72	725,61	760,47	157,3	−20,07	$\varepsilon = \pm 0{,}155$	0,6499

Zunächst kann man fragen, warum c'' nicht aus der vorstehenden Formel Nr 11 berechnet oder statt B' nicht der Werth von $B + c + b(760 - A_0) = B''$ in den Tafeln angegeben wurde, durch dessen Subtraction von A_0 sofort c'' erhalten worden wäre. Darauf ist zu antworten, dass der Werth von B' deshalb berechnet wurde, weil erstens, wenn man am Meere oder bei 760 mm Druck beobachten könnte, der Werth B' die Ablesung am Federbarometer und c'' ohneweiters die Differenz $760 - (B' + c)$ wäre, und dann, weil zweitens die Berechnung von B' nicht umständlicher als die von B'' ist, indem B' die Summe $B + (1 + b)(760 - A_0)$ und B'' die Summe $B + b(760 - A_0)$ vorstellt, wie sofort aus Gl. (11) folgt, wenn man auf deren rechter Seite die Zahl 760 einmal addirt und einmal subtrahirt.

Der Fehler v ist der Unterschied zwischen dem beobachteten Werthe der Wärmecorrection c'' und dem berechneten, also $v = c'' - at$. In der vierten Tafel ist bei Nr 1 der beobachtete Werth $c'' = + 0{,}82^{mm}$, der berechnete $at = - 0{,}132 \cdot - 5{,}0 = 0{,}66^{mm}$ und folglich der Fehler $v_1 = 0{,}82 - 0{,}66 = + 0{,}16$. In der fünften Tafel ist bei Nr 11 der beobachtete Werth von $c'' = - 0{,}45^{mm}$, der berechnete $at = - 0{,}135 \cdot + 2{,}1 = - 0{,}284^{mm}$ und folglich der Fehler $v_{11} = - 0{,}450 + 0{,}284 = - 0{,}166^{mm}$. In der sechsten Tafel endlich ist bei Nr 7 der beobachtete Werth $c'' = o$ und der berechnete $at = -0{,}128 \cdot - 1{,}8 = 0{,}230^{mm}$ und folglich $v_7 = o - 0{,}230 = - 0{,}230^{mm}$.

Trägt man die in den Tafeln Nr 4, Nr 5, Nr 6 enthaltenen beobachteten Wärmecorrectionen c'', wie es in den Figuren 4, 5, 6 geschehen, als Ordinaten und die entsprechenden Instrumententemperaturen als Abscissen auf, so gibt die Verbindungslinie der Kopfpunkte der Ordinaten ein Bild von dem Fortschreiten der genannten Correctionen mit den Temperaturen der Federbarometer, und man erkennt sofort aufs Bestimmteste, dass sich diese Verbindungslinie längs der Geraden erstreckt, welche durch die Gleichung $c'' + at = o$ vorgestellt wird. Die Abweichungen der beobachteten Zickzacklinie von dieser Geraden sind durch die Werthe von v in den vorletzten Spalten der drei Tafeln Nr 4, Nr 5, Nr 6 gegeben, aus denen sich die mittleren Fehler einer ganzen Beobachtung beziehungsweise zu $\pm 0{,}181$, $\pm 0{,}206$ und $\pm 0{,}155^{mm}$ berechnen. Fasst man alle auf diesen drei Tafeln verzeichneten 90 Be-

obachtungen zusammen, so beträgt deren Fehlerquadratsumme 2,8975 und der hieraus berechnete mittlere Fehler einer einzigen ganzen Beobachtung $\pm$ 0,18 Millimeter, ein Werth, welcher mit dem mittleren Fehler der Theilungscorrectionen (Seite 40) ganz übereinstimmt und so klein ist, dass man anerkennen muss: es gibt keine bessere Ausgleichung der Wärmecorrectionen als durch die Gerade $c'' + at = o$ und es ist folglich der hieraus entspringende Werth dieser Verbesserungen $c'' = -at$ für alle Fälle hinreichend genau.

6. Der Wärmecoefficient a, welcher einem Federbarometer angehört, ergibt sich aus den mit dem letzteren angestellten Beobachtungen dadurch, dass man die diesen Beobachtungen entsprechenden Gleichungen

$$c_1'' = -at_1 \qquad c_2'' = -at_2 \qquad c_3'' = -at_3 \text{ u. s. w.}$$

addirt und aus der Summengleichung $[c''] = -a[t]$ den mittleren Werth von

$$a = -\frac{[c'']}{[t]} \tag{12}$$

berechnet.

Will man den mittleren Fehler ε der Werthe von a finden, so braucht man nur die Fehler v in den vorletzten Spalten der Tafeln Nr 4 bis Nr 6 mit der Temperatur t und folglich jene von v^2 mit t^2 zu dividiren und die Summe der Fehlerquadrate $\left[\frac{vv}{tt}\right]$ herzustellen, aus der sich sofort ε ergibt. Bezeichnet man nämlich die Fehler in der Bestimmung des Wärmecoefficienten a mit v', d. h. setzt man v' gleich dem beobachteten Werthe von a weniger dem berechneten, also

$$v' = \frac{c''}{t} - \frac{[c'']}{[t]} \tag{13}$$

so sieht man sofort ein, das $v't = v$ wird, da nach der in II, 5 (S. 41) gegebenen Definition der Fehler

$$v = c'' - \frac{[c'']}{[t]} \tag{14}$$

ist. Bei der Herstellung der Fehlerquadrate v'^2 durch Division der Quadrate v^2 mit t^2 ergibt sich nur bei $t = 0^0$ eine Schwierigkeit, indem hier v' und somit auch v'^2 unendlich gross würde, wenn man ohne weitere Ueberlegung mechanisch dividiren wollte. Die Temperatur 0^0 R oder 0^0 C ist bekanntlich keine Null im mathematischen Sinne, da man sie ja auch durch $+ 32^0$ F etc. bezeichnen kann, es muss sich also die erwähnte Schwierigkeit umgehen lassen. Dieses könnte nun durch Anwendung eines anderen Temperaturmasses geschehen; es genügt aber auch, sich daran zu erinnern, dass der Wärmecoefficient a nichts weiter ist als die Aenderung des Barometerstandes B für 1^0 Temperaturänderung, wenn alle übrigen Umstände sich gleich bleiben; mit anderen Worten, dass der Temperaturcoefficient a die Wärmecorrection für $\pm 1^0$ R[1]) ist.

Hieraus folgt von selbst, dass für Temperaturen $\pm 1^0$ R die Fehler v und v' in den Wärmecorrectionen und den Temperaturcoefficienten einander gleich sind, und dass man folglich auch bei der Temperatur des schmelzenden Eises den Fehler v' im Temperaturcoefficienten a gleich dem in der Wärmecorrection c'' setzen darf. Die oben angegebene Regel, dass v' erhalten wird, wenn man v durch t dividirt, erleidet also nur in dem Falle eine Ausnahme, wo t null ist und der Coefficient a unter der Form $\frac{0}{0}$ erscheint.

Berechnet man mit Rücksicht auf diese Bemerkungen aus den Tafeln Nr 4 bis Nr 6 die Quadratsummen $[v'v']$, so betragen diese nacheinander 0,27061 ; 0,15651 ; 0,06307 und man findet demnach für den Federbarometer

Nr I	den	Coefficienten	$a = -0{,}132 \pm 0{,}016$	
Nr II	„	„	$a = -0{,}135 \pm 0{,}013$	(15)
Nr III	„	„	$a = -0{,}128 \pm 0{,}009.$	

Hieraus ist zu entnehmen, dass die Werthe von a vermöge ihrer mittleren Fehler in einander übergreifen und daher den Schluss nahe legen,

1) Die Reaumur'sche Scala ist hier beibehalten, weil sie an den meisten zum Beobachten verwendeten Instrumenten angebracht und es selbstverständlich ist, dass aus ihr der Coefficient a für jede andere Scala leicht berechnet werden kann, indem er sich mit der Grösse der Grade ändert.

dass sich bei gleich grossen und sonst gleich beschaffenen Aneroïden mit Schablonenscalen die Temperaturcoefficienten nicht oder nur unbedeutend von einander unterscheiden. Dieses und das in den Formeln (9) enthaltene Ergebniss veranlassten mich zu der weiteren Untersuchung:

III. Ob für Naudet'sche Federbarometer von gleicher Beschaffenheit auch die Wärme- und Theilungs-Coefficienten unter sich gleich sind.

Theoretisch genommen, d. i. unter Voraussetzung völliger Gleichheit der Materialien und der Form und Grösse aller gleichnamigen Constructionstheile mehrerer Aneroïde, kann die vorliegende Frage nur bejaht werden; vom practischen Standpunkte aus wird aber jeder Beobachter dagegen einwenden, wie ich es mir gegenüber selber gethan habe, dass die gleichzeitige Erfüllung aller dieser Bedingungen unwahrscheinlich ist und von einem Instrumente nicht verlangt werden kann das höchstens hundert Reichsmark kostet.

Fordern kann man diese Eigenschaft gewiss nicht, wenn sie aber in Folge tausendfältiger Anfertigung eines und desselben Gegenstands in demselben bis zu einem hinreichenden Grade wirklich vorhanden ist, so darf sie auch eines practischen Bedenkens wegen nicht übersehen werden. Die Werthe, welche in den Formeln (9) für b und in (15) für a erhalten wurden, zeigen unter sich eine solche Uebereinstimmung, dass ich mich, wie schon bemerkt, veranlasst fand, diese Uebereinstimmung an den hier in Rede stehenden drei Naudet'schen Aneroïden in folgender Weise noch weiter zu untersuchen.

1. Der Wärmecoefficient a. Hat man eine grössere Reihe von gleichzeitigen Beobachtungen bei gleichem Luftdruck aber verschiedener Temperatur an zwei gleich hoch gelegenen Aneroïden gemacht, so gilt für jedes solche Paar von Beobachtungen jene Gleichung, welche die auf 0^0 reducirten Barometerstände A_0 (die aber hier nicht beobachtet zu sein brauchen) einander gleich setzt. Bezeichnen

B_1 , B_2 , B_3 .... die am Aneroïd Nr I abgelesenen Barometerstände,
t_1 , t_2 , t_3 .... die zugehörigen Temperaturen des Instruments,
B'_1 , B'_2 , B'_3 .... die am Aneroïd Nr II abgelesenen Barometerstände u.
t'_1 , t'_2 , t'_3 .... die zugehörigen Angaben des Instrumenthermometers,

so finden zunächst nach Gl (5), in der a schon sein negatives Vorzeichen hat, die folgenden Beziehungen statt, wobei auf beiden Seiten jeder Gleichung das die Theilungscorrection vorstellende Glied $b(760 - A_0)$ weggelassen ist[1]):

$$\begin{array}{rcl} B_1 + c_1 - at_1 & = & B'_1 + c_2 - at'_1 \\ B_2 + c_1 - at_2 & = & B'_2 + c_2 - at'_2 \\ B_3 + c_1 - at_3 & = & B'_3 + c_2 - at'_3 \\ B_4 + c_1 - at_4 & = & B'_4 + c_2 - at'_4 \\ \vdots & & \vdots \end{array} \qquad (16)$$

Zieht man nach einander die zweite, dritte, vierte, nte Gleichung von der ersten ab, so erhält man folgende Zusammenstellung von Gleichungen:

$$\begin{array}{rcl} B_1 - B_2 + B'_2 - B'_1 & = & a(t_1 - t_2 + t'_2 - t'_1) \\ B_1 - B_3 + B'_3 - B'_1 & = & a(t_1 - t_3 + t'_3 - t'_1) \\ B_1 - B_4 + B'_4 - B'_1 & = & a(t_1 - t_4 + t'_4 - t'_1) \\ B_1 - B_5 + B'_5 - B'_1 & = & a(t_1 - t_5 + t'_5 - t'_1) \\ \vdots & & \vdots \end{array} \qquad (17)$$

Die Summe dieser $n - 1$ Gleichungen findet sich leicht, wenn man zu ihnen, und zwar als erste die identische Gleichung $B_1 - B_1 + B'_1 - B'_1 = a(t_1 - t_1 + t'_1 - t'_1)$ addirt; es wird dann

$$n(B_1 - B'_1) + [B'] - [B] = a\left\{n(t_1 - t'_1) + [t'] - [t]\right\} \qquad (18)$$

1) Setzt man voraus, dass für das zweite Aneroïd derselbe Werth von b gilt wie für das erste, so sind die Theilungscorrectionen auf beiden Seiten jeder der Gleichungen (16) einander vollständig gleich; wäre aber das b des zweiten Aneroïds von dem des ersten etwas verschieden, so würde doch die Differenz beider Correctionen im ungünstigen Falle nur einige Hundertel eines Millimeters betragen.

wobei die eckigen Klammern wie in den Ausgleichungsrechnungen Summenzeichen vorstellen. Setzt man

$$\begin{aligned} [B] - [B'] &= nR \\ [t] - [t'] &= nT \end{aligned} \qquad (19)$$

so ergibt sich aus der Gleichung (18) der absolute Werth des Wärmecoefficienten

$$a = \frac{B_1 - B_1' - R}{t_1 - t_1' - T} \qquad (20)$$

und es sind dabei alle Beobachtungen einmal und nur die erste (Nr 1) ist zweimal benützt. In gleicher Weise kann man die zweite, dritte, vierte, nte zweimal und alle übrigen einmal benützen, indem man den Buchstaben B und t nach und nach die Marken 2, 3, 4 ... n ertheilt, R und T aber unverändert lässt. Man kann demnach aus n ganzen Beobachtungen auch n Werthe von a berechnen, welche alle um etwas weniges von einander und von ihrem arithmetischen Mittel abweichen werden.

In der nachfolgenden Tafel Nr 7 habe ich die von mir gemachten Beobachtungen zur Bestimmung des den Federbarometern Nr I und Nr II gemeinsamen Wärmecoefficienten a zusammengestellt und diesen Coefficienten nach der vorstehenden Formel (20) berechnet. In derselben bedeuten B , B' die Stände und t , t' die Temperaturen, welche an den Aneroïden I und II abgelesen wurden; a ist der absolute Werth des Wärmecoefficienten, um den es sich hier allein handelt; wo der qualitative Werth dieses Coefficienten in Betracht kommt, ist er mit dem Vorzeichen minus zu versehen. Die Grösse v ist der Unterschied zwischen dem Mittel aller a, das 0,134 beträgt und dem beobachteten a, also bei der ersten Beobachtung $v = 0{,}134 - 0{,}141 = -0{,}007$. Nach der Summe der Fehlerquadrate berechnet sich der mittlere Fehler eines jeden der in der siebenten Spalte enthaltenen a auf $\varepsilon = \pm 0{,}039$ und der Fehler des arithmetischen Mittels 0,134 auf $\varepsilon' = \pm 0{,}0088$.

Tafel Nr 7.

Beobachtungen zur Bestimmung des den Federbarometern Nr I und Nr II gemeinsamen Temperatur-Coefficienten a.

Nr	1873	B	B′	t	t′	a	v	v^2
1	Dec. 2	731,45	728,40	+ 12,0	— 2,0	0,141	— 0,007	0,000049
2	„ 2	31,75	28,45	+ 13,8	— 1,9	0,148	— 0,014	0,000196
3	„ 3	31,80	28,45	+ 13,6	— 2,4	0,152	— 0,018	0,000324
4	„ 3	31,75	28,40	+ 14,6	— 2,0	0,112	+ 0,022	0,000484
5	„ 3	31,75	28,40	+ 14,4	— 1,6	0,152	— 0,018	0,000324
6	„ 3	30,55	27,65	+ 13,0	0,0	0,148	— 0,014	0,000196
7	„ 3	30,40	27,40	+ 12,8	0,0	0,062	+ 0,072	0,005184
8	„ 3	30,15	27,25	+ 12,5	— 0,5	0,148	— 0,014	0,000196
9	„ 3	30,45	27,00	+ 14,9	— 1,7	0,156	— 0,022	0,000484
10	„ 3	30,40	27,00	+ 15,1	— 1,5	0,134	0,000	0,000000
11	„ 5	29,90	26,55	+ 14,6	— 1,4	0,152	— 0,018	0,000324
12	„ 5	29,60	26,50	+ 14,0	— 1,0	0,010	+ 0,124	0,015376
13	„ 5	27,90	25,05	+ 12,9	0,0	0,173	— 0,039	0,001521
14	„ 9	29,10	26,60	+ 14,6	+ 4,7	0,135	— 0,001	0,000001
15	„ 9	28,80	26,40	+ 15,1	+ 5,0	0,165	— 0,031	0,000961
16	„ 10	27,35	24,80	+ 14,9	+ 4,3	0,147	— 0,013	0,000169
17	„ 10	27,65	23,55	+ 16,0	— 3,6	0,152	— 0,018	0,000324
18	„ 10	28,30	24,60	+ 15,3	— 4,0	0,137	— 0,003	0,000009
19	„ 11	28,25	25,40	+ 4,3	— 7,1	0,084	+ 0,050	0,002500
20	„ 11	728,30	725,75	+ 4,3	— 6,7	0,164	— 0,030	0,000900
		724,775	721,682	13,135	— 1,170	0,134	$\varepsilon = \pm 0{,}039$	0,029522
		R = + 3,093		T = + 14,305			$\varepsilon' = \pm 0{,}009$	

Die Tafel Nr 8 stellt die Beobachtungen zur Bestimmung des den Federbarometern Nr II und III gemeinsamen Temperaturcoefficienten a dar. Die Spalten B und t gehören zu Nr II, B′ und t′ zu Nr III; a, v, v^2 sind wie vorhin aus den beobachteten Ständen und Temperaturen berechnet. Der absolute Werth des arithmetischen Mittels aller a beträgt hier 0,128 mit einem mittleren Fehler $\varepsilon' = \pm 0{,}0071$.

Tafel Nr 8.

Beobachtungen zur Bestimmung des den Federbarometern Nr II und Nr III gemeinsamen Temperatur-Coefficienten a.

Nr	1873	B	B'	t	t'	a	v	v^2
1	Dec. 9	726,60	728,50	+ 4,7	— 2,4	0,113	+ 0,015	0,000225
2	„ 9	26,40	28,30	+ 5,0	— 4,8	0,096	+ 0,032	0,001024
3	„ 10	25,10	25,95	+ 4,3	— 7,5	0,139	— 0,011	0,000121
4	„ 10	24,85	26,05	+ 4,4	— 5,4	0,132	— 0,004	0,000016
5	„ 11	25,80	29,60	+ 3,4	+ 12,6	0,173	— 0,045	0,002025
6	„ 12	27,20	31,10	+ 3,5	+ 14,4	0,099	+ 0,029	0,000841
7	„ 12	26,30	30,00	+ 3,8	+ 12,5	0,141	— 0,013	0,000169
8	„ 12	27,20	31,05	+ 3,8	+ 14,2	0,099	+ 0,029	0,000841
9	„ 10	23,80	27,30	— 3,6	+ 3,8	0,160	— 0,032	0,001024
10	„ 10	24,60	28,05	— 4,0	+ 3,1	0,162	— 0,034	0,001156
11	„ 11	25,70	30,65	— 6,4	+ 15,0	0,100	+ 0,028	0,000784
12	„ 11	25,50	30,50	— 5,0	+ 14,4	0,122	+ 0,006	0,000036
13	„ 31	18,20	23,10	— 5,1	+ 16,5	0,095	+ 0,033	0,001089
14	„ 31	18,20	23,70	— 3,3	+ 19,0	0,133	— 0,005	0,000025
15	„ 31	718,00	724,20	— 4,1	+ 20,1	0,161	— 0,033	0,001089
		724,23	727,87	0,093	8,366	0,128	$\varepsilon = \pm 0{,}027$	0,010475
		R = — 3,64		T = — 8,273			$\varepsilon' = \pm 0{,}007$	

Die so gefundenen Werthe von a für die Federbarometer I und II und für die II und III greifen in einander über, indem der erstere 0134 ± 0,009 und der letztere 0,128 ± 0,007 beträgt, in dem einen Falle also der Werth 0,123 eben so wahrscheinlich ist als in dem anderen der Werth 0,135. Hienach dürfte kaum mehr zu bezweifeln sein, dass die drei Aneroïde der geodätischen Sammlung des Polytechnicums in München einerlei Temperaturcoefficienten haben, und dass dafür ein aus den bisherigen Bestimmungen (Gl. 15, Taf. Nr 7, Taf. Nr 8) mit Rücksicht auf deren Gewichte berechneter Mittelwerth, nämlich für 1^0 R

$$a = -\ 0{,}1315 \pm 0{,}0058 \text{ mm} \qquad (21)$$

gesetzt werden darf. Für 1^0 C würde selbstverständlich $a = -0{,}105$ mm werden.

2. Der Theilungscoefficient b lässt sich aus ähnlichen Formeln, wie wir sie eben für a entwickelt und benützt haben, finden. Sowie die Bestimmung von a unabhängig von b zu machen war, so muss auch die von b unabhängig von a sein: daraus folgt, dass die zur Berechnung von b dienenden Beobachtungen bei der Temperatur 0^0 oder nahe an dieser Grenze angestellt werden müssen. Wir können daher die am 21. und 22. December 1873 ausgeführten und schon in den drei ersten Tafeln benützten Versuche hier wiederholt verwenden, zumal sie eine grosse Abwechslung in den Barometerständen gewähren. Bezeichnen

A_1 , A_2 , A_3 ... die auf 0^0 reducirten Stände des Normalbarometers,
B_1 , B_2 , B_3 ... die zu diesen Ständen und 0^0 Temperatur gehörigen Ablesungen am Aneroïd Nr I,
A'_1 , A'_2 , A'_3 ... die auf 0^0 reducirten Normalbarometerstände, denen die bei 0^0 gemachten Ablesungen
B'_1 , B'_2 , B'_3 ... am Aneroïd Nr II entsprechen,

so bestehen nach Gl (5) zwischen diesen Grössen folgende Beziehungen:

$$\begin{aligned}
B_1 + c_1 + b(760 - A_1) - A_1 &= B'_1 + c_2 + b(760 - A'_1) - A'_1 \\
B_2 + c_1 + b(760 - A_2) - A_2 &= B'_2 + c_2 + b(760 - A'_2) - A'_2 \\
B_3 + c_1 + b(760 - A_3) - A_3 &= B'_3 + c_2 + b(760 - A'_3) - A'_3 \\
B_4 + c_1 + b(760 - A_4) - A_4 &= B'_4 + c_2 + b(760 - A'_4) - A'_4 \\
&\vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots
\end{aligned} \tag{22}$$

Zieht man von der ersten dieser Gleichungen nacheinander die zweite, dritte, vierte, nte ab, so ergibt sich folgendes System von Gleichungen:

$$\begin{aligned}
B_1 - B_2 - B'_1 + B'_2 &= (1+b)(A_1 - A_2 - A'_1 + A'_2) \\
B_1 - B_3 - B'_1 + B'_3 &= (1+b)(A_1 - A_3 - A'_1 + A'_3) \\
B_1 - B_4 - B'_1 + B'_4 &= (1+b)(A_1 - A_4 - A'_1 + A'_4) \\
B_1 - B_5 - B'_1 + B'_5 &= (1+b)(A_1 - A_5 - A'_1 + A'_5) \\
&\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots
\end{aligned} \tag{23}$$

Denkt man sich zu diesen n — 1 Gleichungen noch die identische Gleichung

$$B_1 - B_1 - B_1' + B_1' = (1 + b)(A_1 - A_1 - A_1' + A_1')$$

als nte und zwar an erster Stelle hinzugefügt, so ist die Summe aller dieser Gleichungen und folglich auch der n—1 Gleichungen Nr 23:

$$n(B_1 - B_1') + [B'] - [B] = (1 + b)\{n(A_1 - A_1') + [A'] - [A]\} \quad (24)$$

wobei wieder die eckigen Klammern Summenzeichen vorstellen.

Setzt man ähnlich wie in (19) die Differenz

$$\begin{aligned} [B] - [B'] &= n\,R \\ [A] - [A'] &= n\,S \end{aligned} \quad (25)$$

so folgt aus Gl (24) der Werth von

$$b = \frac{B_1 - B_1' - R}{A_1 - A_1' - S} - 1. \quad (26)$$

Tafel Nr 9.

Beobachtungen zur Bestimmung des den Federbarometern Nr I und Nr II gemeinsamen Theilungs-Coefficienten b.

Nr	1873	A	A′	B	B′	b	v	v²
1	Dec 21	723,25	762,95	721,09	760,39	0,0205	— 0,003	0,000009
2	,, ,,	733,65	772,65	731,98	770,30	0,0135	+ 0,004	0,000016
3	,, ,,	742,67	781,90	741,11	779,70	0,0145	+ 0,003	0,000009
4	,, ,,	752,60	723,25	750,95	720,32	0,0027	+ 0,015	0,000225
5	,, ,,	711,50	683,67	709,76	679,65	0,0378	— 0,020	0,000400
6	,, ,,	701,55	672,82	699,25	668,94	0,0129	+ 0,005	0,000025
7	,, ,,	691,50	723,27	688,85	720,34	0,0295	— 0,012	0,000144
8	,, ,,	760,88	723,33	759,77	720,23	0,0207	— 0,003	0,000009
9	,, ,,	770,75	732,53	769,79	729,64	0,0188	— 0,001	0,000001
10	,, ,,	782,70	742,63	781,28	739,84	0,0042	+ 0,013	0,000169
11	,, ,,	723,05	752,53	721,28	749,75	0,0066	+ 0,011	0,000121
12	,, ,,	681,30	713,20	678,72	709,72	0,0096	+ 0,008	0,000064
13	,, ,,	672,10	702,25	669,34	699,05	0,0258	— 0,008	0,000064
14	,, ,,	723,25	693,77	721,34	689,85	0,0269	— 0,009	0,000081
		726,482	727,197	724,608	724,123	0,0174	$\varepsilon = \pm 0{,}008$	0,000937
		S = — 0,715		R = + 0,485			$\varepsilon' = \pm 0{,}002$	

Tafel Nr 10.

Beobachtungen zur Bestimmung des den Federbarometern Nr II und III gemeinsamen Theilungs-Coefficienten b.

Nr	1873	A	A′	B	B′	b	v	v²
1	Dec 21 u 22	762,95	724,40	760,39	723,60	0,0121	+ 0,004	0,000016
2	„ „	772,65	731,25	770,30	730,50	0,0156	+ 0,000	0,000000
3	„ „	781,90	740,75	779,70	740,50	0,0059	+ 0,010	0,000100
4	„ „	723,25	750,57	720,32	750,03	0,0070	+ 0,009	0,000081
5	„ „	683,67	712,00	679,65	710,80	0,0196	− 0,004	0,000016
6	„ „	672,82	701,90	668,94	700,95	0,0224	− 0,007	0,000049
7	„ „	723,27	692,05	720,34	690,40	0,0341	− 0,019	0,000361
8	„ „	723,33	760,24	720,23	760,00	0,0166	− 0,001	0,000001
9	„ „	732,53	770,83	729,64	770,83	0,0168	− 0,001	0,000001
10	„ „	742,63	781,00	739,84	780,82	0,0103	+ 0,005	0,000025
11	„ „	752,53	724,50	749,75	723,65	0,0102	+ 0,006	0,000036
12	„ „	713,20	681,60	709,72	679,95	0,0126	+ 0,003	0,000009
13	„ „	702,25	672,00	699,05	670,40	0,0226	− 0,007	0,000049
14	„ „	693,77	662,20	689,85	660,09	0,0134	+ 0,002	0,000004
		727,20	721,81	724,11	720,89	0,0157	$\varepsilon = \pm 0{,}0075$	0,000748
		S = + 5,39		R = + 3,22			$\varepsilon' = \pm 0{,}002$	

In dem Ausdrucke für b sind, wie in jenem für a (Nr 20), alle Beobachtungen nur einmal, die erste aber ist zweimal benützt. Verfährt man mit allen folgenden Beobachtungen wie hier mit der ersten, indem man nach und nach deren Marken 1 in 2, 3, 4 ... n übergehen lässt, so erhält man aus n ganzen Beobachtungen auch n Werthe von b.

Zu den vorstehenden beiden Tafeln ist nur wenig zu bemerken. In Nr 9 bezeichnet A den auf 0^0 reducirten Stand des Normalbarometers, bei welchem das Aneroïd Nr I die Ablesung B gab, und A′ den wie vorhin reducirten Normalbarometerstand, welcher zur Ablesung B′ auf dem Aneroïd Nr II gehörte; in Tafel Nr 10 sind dagegen die Stände, welche hier mit A′ und B′ bezeichnet sind, unter A und B vorgetragen, während dort die zum Aneroïd Nr III gehörigen accentuirt sind. Aus

den Bemerkungen zu den Tafeln Nr 1 bis Nr 3, ist schon bekannt, dass die Stände B und B' nicht vollständig direct abgelesen sind, sondern die Temperaturcorrection mit einschliessen, welche deshalb nöthig waren, weil die Aneroïde die Temperatur 0^0 nicht während der ganzen Dauer der Beobachtungen beibehielten. Der Fehler v ist in beiden Tafeln gleich der Differenz zwischen dem Mittelwerthe und jedem Einzelwerthe des Theilungscoefficienten b.

Während diesen aus je 14 ganzen Beobachtungen hervorgegangenen Einzelwerthen ein mittlerer Fehler von $\pm$ 0,0085 und $\pm$ 0,0076 zukommt, haben die arithmetischen Mittel von b in Tafel Nr 9 und Nr 10 mittlere Fehler von nur $\pm$ 0,0023 und $\pm$ 0,0020; gleichwohl greifen die gefundenen Werthe von b in Folge ihrer mittleren Fehler in einander über, und es kann daher auch gestattet werden, für unsere drei Aneroïde aus den bisherigen fünf Bestimmungen des Theilungscoefficienten b [vergl. Gl (9) und die Tafeln Nr 9 und Nr 10] einen Mittelwerth

$$b = + 0{,}016 \pm 0{,}002 \qquad (27)$$

zu berechnen und bei späteren Reductionen anzuwenden.

IV. Mittelbare Bestimmung der Standcorrection eines Federbarometers durch Vergleichung mit einem Aneroïd von gleicher Beschaffenheit.

Die unmittelbare Bestimmung der Standcorrection c eines Naudet'schen Federbarometers erfordert immer besondere Hilfsapparate und ist daher in jedem Falle umständlich, in vielen nicht ausführbar. Wenn man dagegen ein Normalaneroïd, d. i. einen sehr guten und vollständig berichtigten Federbarometer besitzt, so kann man durch Vergleichung desselben mit einem gleichbeschaffenen Aneroïd sehr leicht dessen Constante c bestimmen. Denn nach der im vorigen Abschnitt geführten Untersuchung dürfen unter dieser Voraussetzung die Wärmecoefficienten a und die Theilungscoefficienten b beider Instrumente als unter sich gleich betrachtet werden; beobachtet man nun beide Aneroïde unter gleichem Luftdrucke bei gleicher Temperatur, so werden auch die Theilungscorrectionen c' und die Wärmecorrectionen c'' unter sich

gleich und es liefert daher jede ganze Beobachtung eine Gleichung von der Form

$$B_1 + c_1 = B_2 + c_2 \qquad (28)$$

worin B_1 die Ablesung und c_1 die Standcorrection des einen und B_2 die Ablesung und c_2 die Standcorrection des anderen Federbarometers ist. Hieraus ergibt sich somit die Constante des letzteren

$$c_2 = c_1 + B_1 - B_2 \qquad (29)$$

auf die einfachste Weise. Ob auch mit hinreichender Genauigkeit, sollen die nachfolgenden Beobachtungen beweisen.

Tafel Nr II.

Nach den Temperaturen geordnete Beobachtungen über die Differenzen der Standcorrectionen der drei Federbarometer Nr I, II, III.

Nr	1873	t	B_1	B_2	B_3	Δ_1	Δ_2	$v_1^2 + v_2^2$
1	Dec 31	+ 18,5	719,90	718,70	720,90	1,20	— 1,00	0,027909
2	„ 6	+ 15,2	24,80	23,80	26,10	1,00	— 1,30	0,047809
3	„ 5	+ 14,8	27,50	26,30	28,50	1,20	— 1,00	0,027909
4	„ 6	+ 14,6	22,10	21,10	23,50	1,00	— 1,40	0,084809
5	„ 7	+ 14,5	30,50	29,40	31,70	1,10	— 1,20	0,006409
6	„ 7	+ 13,7	30,00	28,90	31,30	1,10	— 1,30	0,023409
7	„ 7	+ 12,5	31,45	30,45	32,75	1,00	— 1,30	0,047809
8	„ 14	+ 6,0	26,70	25,50	27,80	1,20	— 1,10	0,005009
9	„ 14	+ 5,9	28,60	27,40	29,60	1,20	— 1,00	0,027909
10	„ 14	+ 5,8	27,30	26,00	28,40	1,30	— 1,10	0,020609
11	„ 9	+ 4,8	29,75	28,45	30,70	1,30	— 0,95	0,062609
12	„ 9	+ 4,5	30,20	29,40	30,85	0,80	— 0,65	0,403609
13	„ 9	+ 4,5	30,75	29,50	31,80	1,25	— 1,05	0,019309
14	„ 13	+ 4,5	28,80	27,50	30,00	1,30	— 1,20	0,018609
15	„ 13	+ 4,5	28,50	27,20	29,90	1,30	— 1,40	0,071609
16	„ 21	0,0	21,10	20,20	22,40	0,90	— 1,30	0,092209
17	„ 15	— 1,7	23,60	22,30	24,60	1,30	— 1,00	0,043609
18	„ 10	— 3,3	26,00	24,50	27,35	1,50	— 1,35	0,141809
19	„ 10	— 4,1	25,80	24,50	27,20	1,30	— 1,40	0,071609
20	„ 10	— 5,1	725,70	724,50	726,00	1,20	— 1,30	0,019009
		+ 6,505	726,955	725,780	728,075	+ 1,172	— 1,165	1,263580
								$\varepsilon = \pm 0{,}18$
								$\varepsilon' = \pm 0{,}04$

Im Dezember 1873 habe ich die vielfach hier genannten Federbarometer Nr I , Nr II , Nr III bei gleicher Temperatur und gleichem Luftdruck verglichen. Die Temperaturen wechselten zwischen + 18,5° und − 5,1° R, die Barometerstände von 719,5^{mm} bis 731,7^{mm} Quecksilber. In der vorstehenden Tafel Nr 11 sind die Ablesungen mit B_1 , B_2 , B_3 und die Differenzen der Standcorrectionen mit Δ_1 und Δ_2 bezeichnet, und zwar ist

$$\Delta_1 = c_2 - c_1 \text{ und } \Delta_2 = c_3 - c_1 . \qquad (30)$$

Die letzte Spalte enthält sofort die Summe der Fehlerquadrate von $v_1 = 1{,}172 - \Delta_1$ und $v_2 = -1{,}165 - \Delta_2$. Der mittlere Fehler einer einzigen Beobachtung $\varepsilon = \pm 0{,}18^{mm}$ ist somit aus 40 Beobachtungen bestimmt, während der Fehler des arithmetischen Mittels $\varepsilon' = \pm 0{,}04^{mm}$ nur aus der Hälfte dieser Beobachtungen berechnet wurde.

Vergleicht man die hier gefundenen mittleren Differenzen

$$\Delta_1 = 1{,}172 \text{ und } \Delta_2 = -1{,}165$$

mit jenen, welche sich aus den früher bestimmten Werthen der Constanten c_1 , c_2 , c_3 ergeben (Gl. 9), nämlich mit

$$\Delta'_1 = 1{,}157 \text{ und } \Delta'_2 = -1{,}119$$

und bedenkt, dass die in Gleichung 9 dargestellten Constanten aus nur je 14 oder 15 ganzen Beobachtungen hervorgingen, so entsprechen die Unterschiede $\Delta_1 - \Delta'_1$ und $\Delta_2 - \Delta'_2$ nahezu dem eben bestimmten mittleren Fehler des arithmetischen Mittels, und man kann folglich die Constanten c_2 und c_3 aus c_1 und je 20 Beobachtungen bis auf $\pm 0{,}04^{mm}$ genau finden, während der Coefficient $a_3 = a_2 = a_1$ und $b_3 = b_2 = b_1$ ist.

V. Ueber die Bestimmung kleiner Höhenunterschiede mit Hilfe von Federbarometern.

In neuester Zeit werden, wie ich schon im Eingange bemerkt habe, die Naudet'schen Aneroïdbarometer vorzugsweise zu technischen Nivellirungen, durch die man ausgedehnte Terrainstrecken in Bezug

auf ihre Tauglichkeit für die Anlagen von Strassen und Eisenbahnen untersucht, angewendet. Es ist daher wichtig auf Grund zuverlässiger Vergleichungen zu wissen, wie genau man mässige Höhenunterschiede auf diesem Wege ermitteln kann. Ich habe deshalb den bereits im Jahre 1872 angestellten Beobachtungen, worüber die vierte Auflage meiner „Elemente der Vermessungskunde“ (Bd. I, S. 410 bis 417 und Bd. II, S. 342 bis 348) berichtet, im Herbste 1873 neue hinzugefügt, welche über die Genauigkeit technischer Nivellemente weiteren und wohl auch ausreichenden Aufschluss gewähren.

1. Zunächst benützte ich meinen Landaufenhalt im Bade Adelholzen bei Traunstein in Oberbayern dazu, die vorher direct gemessene Höhe meines Wohnzimmers im zweiten Stock über dem Erdgeschosse zu messen. Der Höhenunterschied zwischen der Oberfläche eines an der Hausthüre des Hauptgebäudes befindlichen Tisches und der Oberfläche einer im Zimmer stehenden Commode, worauf der Federbarometer Nr I bei den Beobachtungen abwechselnd lag, wurde mittelst einer lothrecht aufgestellten Feuerleiter und eines metallenen Bandmasses = 6,91^{m} gefunden; die Lufttemperatur gab ein im Schatten frei hängender Thermometer an; das Aneroïd blieb fortwährend in seinem Gehäuse und wurde an dessen Riemen von einer Station zur anderen getragen; bei jeder Beobachtung habe ich die Trägheit der Nadel durch Klopfen auf den Glasdeckel überwunden.

In der Tafel Nr 12 sind zunächst die Ablesungen an der unteren und oberen Station (B , t), mit ihren Reductionen auf die Temperatur des schmelzenden Eises (A_0), dann die Luftwärme T, welche für beide Stationen gleich war, und die hieraus berechneten Höhenunterschiede (h) mit ihren Abweichungen (v) vom arithmetischen Mittel (7,024) und deren Quadrate (v^2) enthalten. Die Berechnung der Höhen h erfolgte nach den bekannten Formeln

$$u = \log A_0 - \log A_0' \text{ und } \log h = A + \log u$$

in welchen A der aus meiner ersten hypsometrischen Tafel (Vierte Auflage der Elemente der Vermessungskunde, S. 498) mit dem Eingange $T + t = 2\ T^0\ R$ zu entnehmende Logarithme des Products 18405 mal $(1 + 0{,}0029\ (T + t))$ Meter ist. Der von der Breite ψ her-

rührende Factor der Barometerformel hat hier auf das Ergebniss der Rechnung ebensowenig Einfluss als jener, welcher der mit der Höhe sich ändernden Schwerkraft Rechnung trägt; daher sind beide weggelassen.

Tafel Nr 12.

Beobachtungen über die Bestimmung kleiner Höhenunterschiede mit Hilfe von Federbarometern, ausgeführt zu Adelholzen im September 1873.

Nr	1873	Tageszeit	Untere Station			Obere Station			Luft-Temp.	h	v	v^2
			B	t	A_0	B'	t'	A_0'	T			
	Sept.											
1	19	8	709,00	12,8	709,47	708,20	12,8	708,69	9,0	9,178	— 2,154	4,6397
2	„	10	10,00	15,0	10,17	09,40	15,0	09,58	10,3	6,974	+ 0,050	0,0025
3	„	12	10,50	13,0	10,92	09,70	13,0	10,13	12,2	9,407	— 2,383	5,6787
4	„	1	10,75	13,3	11,13	10,00	13,2	10,40	12,5	8,701	— 1,677	2,8123
5	„	3	11,10	12,5	11,57	10,50	12,5	10,98	11,3	6,991	+ 0,033	0,0011
6	„	5	11,90	14,8	12,08	11,40	14,5	11,61	10,2	5,539	+ 1,485	2,2052
7	20	8	14,50	12,2	14,96	13,70	12,0	14,20	11,1	8,956	— 1,932	3,7326
8	„	10	14,50	12,5	14,92	13,90	12,3	14,36	12,2	6,630	+ 0,394	0,1552
9	„	2	14,50	16,6	14,39	13,90	15,5	13,94	16,1	5,423	+ 1,601	2,5632
10	21	8	12,90	12,5	13,35	12,20	12,3	12,69	10,8	7,785	— 0,761	0,5791
11	„	10	13,00	14,0	13,26	12,40	13,8	12,69	15,2	6,853	+ 0,171	0,0292
12	„	12	13,00	14,8	13,16	12,50	14,7	12,67	16,0	5,912	+ 1,112	1,2365
13	„	2	12,90	16,9	12,78	12,15	16,9	12,05	16,2	8,821	— 1,797	3,2292
14	22	7	11,90	14,4	12,12	11,20	14,2	11,45	11,5	7,941	— 0,917	0,8409
15	24	7	11,00	10,3	11,77	10,45	10,3	11,22	6,5	6,379	+ 0,645	0,4160
16	„	9	11,25	12,0	11,79	10,75	12,0	11,30	7,0	5,696	+ 1,328	1,7636
17	„	11	11,70	10,2	12,46	11,10	10,1	11,89	7,6	6,639	+ 0,385	0,1482
18	„	4	13,00	13,7	13,30	12,35	13,6	12,66	8,5	7,473	— 0,449	0,2016
19	25	7	13,35	9,0	14,25	12,55	9,0	13,46	4,0	9,030	— 2,006	4,0240
20	„	9	13,75	10,4	14,46	13,30	10,4	14,02	7,0	5,094	+ 1,930	3,7249
21	„	10	13,75	10,4	14,46	13,30	10,4	14,02	7,5	5,105	+ 1,919	3,6826
22	26	7	13,00	8,5	13,98	12,50	8,6	13,46	6,0	5,999	+ 1,025	1,0506
23	„	9	13,45	10,7	14,06	13,00	11,8	13,55	7,5	5,922	+ 1,102	1,2144
24	„	5	12,00	11,8	12,56	11,50	12,0	12,04	8,0	6,064	+ 0,960	0,9216
25	27	9	10,65	10,3	11,42	10,00	10,1	10,81	8,9	7,157	— 0,123	0,0151
26	„	10	10,65	10,3	11,42	10,00	10,4	10,77	9,0	7,627	— 0,603	0,3636
27	„	2	09,35	11,0	10,05	08,90	11,0	09,61	12,0	5,241	+ 1,783	3,1791
28	„	6	709,40	12,7	709,88	708,70	12,7	709,19	9,2	8,121	— 1,097	1,2034
			712,026	12,38	712,505	711,412	12,32	711,909	10,12	70,24	$\varepsilon = \pm 1{,}35^{m}$	49,6141
											$\acute{\varepsilon} = \pm 0{,}26^{m}$	

Aus der vorstehenden Tafel ergibt sich nun ein Mittelwerth von $h = 7{,}02^m$, während die directe Messung $h = 6{,}91^m$ lieferte. Die Summe der Fehlerquadrate liefert den mittleren Fehler einer ganzen Beobachtung $\varepsilon = \pm 1{,}35^m$ und den Fehler des arithmetischen Mittels $\varepsilon' = \pm 0{,}26^m$.

2. In dem vorliegenden Falle hätte die Reduction der Aneroïdablesungen B , B' auf die Temperatur 0^0 erspart werden können, da erstens alle Beobachtungen mit einem und demselben Instrumente und in so kurzer Aufeinanderfolge gemacht wurden, dass die Temperaturen t , t', welche unten und oben stattfanden, fast ohne Ausnahme gleich blieben oder nur um Ablesungsfehler verschieden waren. Denn schreibt man die Reductionsformeln nach Gl. (5) an, wie sie sich für das Instrument Nr I an zwei ungleich hohen Stationen ergeben, nämlich

$$A_0 = B + c_1 + b(760 - A_0) - at$$
$$A_0' = B' + c_1 + b(760 - A_0') - at'$$

so hat man, da nicht blos die Temperatur-, sondern auch die Theilungs-Correctionen einander gleich sind (letztere deshalb, weil $A_0 - A_0'$ nur etwa $0{,}6^{mm}$ beträgt), $A_0 - A_0' = B - B'$ und somit auch den Bruch

$$\frac{A_0 - A_0'}{A_0'} = \frac{B - B'}{A_0'} = \frac{B - B'}{B' + 0{,}5} = \frac{(B - B')(B' - 0{,}5)}{B'B'} .$$

Hieraus ergibt sich mit Rücksicht darauf, dass $B' = 711{,}4^{mm}$ ist und folglich für $B' - 0{,}5^{mm}$ gesetzt werden kann,

$$\frac{A_0}{A_0'} = \frac{B}{B'} \text{ und } u = \log\frac{A_0}{A_0'} = \log\frac{B}{B'} . \qquad (32)$$

In der That wird, wenn man mit den in der Tafel Nr 12 stehenden Mittelwerthen $B = 712{,}03$; $B' = 711{,}41$; $2T = 20{,}24^0$ R rechnet, der Höhenunterschied $h = 7{,}14^m$, während er sich aus den Einzelwerthen von A_0 und A_0' im Mittel zu $7{,}02^m$ ergab.

3. Die beste Gelegenheit zu Vergleichungen barometrischer Höhenmessungen mit genau bestimmten Höhenpunkten bieten die Präcisionsnivellemente der europäischen Gradmessung dar. Ich habe dieselben daher auf den Linien München-Rosenheim-Salzburg und München-Landshut-Regensburg für meinen gegenwärtigen Zweck benützt, und zwar in der Weise, dass ich nur an einzelnen Stationen, namentlich den Endstationen, an den mit gusseisernen Platten versehenen und in meinen drei Mittheilungen über „das bayerische Präcisionsnivellement“ mit ⊙ bezeichneten Fixpunkten, ausserdem aber im Eisenbahnwagen, in bestimmter Höhe über der Schienenoberfläche, folglich auch in genau bekannter Meereshöhe beobachtete. Der Federbarometer lag während der Fahrt auf gepolstertem Sitze neben mir; die Ablesungen am Zeiger und Thermometer (B und t) erfolgten auf jeder Station, sobald der Zug ganz stille stand und das Instrument durch Anklopfen etwas erschüttert war; die Lufttemperatur (T) wurde ausserhalb der Station dadurch gemessen, dass ich einen besonderen grösseren Thermometer längere Zeit im Schatten zum Fenster hinaushielt und beim Hereinziehen ablas. In München und Regensburg hatte ich Control-Beobachtungen angeordnet, welche bei den Berechnungen der Barometerstände in Betracht gezogen wurden, insoferne meine eigenen Beobachtungen am Aneroïde Nr I nicht selbst sichere Aufschlüsse gaben über die Luftdrucks-Aenderungen, welche während der Fahrt stattfanden.

4. Von Adelholzen aus nahm ich am 26. September 1873 ein Nivellement der Eisenbahnstationen zwischen Bergen und Salzburg mit dem Federbarometer Nr I vor. Auf der Station Bergen beobachtete ich zunächst am Fixpunkt ⊙ Nr 838 des bayerischen Präcisionsnivellements, dann im Eisenbahnwagen (W), in Traunstein am Fixpunkt ⊙ Nr 844 und in Salzburg am Fixpunkt ⊙ Nr 877 und im Eisenbahnwagen, an allen übrigen Stationen nur im Eisenbahnwagen. Dasselbe geschah auf der Rückfahrt, welche nach dritthalbstündigem Aufenthalte in Salzburg erfolgte. Jeder Punkt wurde also zweimal beobachtet und die hiebei erhaltenen Ablesungen sind in der nachstehenden Tafel Nr 13 enthalten.

In dieser Tafel stellen die „Coten“ die Abstände des Federbarometers vom Generalhorizont des bayerischen Präcisionsnivellements vor, der

Tafel Nr 13.

Nivellement der Eisenbahnstationen zwischen Bergen und Salzburg, mit dem Federbarometer Nr I am 26. September 1873 ausgeführt.

Nr	Station		Cote	Zeit	T	B	t	A_0	A_0'	A_0''	v	v^2
			m	h								
1	Bergen . .	⊙	272,40	10,30	10,0	719,30	15,8	719,23		719,23	0,00	0,0000
2	„ . .	W	274,67	10,45	10,3	19,45	15,6	19,40		19,44	— 0,04	0,0016
3	Traunstein .	⊙	262,14	11,00	11,0	18,45	15,0	18,49		18,36	+ 0,13	0,0169
4	Lauter . .	W	253,08	11,30	11,5	17,40	14,5	17,52		17,58	— 0,06	0,0036
5	Teisendorf .	W	354,24	12,00	12,0	26,30	15,0	26,23		26,23	0,00	0,0000
6	Freilassing .	W	438,76	12,15	12,2	33,45	15,3	33,23	733,30	33,53	— 0,23	0,0529
7	Salzburg .	W	436,52	12,30	12,5	33,25	15,7	32,98	33,13	33,34	— 0,21	0,0441
8	„ .	⊙	435,84	12,50	12,5	33,20	15,7	32,93	33,16	33,30	— 0,14	0,0196
9	„ .	⊙	435,84	2,30	12,5	32,70	15,7	32,44	33,18	33,30	— 0,12	0,0144
10	„ .	W	436,52	3,00	12,5	32,70	15,7	32,44	33,33	33,34	— 0,01	0,0001
11	Freilassing .	W	438,76	3,15	12,5	32,90	16,0	32,60	33,56	33,53	+ 0,03	0,0009
12	Teisendorf .	W	354,24	3,45	12,0	25,50	16,8	25,21	26,33	26,25	+ 0,08	0,0064
13	Lauter . .	W	253,08	4,15	11,2	16,70	17,0	16,51	17,77	16,60	+ 0,17	0,0289
14	Traunstein .	⊙	262,15	4,30	11,0	17,15	16,8	16,98	18,31	18,38	— 0,07	0,0049
15	Bergen . .	W	274,67	4,45	10,5	18,00	16,5	17,86	19,26	19,46	— 0,20	0,0400
16	„ . .	⊙	272,40	5,00	10,3	717,90	16,5	717,75	719,23	719,25	— 0,02	0,0004
					11,53	724,65	15,85	724,49		725,07	$\varepsilon = \pm 0{,}126^{mm}$	0,2447
											$\varepsilon' = \pm 1{,}554^{m}$	

nahezu 862^m über dem mittleren Spiegel der Ostsee liegt. Will man also die Meereshöhe der Station haben, so darf man nur die Cote von 862 abziehen: der Rest ist jene Höhe in Metern. In der dritten Spalte sind die Zeitpuncte enthalten, in denen beobachtet wurde, und in den folgenden vier Spalten die Lufttemperatur T, der Stand B des Aneroids, die Instrumenten-Temperatur t, und die auf 0^0 reducirten Aneroïd-Ablesungen A_0. Mit A_0' habe ich diejenigen Werthe bezeichnet, in welche A_0 zu Folge der während der Fahrt eingetretenen allgemeinen Luftdrucksänderung überging, und unter A_0'' sind diejenigen auf 0^0 reducirten Barometerstände verstanden, welche den wirklichen Höhenunterschieden der nivellirten Stationen dann entsprechen, wenn man für den Ausgangspunkt (hier Bergen ⊙) $A_0'' = A_0$ annimmt. Ueber die Herleitung der Werthe A_0' und A_0'' sei noch Folgendes bemerkt.

In Salzburg wurde während des Zeitraums von $12^h\,50'$ bis $2^h\,30'$, also in 100 Minuten, am Fixpunkte ⊙ Nr 877 ein Fallen des Barometers von 732,93 auf 732,44, d. i. von $0{,}49^{mm}$ beobachtet; in Bergen zeigte sich bei der Ankunft am Fixpunkte ⊙ Nr 838, dass der Barometer im Ganzen um $719{,}23 - 717{,}75 = 1{,}48^{mm}$ gefallen war. Wann das Fallen begonnen hat, lässt sich unter der Voraussetzung, dass es zwischen dem unbekannten Anfang bis um 5^h Abends gleichmässig stattgefunden habe, dadurch finden, dass man sagt: wenn 100 Minuten nothwendig waren, um ein Sinken des Barometerstandes von 0,49 Millimeter zu bewirken, so werden x Minuten nothwendig gewesen sein, um ein Sinken von 1,48 Millimeter eintreten zu lassen. Aus dieser Proportion ergibt sich x = 302 Minuten = 5 Stunden und 2 Minuten: man kann also annehmen, dass das allgemeine Fallen des Barometerstands um 12 Uhr begonnen habe, und dass demnach die Differenz von $1{,}48^{mm}$ auf die 5 Stunden von 12^h bis 5 Uhr gleichmässig zu vertheilen sei. Diess gibt auf jede Stunde eine Verbesserung von $0{,}296^{mm}$, auf jede Viertelstunde von $0{,}074^{mm}$, auf je 5 Minuten von $0{,}025^{mm}$ u. s. w. Wäre das allgemeine Sinken des Barometerstands nicht eingetreten, so würden alle Angaben des Aneroïds von Teisendorf (d. i. von 12 Uhr an) um so viel grösser ausgefallen sein, als die Correction beträgt, diese ist daher in dem vorliegenden Falle zu addiren, wie es auch bei den Beobachtungen Nr 6 bis Nr 16 geschehen ist.

Mit den Beobachtungen Nr 8 und Nr 9 in Salzburg, welche das allgemeine Sinken des Barometerstands nachweisen, stimmen auch die Controlbeobachtungen in München insoferne überein, als dort auch erst von 12 Uhr an ein merkliches Fallen des Normalbarometers im geodätischen Cabinet des Polytechnicums eintrat. Lägen diese beiden Beobachtungen nicht vor, so bliebe nichts anderes übrig, als die in Bergen beobachtete Differenz der Barometerstände von $1{,}48^{mm}$ auf die ganze Beobachtungsreihe, d. i. auf die Zeit von $10^h\,30'$ bis 5^h statt von 12^h bis 5^h gleichmässig zu vertheilen, was allerdings die Fehler $v = A_0' - A_0''$ nicht unwesentlich geändert und den mittleren Fehler der einzelnen ganzen Beobachtung jedenfalls vergrössert hätte.

Auf den ersten Blick kann es auffallend erscheinen, dass ich aus den unter A_0 und bezw. A_0' dargestellten Baromerständen und den

Lufttemperaturen T nicht die Coten der einzelnen Stationen berechnet und deren Abweichungen von den in der zweiten Spalte durch das Präcisionsnivellement gegebenen Coten bestimmt habe, bei näherer Ueberlegung findet man jedoch, dass sich der mittlere Beobachtungsfehler, um den es sich bei Genauigkeitsbestimmungen allein handelt, eben so gut aus der Differenz der einander entsprechenden Barometerstände als aus dem Unterschiede der zusammengehörigen Coten finden lässt; und da man weiter findet, dass der erstere Weg etwas schneller zum Ziele führt, so wird man auch dessen Wahl billigen.

Die unter A_0'' zusammengestellten Barometerstände wurden in folgender Weise aus einander berechnet. Angenommen, der Meereshöhe der unteren Station entspreche ein Barometerstand A_0^u und jener der oberen Station der Stand A_0^0, die Cotendifferenz beider Stationen sei $= h$ und die Summe der Lufttemperaturen $T_u + T_0$, so ist zunächst

$$\log u = \log h - A$$

zu berechnen, da h aus der Spalte 2 und $T_u + T_0$, womit man den Logarithmus A aus der ersten hypsometrischen Tafel findet, aus Spalte 4 bekannt ist. Sucht man die zu log u gehörige Zahl u, so ist weiter

$$u = \log A_0^u - \log A_0^0$$

und es kommt nun darauf an, ob A_0^u oder A_0^0 gegeben und deshalb A_0^0 oder A_0^u zu suchen ist: in dem ersten Falle hat man $\log A_0^0 = \log A_0^u - u$ und in dem zweiten $\log A_0^u = \log A_0^0 + u$ zu berechnen. Soll beispielsweise Bergen W aus Bergen ⊙ berechnet werden, so ist hier $h = 2{,}27^m$, $T_u + T_0 = 20{,}3^0 R$, $A = 4{,}28578$, $A_0^0 = 719{,}23$ gegeben, folglich $\log u = 6{,}07024 - 10$, $u = 0{,}000118$, $\log A_0^u = 2{,}85699$ und $A_0^u = 719{,}44$.

Will man aus dem mittleren Fehler der Barometerstände ($\varepsilon = \pm 0{,}126^{mm}$) jenen der Höhenunterschiede berechnen, so handelt es sich hier lediglich noch darum, zu finden, welche Höhendifferenz einem Unterschied der Barometerstände von $0{,}126^{mm}$ entspricht, und zwar bei dem Mittel der Stände $724{,}49^{mm}$ und der Lufttemperaturen $11{,}5^0$, welche zur Zeit der

Beobachtungen geherrscht haben. Nun ist hier $A_0^o = 724{,}49$, $A_0^u = 724{,}62$, $T_u + T_0 = 23^0$ R , folglich A = 4,28835 , log u = 5,90309 − 10 und somit die Höhendifferenz h = $1{,}554^m$, daher der zu ε gehörige mittlere Fehler $\varepsilon' = \pm 1{,}55^m$; das von mir am 26. September 1873 ausgeführte Nivellement der Eisenbahnstationen zwischen Bergen und Salzburg gibt also die einzelnen Stationshöhen bis auf $\pm 1{,}55^m$ genau an. Dieser mittlere Fehler ist folglich nur um $0{,}2^m$ grösser als der, welcher unter günstigeren Umständen bei den auf Tafel Nr 12 dargestellten Messungen sich ergab.

5. Auf meiner Rückreise von Adelholzen nach München am 30. September 1873 nivellirte ich mit dem Federbarometer Nr I von Bergen aus sämmtliche Eisenbahnstationen genau in derselben Weise wie vier Tage vorher auf der Fahrt nach Salzburg. Die Ergebnisse dieser Beobachtungen und der dazu gehörigen Rechnungen sind in Tafel Nr 14 zusammengestellt, und ich habe hierüber weiter nichts zu bemerken als dass in dem vorliegenden Falle Verbesserungen der auf 0^0 reducirten Barometerstände A_0 nicht nothwendig waren, da nach den in München geführten Controlbeobachtungen an jenem Tage der atmosphärische Druck sich nicht merklich änderte. Es ist desshalb auch in Tafel Nr 14 die Spalte A_0', welche in der vorhergehenden Tafel nothwendig war, als überflüssig weggelassen worden. Die mittleren Fehler in Druck- und Höhendifferenz, nämlich $\varepsilon = \pm 0{,}128^{mm}$ und $\varepsilon' = \pm 1{,}551^m$, stimmen nahezu mit denen der vorigen Beobachtungen überein: dass aber hier zu einem etwas grösseren ε ein etwas kleineres ε' sich ergibt, rührt davon her, dass die mittlere Lufttemperatur bei den Beobachtungen am 30. September 16^0 R, am 26. September dagegen nur $11{,}5^0$ R betrug.

6. Bei Gelegenheit einer Dienstesreise in Sachen der Europäischen Gradmessung führte ich am 7. und 10. October 1873 ein barometrisches Nivellement der Eisenbahnstationen zwischen München und Landshut und am 8. und 10. October zwischen Landshut und Regensburg aus. Die Ergebnisse dieser Beobachtungen sind in den nachfolgenden Tafeln Nr 15 und Nr 16 enthalten, zu denen nur wenig zu bemerken ist, da das Beobachtungs- und Rechnungs-Verfahren mit dem am 26. und 30. Sept.

Tafel Nr 14.

Nivellement der Eisenbahnstationen von Bergen bis München, ausgeführt mit dem Federbarometer Nr I am 30. September 1873.

Nr	Station		Cote	Zeit	T	B	t	A_0	A_0''	v	v^2
			m	h '	0	p		mm	mm		
1	Bergen	⊙	272,40	11,15	14,5	715,85	15,0	715,93	715,93	0,00	0,0000
2	„	W	274,80	11,30	14,5	16,00	15,1	16,07	16,13	— 0,06	0,0036
3	Uebersee . . .	W	332,93	11,45	15,0	21,05	16,2	20,89	20,95	— 0,06	0,0036
4	Bernau	W	334,90	12,15	16,2	21,55	18,0	21,16	21,06	+ 0,10	0,0100
5	Prien	W	328,95	12,30	16,5	20,95	18,2	20,54	20,56	— 0,02	0,0004
6	Endorf	W	334,72	12,45	16,2	21,45	18,6	20,98	21,12	— 0,14	0,0196
7	Stephanskirchen .	W	379,55	1,00	16,8	25,40	19,0	24,82	24,74	+ 0,08	0,0064
8	Rosenheim . . .	W	413,06	1,15	17,0	28,20	19,2	27,67	27,64	+ 0,03	0,0009
9	„ . . .	⊙	413,06	1,20	17,0	28,10	19,2	27,45	27,68	— 0,23	0,0529
10	„ . . .	W	413,06	1,30	17,0	28,05	19,3	27,39	27,46	— 0,07	0,0049
11	Carolinenfeld . .	W	390,42	2,00	16,3	25,95	19,2	25,34	25,48	— 0,14	0,0196
12	Ostermünchen . .	W	357,03	2,15	16,2	22,90	19,6	22,28	22,53	— 0,25	0,0625
13	Assling	W	350,80	2,20	16,0	22,40	19,6	21,79	21,76	+ 0,03	0,0009
14	Grafing	W	317,27	2,30	16,0	19,65	19,6	19,08	18,98	+ 0,10	0,0100
15	Kirchseeon . .	W	298,99	2,45	15,9	18,20	20,0	17,60	17,55	+ 0,05	0,0025
16	Zorneding . . .	W	302,07	3,00	16,2	18,35	19,6	17,80	17,86	— 0,06	0,0036
17	Haar	W	318,20	3,15	16,5	19,65	20,0	19,03	19,14	— 0,11	0,0121
18	Trudering . . .	W	332,25	3,20	16,0	20,75	20,0	20,11	20,20	— 0,09	0,0081
19	Haidhausen . .	W	328,58	3,30	16,0	20,40	19,6	19,19	19,80	+ 0,02	0,0004
20	Thalkirchen . .	W	335,64	3,45	16,1	20,75	19,8	20,14	20,41	— 0,27	0,0729
21	München . . .	⊙	338,64	4,00	16,0	721,45	19,8	720,82	720,15	+ 0,17	0,0289
					16,09	721,76	18,79	721,24	721,31	$\varepsilon = \pm^{mm}0{,}128$	0,3238
										$\varepsilon' = \pm^{m}1{,}551$	

auf den Strecken Bergen-Salzburg und Bergen-München befolgten völlig übereinstimmte. Die Coten der Eisenbahnstationen, aus denen sich die Höhenlage des Aneroïds Nr I im Eisenbahnwagen ergab, sind noch nicht veröffentlicht, liegen aber berechnet vor und werden nächstens in den Abhandlungen der hiesigen K. Akademie der Wissenschaften erscheinen unter dem Titel: „Das bayerische Präcisionsnivellement. Dritte Mittheilung von C. M. Bauernfeind."

Tafel Nr 15.

Nivellement der Eisenbahnstationen von München bis Landshut und zurück, ausgeführt mit dem Federbarometer Nr I am 7. und 10. October 1873.

Nr	Station		Cote	Zeit	T	B	t	A_0	A_0'	A_0''	v	v^2
				7. Oct h ′	0							
1	München .	⊙	338,64	3,55	18,0	717,55	18,0	717,22	717,22	717,22	0,00	0,0000
2	Feldmoching	W	364.36	4, 5	17,5	20,05	19,2	19,53	19,58	19,35	+ 0,23	0,0529
3	Schleissheim	W	376,00	4,15	17,2	20,15	19,5	19,58	19,78	19,73	+ 0,05	0,0025
4	Lohhof . .	W	388,72	4,25	16,9	21,20	20,0	20,57	20,87	20,94	— 0,07	0,0049
5	Neufahrn .	W	397,92	4,40	16,5	22,00	19,8	21,37	21,82	21,73	+ 0,09	0,0081
6	Freising . .	⊙	413,72	5,00	15,7	23,40	19,6	22,77	23,09	23,12	— 0,03	0,0009
7	Langenbach	W	431,02	5,15	14,2	24,65	19,0	24,08	24,48	24,74	— 0,26	0,0676
8	Moosburg .	W	445,38	5,30	13,1	25,70	18,6	25,16	25,63	25,93	— 0,30	0,0900
9	Bruckberg .	W	453,15	5,45	12,8	26,40	18,5	25,87	26,42	26,55	— 0,13	0,0169
10	Landshut .	⊙	469,17	6, 5	12,2	28,00	17,6	27,56	728,21	27,98	+ 0,23	0,0529
				10 Oct								
11	Landshut .	⊙	469,17	3,00	9,5	31,30	12,5	31,47		31,47	0,00	0,0000
12	Bruckberg .	W	453,15	3,15	9,4	30,00	12,6	30,18		30,16	+ 0,02	0,0004
13	Moosburg .	W	445,38	3,30	9,2	29,45	12,5	29,66		29,52	+ 0,14	0,0196
14	Langenbach	W	431,02	3,45	9,0	28,05	12,3	28,30		28,43	— 0,13	0,0169
15	Freising . .	⊙	413,72	4,00	9,0	26,40	12,2	26,68		26,82	— 0,14	0,0196
16	Neufahrn .	W	397,92	4,15	9,0	25,10	12,0	25,44		25,33	+ 0,11	0,0121
17	Lohhof . .	W	388,72	4,30	9,0	24,20	12,0	24,55		24,62	— 0,07	0,0049
18	Schleissheim	W	376,00	4,40	8,8	23,20	12,0	23,55		23,42	+ 0,13	0,0169
19	Feldmoching	W	364,36	4,45	8,8	22,00	11,8	22,40		22,56	— 0,16	0,0256
20	München .	⊙	338,64	5,00	8,8	719,75	12,0	720,16		720,17	— 0,01	0,0001
					12,23	724,43	15,59	724,31		724,49	$\varepsilon = \pm \overset{mm}{0,147}$	0,4128
											$\varepsilon' = \pm \overset{m}{1,76}$	

Aus der Tafel Nr 15 ersieht man, dass für die Beobachtungen am 7. October eine Verbesserung der Barometerstände A_0 nothwendig war, da an diesem Tage nach den Controlbeobachtungen in München der allgemeine Luftdruck von 4 bis 6 Uhr Nachmittags um 0,6 mm fiel, was auf eine Stunde 0,3 mm und auf 10 Minuten 0,05 mm, daher von 3h 55′ bis 6h 5′ oder in 2h 10′ im Ganzen 0,65 mm ausmacht. Hienach ist die Spalte A_0'' für die Beobachtungen Nr 1 bis 10 berechnet.

Tafel Nr 16

Nivellement der Eisenbahnstationen von Landshut bis Regensburg und zurück, ausgeführt mit dem Federbarometer Nr I am 8. und 10. October 1873.

Nr	Station		Cote	Zeit	T	B	t	A_0	A_0''	v	v^2
			m	8. Oct h ,	0		0				
1	Landshut . . .	⊙	469,17	7,00	11,0	725,90	13,5	726,02	726,02	0,00	0,0000
2	Mirskofen . . .	W	442,64	7,20	12,2	23,70	13,6	23,85	23,75	+ 0,10	0,0100
3	Ergoldsbach . .	W	439,13	7,40	12,0	23,50	14,0	23,60	23,46	+ 0,14	0,0196
4	Neufahrn b/E. .	W	454,80	7,50	12,3	24,75	14,0	24,83	24,80	+ 0,03	0,0009
5	Niederlindhard .	W	468,81	8,00	13,0	26,20	14,2	26,23	26,44	— 0,21	0,0441
6	Laberweinting . .	W	490,78	8,12	13,2	28,30	14,8	28,22	28,11	+ 0,11	0,0121
7	Geisselhöring . .	⊙	500,55	8,20	14,0	29,00	15,2	28,86	29,06	— 0,20	0,0400
8	Sünching . . .	W	516,65	8,40	14,6	30,40	15,8	30,16	30,23	— 0,07	0,0049
9	Taimering . . .	W	517,00	8,50	15,0	30,55	15,8	30,31	30,22	+ 0,09	0,0081
10	Moosham . . .	W	517,25	9,00	15,2	30,40	16,0	30,13	30,21	— 0,08	0,0064
11	Mangolding . .	W	519,80	9, 5	15,0	30,65	16,0	30,38	30,35	+ 0,03	0,0009
12	Obertraubling . .	W	517,14	9,15	14,2	30,50	16,2	30,21	30,15	+ 0,06	0,0036
13	Regensburg . .	⊙	520,15	9,30	13,6	30,60	16,5	30,27	30,46	— 0,19	0,0361
				10. Oct							
14	Regensburg . .	⊙	520,15	12,00	10,8	35,50	13,0	35,54	35,54	0,00	0,0000
15	Obertraubling . .	W	517,14	12,30	10,5	35,35	12,8	35,43	35,29	+ 0,14	0,0196
16	Mangolding . .	W	519,80	12,40	10,8	35,55	12,8	35,63	35,66	— 0,03	0,0009
17	Moosham . . .	W	517,25	12,50	10,4	35,30	12,8	35,38	35,40	— 0,02	0,0004
18	Taimering . . .	W	517,00	12,55	10,6	35,30	12,8	35,38	35,36	+ 0,02	0,0004
19	Sünching . . .	W	516,65	1, 5	11,0	35,00	12,8	35,08	35,32	— 0,24	0,0576
20	Geisselhöring . .	⊙	500,55	1,20	10,0	34,05	13,0	34,11	33,91	+ 0,20	0,0400
21	Laberweinting . .	W	490,78	1,40	9,8	33,05	13,0	33,13	33,39	— 0,26	0,0676
22	Niederlindhard .	W	468,81	1,55	9,8	31,20	13,0	31,31	31,46	— 0,15	0,0225
23	Neufahrn b/E. .	W	454,80	2,10	9,8	30,00	12,9	30,14	30,09	+ 0,05	0,0025
24	Ergoldsbach . .	W	439,13	2,20	9,6	28,70	12,8	28,88	28,87	+ 0,01	0,0001
25	Mirskofen . . .	W	442,64	2,35	9,6	28,85	12,6	29,05	29,27	— 0,22	0,0484
26	Landshut . . .	⊙	469,17	3,00	9,5	731,30	12,5	731,47	731,37	+ 0,10	0,0100
					11,83	730,52	13,94	730,52	730,55	$\varepsilon = \pm^{mm}_{m} 0{,}135$	0,4567
										$\varepsilon' = \pm^{m} 1{,}68$	

Am 8. und 10. October betrugen nach den Aufzeichnungen des Ingenieurpracticanten Herrn Carl von Leistner in Regensburg und des Mechanikers Bürker in München die Schwankungen der Barometerstände nur 0,1 bis 0,2 mm, so dass kein bestimmter Anhaltspunkt, aber auch keine zwingende Veranlassung zu Correctionen der Beobachtungen

Nr 11 bis Nr 20 in Tafel Nr 15 und der Nr 1 bis 26 in Tafel Nr 16 gegeben war. In der letzteren Tafel blieb desshalb die Spalte A'_0 ganz weg.

Auch bei den hier mitgetheilten Nivellementen sind die mittleren Fehler einer ganzen Beobachtung in Uebereinstimmung mit jenen der beiden vorausgegangenen Nivellirungen, indem sich für München-Landshut $\varepsilon = \pm 0{,}147^{mm}$, $\varepsilon' = \pm 1{,}76^{m}$ und für Landshut-Regensburg $\varepsilon = \pm 0{,}135^{mm}$, $\varepsilon' = \pm 1{,}68^{m}$ ergibt.

Berechnet man den mittleren Fehler einer ganzen Beobachtung aus sämmtlichen am 26. und 30. Sept., dann zwischen dem 7. und10. Oct. 1873 angestellten Messungen, so wird derselbe $= \pm 0{,}132^{mm}$ Druck- und $= \pm 1{,}525^{m}$ Höhendifferenz: es lässt sich also auf Grund meiner 83 Beobachtungen behaupten, dass man mit einem guten Naudet'schen Federbarometer, dessen Constanten richtig bestimmt sind und das mit Vorsicht, namentlich mit Anwendung von Controlbeobachtungen, gebraucht wird, die Fixpuncte eines Strassen- oder Eisenbahnzugs derart nivelliren kann, dass der mittlere zu befürchtende Fehler jeder Höhenbestimmung nicht mehr als $\pm$ 0,132 Millimeter Quecksilberdruck oder $\pm$ 1,525 Meter Lothabstand beträgt, d. h. die für die eben genannten Fixpuncte gefundenen Höhendifferenzen h weichen durchschnittlich anderthalb Meter von dem richtigen Werthe ab; es kommen also auch grössere und kleinere Abweichungen als $\pm 1{,}5^{m}$ vor, wie denn in der That auch von den in den Tafeln Nr 13, 14, 15, 16 zusammengestellten 83 ganzen Beobachtungen nur 4 genau den mittleren Fehler, 28 Beobachtungen grössere und 51 kleinere Fehler als $\pm 1{,}5^{m}$ haben.

VI. Ueber die Bestimmung grosser Höhenunterschiede mit Hilfe von Naudet'schen Federbarometern.

Mit den Federbarometern Nr I und II wurden nur zwei grosse Höhenunterschiede gemessen, nämlich am 3. October 1872 die Höhe des Wendelstein über dem Wirthshause zu Zell und am 12. und 13. Sept. 1873 die Höhe des Hochgern über der Eisenbahnstation Uebersee im Bayerischen Hochland, und beide Messungen haben übereinstimmend die Thatsache bewiesen, dass sehr starke Bewegungen des Zeigers, welche durch grosse Höhenunterschiede veranlasst sind, stets Vergrösserungen der

Standcorrectionen c zur Folge haben, welche sich erst nach einigen Monaten bis auf einen bleibenden Rest wieder verlieren.

Als ich die Messung der Höhe des Wendelstein vornahm, hatte ich vorher folgende Reductionsformeln festgestellt, nämlich für das Aneroïd

$$\text{Nr I:} \quad A_0 = B - 0{,}14t + 0{,}02(760 - B) + 1{,}49$$
$$\text{Nr II:} \quad A_0' = B' - 0{,}14t' + 0{,}02(760 - B') + 2{,}24.$$

Die Constantendifferenz $\Delta_1 = c_2 - c_1 = 2{,}24 - 1{,}49 = 0{,}75$ wurde am 2. October in Sauerlach und Holzkirchen wiederholt bestätigt gefunden durch gleichzeitige Beobachtungen mit beiden Barometern an den Fixpuncten ⊙ Nr 758 und Nr 762, also bei gleichem Drucke und gleicher Temperatur: das Mittel aus 5 Unterschieden B′ − B war nahezu 0,75 wie oben.

Am 3. October Nachmittags beobachtete ich den Federbarometer Nr I auf der Fenstersohle des Zimmers Nr 2 im ersten Stock des Wirthshauses zu Bayerischzell, und mein gehörig instruirter Messgehilfe Franz Roth bestieg den Wendelstein und las in dessen kleiner Kapelle einige Male das Aneroïd Nr II und ausserhalb derselben an einem besonderen Thermometer die Temperatur der Luft ab. Die Mittelwerthe seiner Ablesungen waren:

$$B' = 605{,}8^{p} \qquad t' = 13{,}5^{0}\,R \qquad T' = 12{,}4^{0}\,R$$

während ich an der genannten Stelle, die nach meinen am 2., 3. und 4. October 1872 vorgenommenen und auf die Höhenmarken in Holzkirchen (Nr 762) und Aibling (Nr 777) gestützten barometrischen Messungen 796^{m} oder 2450′ par.[1]) über dem Meere liegt, beobachtet habe:

$$B = 689{,}3^{p} \qquad t = 15{,}4^{0}\,R \qquad T = 15{,}4^{0}\,R.$$

Aus diesen Angaben berechnen sich zunächst folgende Werthe, welche in die Barometerformel einzusetzen sind:

---

1) C. W. Gümbel fand für dieselbe Stelle eine Meereshöhe von 2448 par. Fuss (vergl. S. 46 seiner Beschreibung des Bayerischen Alpengebirgs, 1861).

für die untere Station $A_0 = 690{,}05^{mm}$
für die obere Station $A_0' = 609{,}25^{mm}$
Summe der Lufttemperaturen $= 27{,}8^0$ R.

Nimmt man hiezu noch die mittlere geographische Breite beider Stationen zu 48^0 an, so ergibt die von mir verbesserte Barometerformel[1]) den Höhenunterschied zwischen dem Wirthshause in Bayerischzell und dem Gipfel des Wendelsteins

$$h = 1062{,}2^m \text{ oder } 3270' \text{ par.}$$

und folglich die Meereshöhe der auf diesem Gipfel stehenden kleinen Kapelle:

$$H = 1858{,}2^m \text{ oder } 5720 \text{ par. Fuss.}$$

Dieses Ergebniss weicht von der barometrischen Messung des Herrn Oberbergraths Gümbel [2]) gar nicht und von dem Resultate der trigonometrischen Bestimmung des K. topographischen Bureaus in München, das Herr Director v. Lamont zu 5692 par. Fuss angibt, nur wenig ab, sowie es auch mit meinem geometrischen Nivellement des Grossen Miesing, welcher eine Meereshöhe von $1883{,}5^m$ hat und etwa 30^m höher ist als der Wendelstein, ziemlich gut übereinstimmt.

Bei der Vergleichung beider Federbarometer am Morgen des 4. October 1872 zeigte sich sofort der Eingangs erwähnte Zuwachs der Constanten des zweiten Aneroïds, welches am Abend vorher auf den Wendelstein getragen und dort beobachtet worden war. Ich habe deshalb die Vergleichungen auch noch in Aibling und Rosenheim fortgesetzt und hiebei nach der Formel $c_2 = c_1 + B_1 - B_2$ folgende Resultate erhalten:

---

1) Vergl. C. M. Bauernfeind, Beobachtungen und Untersuchungen über die Genauigkeit barometrischer Höhenmessungen etc., München 1862, S. 9 und S. 32.
2) Vergl. das bereits angeführte Werk von C. W. Gümbel S. 46 und 103.

1872, October 4,	Bayrisch Zell:	$c_2 = 1{,}49 + 690{,}70 - 689{,}30$	$= 2{,}89$
„ 4,	Aibling:	$c_2 = 1{,}49 + 715{,}31 - 714{,}00$	$= 2{,}80$
„ 4,	Ebendaselbst:	$c_2 = 1{,}49 + 715{,}15 - 713{,}90$	$= 2{,}74$
„ 5,	Rosenheim	$c_2 = 1{,}49 + 722{,}18 - 720{,}75$	$= 2{,}92$
„ 5,	Ebendaselbst:	$c_2 = 1{,}49 + 722{,}13 - 720{,}65$	$= 2{,}97$
	Im Durchschnitte	$c_2 = 1{,}49 + 713{,}09 - 711{,}72$	$= 2{,}86.$

Da die Standcorrection des Federbarometers Nr II vor Besteigung des Wendelsteins noch 2,24 betrug, so trat folglich durch diese Besteigung eine Vermehrung der Correction c_2 von $0{,}62^{p}$ ein. Auf die Beobachtung vom 3. October scheint sie jedoch noch wenig eingewirkt zu haben, da die daraus abgeleitete Höhe des Wendelsteins der aus dem geometrischen Nivellement des Miesing gefundenen entspricht.

Von welchen Theilen des Instruments diese Mehrung kam, ist schwer zu sagen, wahrscheinlich war der ganze Mechanismus in Mitleidenschaft gezogen, da nach einigen Monaten die Constante c_2, welche früher 2,24 betragen hatte, von 2,86 wieder auf 2,34 zurückging.

Diese letztere Constante hatte das Instrument Nr II auch noch am 12. September 1873, als es Herr Professor Frauenholz auf den Hochgern bei Marquartstein mitnahm, wie aus den Vergleichungen hervorgeht, die ich zwischen dem 21. August und 10. September in Rosenheim allein und am 12. September 1873 in Unterwessen mit Herrn Professor Frauenholz vornahm. Dagegen hatte ich durch in München angestellte Versuche einige Aenderungen in den übrigen Constanten aufgefunden, so dass die für die in Rede stehenden Messungen gültigen Reductionsformeln folgende waren, nämlich für das Aneroïd

$$\text{Nr I:} \quad A_0 = B - 0{,}135\,t + 0{,}017\,(760 - B) + 1{,}47$$
$$\text{Nr II:} \quad A_0' = B' - 0{,}135\,t' + 0{,}017\,(760 - B') + 2{,}34.$$

Die Höhenmessung des Hochgern knüpfte sich an die Cote der Höhenmarke Nr 832 zu Uebersee, welche in Bezug auf den Spiegel der Ostsee $529{,}1^{m}$ beträgt. Die nächsthöhere Station war die Wohnung des Herrn Prof. Frauenholz bei dem Wagner in Marquartstein, und zwar die Fenstersohle derselben im ersten Stock. Wir wollen diese

beiden Stationen mit 1 und 2 bezeichnen. Die dritte Station (3) war die Thürsohle der obersten Hütte in Agersgwend, die vierte (4) die Fenstersohle im ersten Stock der auf dem Wege zum Gipfel des Hochgern gelegenen Diensthütte des k. Forstamts Marquartstein, und endlich die fünfte Station (5) das trigonometrische Signal auf dem Hochgern.

Am 12. und 13. September besorgte ich die Controlbeobachtungen in Unterwessen mit dem Federbarometer Nr I und am 14. und 17. desselben Monats verglich ich mit Herrn Prof. Frauenholz die beiden Instrumente Nr I und Nr II in Bezug auf die Grösse ihrer Standcorrectionen; am 22. September, als Herr Prof. Frauenholz den Höhenunterschied zwischen der 1. und 2. Station mass, konnte ich keine Controlbeobachtungen anstellen, da ich an jenem Tage einen Ausflug unternommen hatte. Nach den im Polytechnicum zu München angestellten Controlbeobachtungen fiel jedoch der Barometer am 22. September 1873 zwischen 8 und 11 Uhr um $0{,}5^{mm}$; um eben soviel wird daher Herr Prof. Frauenholz, der um 8 Uhr in Marquartstein und um $10^h\ 30'$ in Uebersee beobachtete, die Angabe an dieser Station zu gross gefunden haben. Berücksichtigt man dieses, so ist der Höhenunterschied $h_{1,2}$ zwischen der ersten und zweiten Station aus folgenden Daten zu berechnen:

Station 1: $B_1 = 721{,}7^p$; $t_1 = T_1 = 16{,}6^0$ R
„ 2: $B_2 = 719{,}7$ $t_2 = T_2 = 14{,}2$.

Am 12. September hat sich nach den Controlbeobachtungen in Unterwessen der Barometerstand nicht merklich geändert; daher sind die Höhenunterschiede $h_{2,3}$ und $h_{3,4}$ aus folgenden Daten zu berechnen:

Station 2: $B'_2 = 716{,}8^p$; $t'_2 = 18{,}5^0$ R ; $T'_2 = 16{,}3^0$ R
„ 3: $B_3 = 669{,}2$ $t_3 = 19{,}3$ $T_3 = 13{,}8^0$
„ 4: $B_4 = 665{,}1$ $t_4 = 17{,}6$ $T_4 = 13{,}5^0$.

Endlich ergibt sich der Höhenunterschied $h_{4,5}$, obwohl sich in der Nacht der Luftdruck vermindert hatte, aus den nachstehenden Beobachtungen, zwischen denen keine allgemeine Aenderung mehr eintrat:

Station 4: $B'_4 = 662{,}8^p$; $t'_4 = 12{,}7^0$ R ; $T'_4 = 11{,}4^0$ R
„ 5: $B_5 = 617{,}0$ $t_5 = 14{,}0$ $T_5 = 9{,}0$.

Mit diesen Daten und der Annahme, dass die mittlere Breite aller fünf Stationen abgerundet 48^0 beträgt, findet man aus der angeführten allgemeinen Barometerformel für die

Station	2	den Unterschied	$h_{1,2}$	=	20,1^m	und die Meereshöhe	=	549,2^m
„	3	„ „	$h_{2,3}$	=	591,2	„ „ „	=	1100,4
„	4	„ „	$h_{3,4}$	=	50,4	„ „ „	=	1150,8
„	5	„ „	$h_{4,5}$	=	605,1	„ „ „	=	1755,9.

Die von uns gefundene Meereshöhe des Hochgerngipfels von 1756^m oder 5405 par. Fuss entspricht abermals den vorliegenden Höhenbestimmungen sehr gut, indem das K. topographische Bureau diese Höhe auf trigonometrischem Wege = 5379 und Herr Oberbergrath Gümbel mit Greiner'schen Barometern = 5436 par. Fuss fand, das Mittel aus diesen beiden Messungen also 5407 par. Fuss beträgt[1]).

Nach der Rückkehr des Herrn Prof. Frauenholz von seinem Ausfluge nach dem Gipfel des Hochgern fanden sofort am 14. September 1873 zwei Vergleichungen der Federbarometer Nr I und Nr II in meiner Wohnung zu Unterwessen statt, denen noch eine dritte am 17. September in Marquartstein folgte. Die in gleicher Höhenlage, folglich bei gleichem atmosphärischen Druck beobachteten Aneroïde lieferten folgende Ablesungen:

Beob.Nr:	Beob. Zeit:	Barometer Nr I:	Barometer Nr II:
1.	14. Sept, 9½ Uhr Vm:	712,0^p bei + 16,5^0 R	710,6^p bei + 18,0^0 R
2.	14. „ 6¼ „ Nm:	708,0 „ + 16,8	706,5 „ + 16,8
3.	17. „ 9¾ „ Vm:	715,2 „ + 13,5	713,7 „ + 12,3.

Es finden demnach, da die Theilungscorrectionen auf beiden Seiten wegfallen, folgende Gleichungen zur Bestimmung der Standcorrection c_2 des Federbarometers Nr II statt:

$$c_2 = 712{,}0 + 1{,}47 - 0{,}135(16{,}5 - 18) - 710{,}6 = 3{,}07$$
$$c_2 = 708{,}0 + 1{,}47 - 0{,}135(16{,}8 - 16{,}7) - 706{,}5 = 2{,}96$$
$$c_2 = 715{,}2 + 1{,}47 - 0{,}135(13{,}5 - 12{,}3) - 713{,}7 = 2{,}81.$$

1) Vergl. C. W. Gümbel, Bayerische Alpen, S. 63.

Aus diesen drei Werthen, die um so kleiner werden, je weiter die Beobachtungszeiten von der grössten Anstrengung des Aneroïds Nr II abliegen, ergibt sich eine mittlere Aenderung der Standcorrection c_2 von 2,34 auf 2,95 oder von 0,61 Millimeter, während diese Aenderung am 14. Sept. Vormittags halb zehn Uhr 0,73, Abends sechs Uhr 0,62 und am 17. Sept. Vormittags zehn Uhr 0,47 Millimeter betrug. Ganz verschwand dieselbe nicht, indem die Constante am 21. und 22 December 1873, also nach drei Monaten noch einen Werth von 2,53 hatte und folglich um 0,19 Millimeter grösser war als vor der Besteigung des Hochgern.

Aus den hier mitgetheilten Beobachtungen lässt sich mit Sicherheit schliessen: dass erstens nach starker Druckverminderung der Zeiger eines Aneroïds (wahrscheinlich in Folge zu starker Spannung der Spiralfeder, welche dem Winkelhebel entgegenwirkt) kleinere Ablesungen gibt als dem Luftdrucke entsprechen, wodurch die Standcorrection vermehrt wird, und dass zweitens diese fehlerhaften Angaben nach und nach sich wieder vermindern bis auf einen kleinen Rest, welcher bleibt. Diesem bei technischen Nivellementen glücklicherweise nicht oft eintretenden Uebelstande lässt sich am wirksamsten dadurch begegnen, dass man bei Ermittelung grosser Höhenunterschiede stets nur dasselbe Instrument auf der obersten Station verwendet und dessen Standcorrection Tag für Tag und so lange durch Vergleichungen mit dem keinen starken Druckdifferenzen ausgesetzten Normalaneroïd bestimmt, bis diese Correction wieder einen bleibenden Werth erlangt hat.

VII. Ueber die zulässigen horizontalen Entfernungen correspondirender barometrischer Beobachtungsstationen.

Bei der Entwickelung der barometrischen Höhenformel nimmt man an, die beiden Beobachtungsstationen seien in horizontaler Richtung nur so weit von einander entfernt, dass eine Aenderung des Luftdrucks, welche an der einen Station eintritt, sofort auch an der andern sich kundgibt. Wie gross diese Entfernung in den vorkommenden Fällen anzunehmen ist, hat man durch Beobachtungen noch nicht entschieden; es gibt hierüber nur Meinungen, und diese gehen weit auseinander. Ich habe deshalb die Gelegenheit, welche sich mir bot, einen Beitrag zur Lösung der oben formulirten Frage zu leisten, nicht unbenützt vorüber

gehen lassen wollen und theile daher in der nachstehenden Tafel Nr 17 die Beobachtungen mit, welche ich in der Zeit vom 7. bis 11. Oct. 1873 in München und Regensburg als Controlbeobachtungen für meine barometrischen Messungen auf den Eisenbahnstrecken München-Landshut und Landshut-Regensburg anstellen liess. Die Münchener Beobachtungen besorgte der Diener des geodätischen Instituts am Polytechnicum, Mechaniker Carl Bürker, und es wurde hiezu ein Gefässbarometer benützt, der im geodätischen Laboratorium auf einem Steinpfeiler in einer Meereshöhe von 518,1 Meter stand, während in Regensburg der Ingenieurpracticant Herr Carl v. Leistner die Gefälligkeit hatte, den Federbarometer Nr II, der im Locale der k. Eisenbahnbausection in einer Meereshöhe von 343,8 Meter aufgestellt war, stündlich abzulesen. Der Höhenunterschied der Standorte beider Instrumente betrug somit 176,3 Meter und die horizontale Entfernung nach der sogenannten Luftlinie belief sich auf nahezu 14 Meilen.

Tafel Nr 17.

Gleichzeitige Barometerbeobachtungen in München und Regensburg vom 7. bis 11. October.

Nr	1873 October	Gefäss-Barometer in München			Federbarometer Nr II in Regensburg			Differenz D	Mittl. Luft-Temp.	Berechnete Höhe h	v	v^2
		A	t	A_0	B	t	A_0'					
									0	m	m	
1	7. um 2 Uhr	718,6	14,6	718,72	732,7	12,5	734,06	15,34	15,5	181,24	+ 4,36	19,0096
2	3	18,3	14,6	18,42	32,4	12,8	33,73	15,31	15,5	180,96	+ 4,08	16,6464
3	4	17,5	14,5	17,64	31,5	12,8	32,84	15,20	15,0	179,50	+ 2,62	6,8644
4	5	17,3	14,5	17,44	31,2	12,8	32,55	15,11	14,4	178,02	+ 1,14	1,2996
5	6	16,9	14,4	17,05	31,0	13,3	32,28	15,23	12,8	178,40	+ 1,52	2,3104
6	8. um 8 Uhr	15,2	14,4	15,35	29,2	11,8	30,71	15,36	12,5	179,98	+ 3,10	9,6100
7	9	15,2	15,3	15,24	29,5	12,2	30,95	15,71	13,8	185,09	+ 8,21	67,4041
8	10	15,2	15,7	15,19	29,2	12,5	30,62	15,43	13,5	181,60	+ 4,72	22,2784
9	11	14,9	15,2	14,95	28,0	12,8	29,40	14,45	14,0	170,60	— 6,28	39,4384
10	12	14,2	15,9	14,16	27,7	13,4	29,03	14,87	14,3	175,94	— 0,94	0,8836
11	2	14,0	14,7	14,11	27,0	13,7	28,30	14,19	14,3	167,97	— 8,91	79,3881
12	3	13,5	14,6	13,62	26,5	13,3	27,86	14,24	14,0	168,85	— 8,03	64,4809
13	4	13,1	14,5	13,24	26,3	13,3	27,66	14,42	14,0	170,66	— 6,22	38,6884
14	5	13,1	14,5	13,24	26,0	13,3	27,37	14,13	14,0	167,26	— 9,62	92,5444
15	6	13,0	14,4	13,15	26,5	13,5	27,83	14,68	14,0	173,73	— 3,15	9,9225
16	9. um 8 Uhr	716,7	13,4	717,07	730,0	11,7	731,51	14,44	12,5	168,90	— 7,98	63,6804

Nr	1873 October	Gefäss-Barometer in München			Federbarometer Nr II in Regensburg			Differenz D	Mittl. Luft-Temp.	Berechnete Höhe h	v	v^2
		A	t	A_0	B	t	A_0'					
									0	m	m	
17	9. um 9 Uhr	716,7	13,4	717,07	730,0	11,7	731,51	14,44	12,6	168,97	— 7,91	62,5681
18	10	16,7	13,5	17,06	30,5	11,5	32,03	14,97	12,7	174,19	— 2,69	7,2361
19	11	16,7	13,5	17,06	30,2	11,4	31,75	14,69	12,5	171,83	— 5,05	25,5025
20	12	16,9	13,5	17,26	30,4	11,3	31,95	14,69	12,5	171,75	— 5,13	26,3169
21	2	16,9	13,4	17,17	30,4	11,0	31,99	14,82	12,2	173,04	— 3,84	14,7456
22	3	16,9	13,2	17,20	30,3	11,6	31,82	14,62	12,5	170,94	— 5,94	35,2836
23	4	17,0	13,1	17,31	30,3	11,5	31,83	14,52	12,3	169,60	— 7,28	52,9984
24	5	17,0	13,0	17,32	30,7	11,7	32,20	14,88	12,5	174,00	— 2,88	8,2944
25	6	17,0	12,7	17,37	31,3	11,3	32,84	15,47	12,1	180,38	+ 3,50	12,2500
26	10. um 8 Uhr	19,1	12,4	19,55	33,8	9,8	35,49	15,94	11,2	184,55	+ 9,67	93,5089
27	9	19,3	12,7	19,67	34,0	10,8	35,56	15,89	11,8	184,32	+ 7,44	55,3536
28	10	19,9	12,7	20,27	33,9	11,4	35,38	15,11	12,1	175,56	— 1,32	1,7424
29	11	20,0	12,8	20,35	34,6	11,4	36,07	15,72	12,2	182,63	+ 5,75	33,0625
30	12	20,0	12,7	20,37	34,5	11,5	35,96	15,59	12,2	181,14	+ 4,26	18,1476
31	2	20,0	12,7	20,37	34,6	11,2	36,10	15,73	12,0	182,59	+ 5,71	32,6041
32	3	20,4	12,7	20,77	34,6	11,2	36,10	15,33	12,0	177,90	+ 1,02	1,0201
33	4	20,5	12,7	20,87	34,7	11,2	36,20	15,33	12,0	177,87	+ 0,99	0,9801
34	5	20,5	12,7	20,87	34,7	11,2	36,20	15,33	11,8	177,75	+ 0,87	0,7569
35	6	20,5	12,6	20,90	34,9	11,5	36,35	15,45	11,8	179,08	+ 2,20	4,8400
36	11. um 8 Uhr	23,5	12,6	23,90	37,6	9,5	39,27	15,37	11,2	176,97	+ 0,09	0,0081
37	9	23,7	14,0	23,90	38,0	10,0	39,60	15,70	12,5	181,76	+ 4,88	23,8144
38	10	23,8	14,1	23,99	38,1	10,5	39,63	15,64	12,8	181,29	+ 4,41	19,4481
39	11	23,8	14,5	23,94	38,0	10,7	39,51	15,57	12,8	180,50	+ 3,62	13,1044
40	12	723,5	14,0	723,76	737,6	10,8	739,10	15,40	12,8	178,60	+ 1,72	2,9584
		717,90	13,76	718,17	731,81	11,785	733,28	15,11	12,93	176,88	$\varepsilon = \pm 5,26$	1080,9948

Zu der vorstehenden Tafel ist Folgendes zu bemerken. Die Ablesungen A am Gefässbarometer geschahen am Kuppenrand; es war also behufs der Reduction die Summe der Kuppenhöhe k und der Depression d des Quecksilbers zu addiren und die Ausdehnung a der Quecksilbersäule zwischen 0 und t^0 R abzuziehen. In dem vorliegenden Falle betrug $k + d = 2{,}25^{mm}$ und die Ausdehnung a wurde aus der auf S. 409 des zweiten Bands meiner Elemente der Vermessungskunde enthaltenen Tafel entnommen, nachdem die beobachteten Reaumur'schen Grade in Centesimalgrade verwandelt worden waren.

Der auf 0^0 reducirte Barometerstand A'_0, welcher den Beobachtungen B und t am Aneroïd Nr II entspricht, ging aus der Formel $A'_0 = B + 2{,}53 + 0{,}167\,(760 - B) - 0{,}13\,t$ hervor, welche zur Zeit der Beobachtungen diesem Aneroïd am besten entsprach. Die mittlere Lufttemperatur ist aus den Beobachtungen in München und Regensburg und der Höhenunterschied h zwischen diesen beiden Stationen aus der Formel $\log h = \log u + A - 0{,}00009$ berechnet, da die Correction wegen der Breite — 14 und die wegen der Höhe der unteren Station + 5 Einheiten der fünften Decimale des Logarithmus von h, die Summe beider folglich — 9 solcher Einheiten beträgt.

Ueberblickt man die Fehler v, welche zugleich ein Mass für die Schwankungen der Druckdifferenzen $D = A'_0 - A_0$ sind, so fällt sofort auf, dass diese Fehler für die Beobachtungen Nr 1 bis Nr 8 positiv, für Nr 9 bis Nr 24 negativ und für Nr 25 bis Nr 40 wieder positiv sind hieraus geht klar hervor, dass zur Zeit der Beobachtungen 1 bis 8 und 25 bis 40, also vom 7. October Nachm. 2 Uhr bis 8. October Vorm. 10 Uhr und vom 9. October Abends 6 Uhr bis 11. October Mittags 12 Uhr der Luftdruck in einer Höhe von 176^m über Regensburg grösser war als der in gleicher Höhe in München beobachtete Lufttdruck, und dass zur Zeit der Beobachtungen 9 bis 24 das Entgegengesetzte stattfand; mit anderen Worten: während dieser drei Perioden war der atmosphärische Druck in einer und derselben über München und Regensburg gelegt gedachten wahren Horizontalfläche nicht der nämliche: es ist also in gewöhnlichen Fällen eine Entfernung von 14 geographischen Meilen für zwei correspondirende Barometerstationen zu gross, und es kann eine solche Entfernung zur Berechnung des Höhenunterschieds zweier Stationen aus den daselbst angestellten Barometer- und Thermometer-Beobachtungen nur dann zugelassen werden, wenn die Zahl dieser Beobachtungen ziemlich gross ist. Denn in diesem Falle wird die Ausgleichung der Druckunterschiede, welche in gleichhohen horizontalen Luftschichten von meilenweiter Ausdehnung immer stattfinden, durch die Rechnung bewirkt, in der sich die in ungefähr gleicher Zahl und Grösse auftretenden positiven und negativen Werthe jener Unterschiede grösstentheils gegen einander aufheben. Liegt hierin der erste Grund, warum 40 Beobachtungen den Höhenunterschied

zwischen München und Regensburg bis auf $0{,}6^m$ genau lieferten, so beweist doch auch andererseits der geringe mittlere Fehler einer einzigen Beobachtung von $\pm 5{,}26^m$, dass eine Entfernung von 14 Meilen den Maximalabstand zweier correspondirender Barometerstationen dann nicht stark überschreitet, wenn diese Stationen nicht durch Gebirge getrennt sind, sondern auf einer weit sich erstreckenden Ebene (hier der bayerischen Hochebene) liegen. In ebenen Gegenden dürfen daher die Controlstationen für barometrische Höhenmessungen jedenfalls 8 bis 10 Meilen von den Beobachtungsstationen entfernt sein, wie dieses auch bei meinen in den Tafeln Nr 13 bis Nr 16 dargestellten barometrischen Nivellementen der Fall war.

Fig. 1.

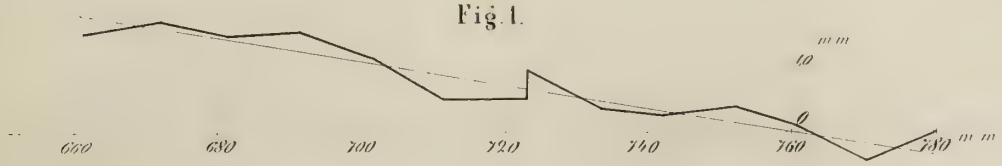


Fig. 2.

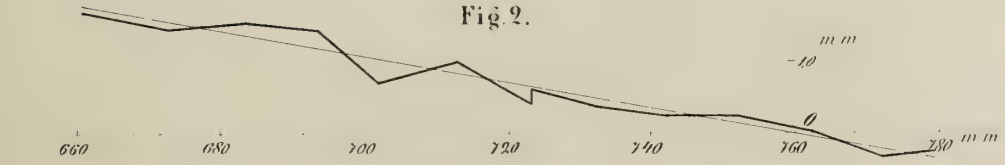


Fig. 3.

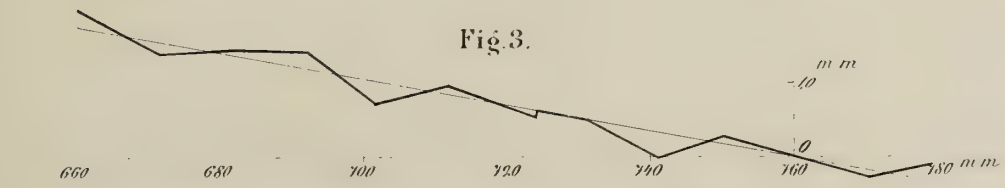
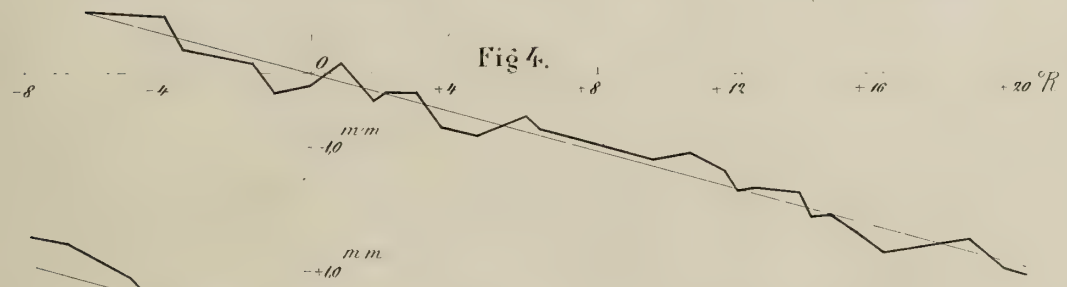


Fig. 4.



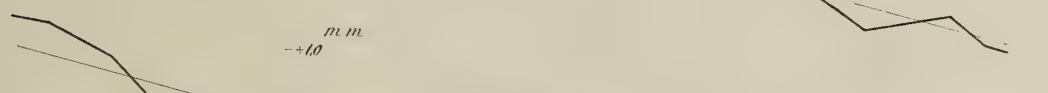
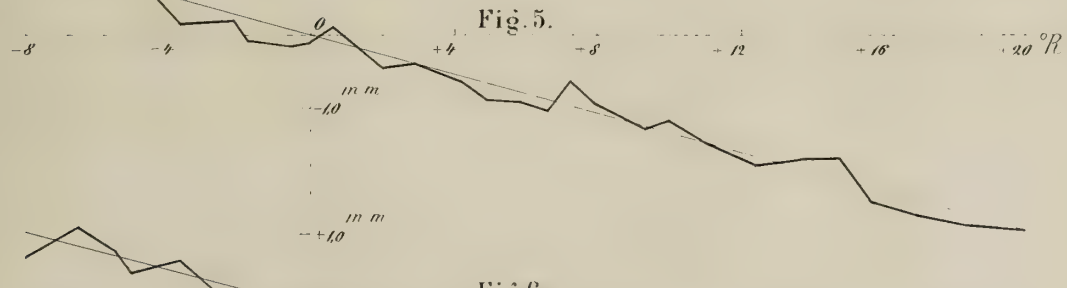


Fig. 5.



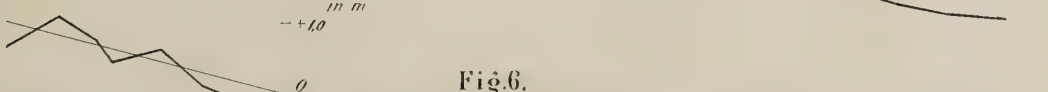


Fig. 6.

Lith. Anstalt v. Gebrüder Obpacher, München

BRITISH
NATURAL HISTORY

Ueber ein Verfahren,

die

Gleichungen, auf welche die Methode der kleinsten Quadrate führt, sowie lineäre Gleichungen überhaupt, durch successive Annäherung aufzulösen.

Von

Ludwig Seidel.

Ueber ein Verfahren, die Gleichungen, auf welche die Methode der kleinsten Quadrate führt, sowie lineäre Gleichungen überhaupt, durch successive Annäherung aufzulösen.

Von

Ludwig Seidel.

Vorgetragen in der Sitzung der mathem.-physik. Classe der K. Akademie der Wissenschaften am 7. Februar 1874.

1.

Im Anschlusse an die Bezeichnung, welche in der Theorie der Ausgleichung von Beobachtungs-Resultaten gebräuchlich ist, sei angenommen, dass die Ergebnisse der Einzelbeobachtungen in folgenden nach den unbekannten Grössen x , y , z , ... lineären Gleichungen ausgesprochen sind:

$$\text{A)} \qquad \begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z + \ldots + n_1 &= o \\ a_2x + b_2y + c_2z + \ldots + n_2 &= o \\ a_3x + b_3y + c_3z + \ldots + n_3 &= o \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

Es wird vorausgesetzt, dass die Anzahl der Beobachtungen, folglich auch der Gleichungen A), grösser ist als die der Unbekannten x , y , z , ... dass aber die einzelnen Gleichungen durch Beobachtungsfehler entstellt sind (oder doch sein können), um derentwillen die Ausdrücke zur Linken auch dann im Allgemeinen nicht genau verschwinden würden, wenn

man die wahren Werthe x , y , z ... in ihnen substituiren könnte. Zugleich sei vorausgesetzt, dass dem etwa verschiedenen Gewichte verschiedener Beobachtungen in der Form, in welcher die Gleichungen angeschrieben sind, bereits nach bekannter Vorschrift Rechnung getragen sei, so dass man also a priori durchaus keinen Grund mehr habe, in der Einen der Beobachtungsgleichungen einen grösseren Fehler (d. h. einen grösseren absoluten Werth des Ausdruckes, der nach dieser Gleichung Null sein müsste), zu erwarten, als in der anderen.

Es sei ferner vorausgesetzt, dass gemäss der Anordnung der Beobachtungen diejenigen Voraussetzungen zutreffend sind, oder doch nach unserer Einsicht als zutreffend angesehen werden müssen, unter welchen die Anwendung der „Methode der kleinsten Quadrate" rationell begründet ist. Hienach wird das probabelste[1]) aller Systeme von Werthen x , y , z , ... durch die Bedingung abgeleitet, dass seine Substitution in die Beobachtungsgleichungen A) die Quadratsumme der links sich ergebenden Zahlenwerthe möglichst klein macht. Wendet man, wie in dieser Theorie gewöhnlich , die [ ] Klammer als Summenzeichen an, so dass z. B.

$$[aa] = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \cdots$$

$$[ab] = [ba] = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + \cdots$$

(wo jede Summe sich über so viel Glieder ausdehnt, als Beobachtungen vorhanden sind), so ist die Quadratsumme

$$\begin{aligned} Q = {} & [aa]\, x^2 + [bb]\, y^2 + [cc]\, z^2 + \cdots \\ & + 2\,[ab]\, xy + 2\,[ac]\, xz + 2[bc]\, yz + \cdots \\ & + 2\,[an]\, x + 2\,[bn]\, y + 2\,[cn]\, z + \cdots \\ & + [nn] \end{aligned}$$

---

1) Der Vorzug dieses probabelsten Systemes ist nicht etwa dadurch begründet, dass die unendlich kleine Wahrscheinlichkeit, es werde genau richtig sein, ein grösseres Unendlich-kleines ist, als für jedes andere System, — sondern dadurch, das die endliche Wahrscheinlichkeit, es werden die wirklichen Werthe der Unbekannten von den vorausgesetzten nur innerhalb beliebig aufgestellter aber enger Schranken differiren, grösser ist bei dem ausgezeichneten System, als die auf gleich enge Schranken bezügliche (ebenfalls endliche) analoge Wahrscheinlichkeit bei jedem anders gewählten System Es scheint dies nicht überall mit der erforderlichen Klarheit aufgefasst worden zu sein.

und sie wird zum Minimum, wenn man die Unbekannten aus folgenden Normalgleichungen berechnet, deren Zahl gerade ausreichend ist, und die man also strenge erfüllt:

$$
\begin{array}{ll}
 & [aa]\,x + [ab]\,y + [ac]\,z + \cdots + [an] = o \\
B) & [ab]\,x + [bb]\,y + [bc]\,z + \cdots + [bn] = o \\
 & [ac]\,x + [bc]\,y + [cc]\,z + \cdots + [cn] = o \\
 & \qquad \text{etc.}
\end{array}
$$

So einfach nun, ihrer mathematischen Natur nach, die Aufgabe ist, eine beliebige Anzahl unbekannter Grössen aus gleich vielen linearen Gleichungen zu berechnen, so mühsam wird ihre numerische Durchführung, wenn die Zahl der Unbekannten beträchtlich gross wird, und man sieht sich aus diesem Grunde veranlasst, in Fällen der bezeichneten Art, dergleichen z. B. die Ausgleichung eines nur etwas grösseren geodätischen Netzes praktisch darbietet, unter Aufopferung der streng systematischen Durchführung, partielle Systeme von Unbekannten zu bilden und dieselben, nachdem jedes für sich berechnet ist, so gut es gehen will einander anzuschliessen. Ich weiss nicht, ob ein Complex von mehr als einigen siebzig Unbekannten je einheitlich berechnet worden ist. Die Zahl 70 ist erreicht in dem Netze der ostpreussischen Gradmessung[1]) (und zwar in einem Falle, wo zwischen den Unbekannten noch 31 streng zu erfüllende Bedingungsgleichungen bestehen, welcher Umstand aber nach der gewöhnlichen Art der Behandlung die Sache nur erschwert), und mit 72 Unbekannten habe ich zu thun gehabt bei Berechnung der wahrscheinlichsten Werthe für die Logarithmen der Helligkeiten der Sterne, welche in mein photometrisches Netz gezogen waren [2]) — Die gebräuchliche von Gauss gegebene Auflösungsmethode beruht bekanntlich darauf, dass man den Werth irgend einer Unbekannten, ausgedrückt durch die übrigen, aus derjenigen Gleichung entnimmt, in welcher diese Unbekannte mit einer Summe von Quadraten multiplicirt ist, oder nach der

---

1) Siehe das Werk von Bessel und Baeyer, Abschnitt III.

2) Siehe meine Abhandlung, „Resultate photometrischer Messungen etc." in den Denkschriften der Münchener Akademie. 1862, Paragraph 8.

üblichen und unmittelbar verständlichen Art zu sprechen und zu schreiben, aus der Gleichung, in welcher jene Unbekannte in der Diagonale des Systems auftritt — also z. B. den Werth von x aus der ersten Gleichung in B), — und diesen Werth in die übrigen Gleichungen substituirt, wodurch man das erste transformirte System der Normalgleichungen erhält

$$\text{C)} \qquad \begin{aligned} [bb\,.\,1]\,y + [bc\,.\,1]\,z + \cdots + [bn\,.\,1] &= o \\ [bc\,.\,1]\,y + [cc\,.\,1]\,z + \cdots + [cn\,.\,1] &= o \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

welches mit dem ursprünglichen Systeme B) die Eigenschaft theilt, dass die Coefficienten der Unbekannten symmetrisch gegen die Diagonale stehen, und in welchem allgemein

$$[bc\,.\,1] = [cb\,.\,1] = [bc] - \frac{[ab]\,[ac]}{[aa]}$$

Indem man hierauf eine 2te Unbekannte in gleicher Weise fortschafft, u. s. w. ergeben sich successive transformirte Systeme, deren jedes folgende eine Unbekannte weniger hat, als das vorausgehende, bis die letzte Unbekannte für sich allein steht und nach Bestimmung ihres Werthes successive alle übrigen, jede aus der Gleichung, die zu ihrer Elimination benützt worden ist, nach der umgekehrten Reihenfolge sich berechnen.

Ein anderes Verfahren hat Jacobi erdacht und auf die 7 Gleichungen angewandt, welche zur Berechnung eines Theiles der Säcularstörungen im Planetensystem nach Laplace von Leverrier aufgestellt waren[1]); ich habe noch als Studirender die Ehre gehabt, für ihn dazu die numerischen Rechnungen auszuführen. Nach demselben werden successive die grössten der ausserhalb der Diagonale stehenden Coefficienten zum Verschwinden gebracht, indem man durch eine passende lineäre Substitution, welche vollkommen der Drehung eines rechtwinkligen Coordinaten-Systems entspricht, statt derjenigen zwei Unbekannten, welche mit solchem Coeffi-

1) Siehe Crelle's Journal, Band 30, p. 51 „Ueber ein leichtes Verfahren etc."

cienten multiplicirt sind, zwei neue Unbekannte einführt, und die Symmetrie des Ganzen erhält; an die Stelle des so annullirten Coefficienten tritt zwar im Fortgange des Rechnungsverfahrens durch die späteren Substitutionen wieder ein nicht verschwindender, aber die Summe der Quadrate der Coefficienten ausserhalb der Diagonale wird stetig zu Gunsten derjenigen in der Diagonale vermindert, und auf einem Wege, dessen Convergenz streng bewiesen ist, nähert man sich so sehr man will dem Endziel, wo (ausser den rein constanten Gliedern) nur die diagonalen mehr übrig sind, und die letzten Unbekannten sich sofort ergeben. So sinnreich übrigens diese Methode den speciellen Schwierigkeiten des Falles angepasst ist, für welchem Jacobi ihre Anwendung veranlasste und in welchem die diagonalen Coefficienten selbst noch lineäre Funktionen einer supernumerären Unbekannten sind, so scheint sie mir für den gewöhnlich vorkommenden einfacheren Fall doch keineswegs vortheilhafter zu sein, als die allgemein angewandte; auch bezweifle ich, ob sie in irgend einem weiteren Falle bisher in Anwendung gebracht worden ist.

Einen dritten Weg habe ich in meiner oben citirten photometrischen Abhandlung eingeschlagen; seine Wahl war für die dort behandelte Aufgabe bei der einfachen Gestalt der einzelnen Beobachtungsgleichungen eine besonders naheliegende. In meinem vorliegenden Aufsatze beabsichtige ich, diese Auflösungs-Methode in derjenigen Gestaltung darzulegen und zu begründen, in welcher sie ganz allgemein anwendbar ist, und zugleich einige Einzelheiten näher zu erörtern, die mit ihr in Verbindung stehen.

2.

Man denke sich für die Unbekannten x , y , z ... zuerst irgend ein System von Zahlenwerthen angenommen, welches die „Normalgleichungen“ B) des wahrscheinlichsten Systems noch nicht erfüllt, sondern macht

$$[aa]\,x + [ab]\,y + \ldots + [an] = N_1$$
$$[ab]\,x + [bb]\,y + \ldots + [bn] = N_2$$

u. s. w.

Die Summe der Fehlerquadrate Q (s. ob.) kann nach einer identischen Transformation so geschrieben werden.

$$Q = \frac{1}{[aa]} \left\{ [aa]\, x + [ab]\, y + [ac]\, z + \cdots + [an] \right\}^2$$
$$+ [bb \,.\, 1]\, y^2 + [cc \,.\, 1]\, z^2 + \cdots$$
$$+ 2\,[bc \,.\, 1]\, y\, z + \cdots + 2\,[bn \,.\, 1]\, y + 2\,[cn \,.\, 1]\, z + \cdots$$
$$+ [nn \,.\, 1]$$
$$= \frac{1}{[aa]} N_1^2 + [bb.1]\, y^2 + \cdots + [nn.1]$$

Bei dieser Form des Ausdruckes kommt die Unbekannte x nur im ersten Gliede (nemlich in N_1) vor; hieraus ist sofort klar, dass man die Summe Q der Fehlerquadrate vermindert, und zwar um die Grösse

$$\frac{1}{[aa]} N_1^2$$

wenn man, während y, z ... ihre zuerst angenommenen Werthe behalten, denjenigen von x so verändert, dass der Ausdruck, welcher zuvor N_1 war, zu Null gemacht wird. Dies wird bewirkt durch eine solche an x anzubringende Aenderung Δx, welche ist

$$\Delta x = -\frac{N_1}{[aa]}$$

und der hiedurch verbesserte Werth $x + \Delta x$ ist jetzt offenbar derjenige der ersten Unbekannten, welcher zu den vorerst angenommenen Werthen der übrigen Unbekannten *am bessten passt,* und der für jene dann der plausibelste wäre, wenn die vorläufigen Werthe der übrigen als deren wahre Werthe schon bekannt wären.

Die Aenderung von x, welche an die Stelle von N_1 den Werth $N_1' = 0$ treten lässt, wird gleichzeitig die Werthe von $N_2, N_3, \ldots$ umändern in

$$N_2' = N_2 + [ab]\, \Delta x$$
$$N_3' = N_3 + [ac]\, \Delta x$$
etc.

Hätte man, anstatt y, z ... festzuhalten und x zu corrigiren um $-\frac{N_1}{[aa]}$, vielmehr x, z ... bei ihren ersten Werthen belassen,

und y corrigirt um $-\frac{N_2}{[bb]}$, so würde man offenbar die Summe Q ebenfalls von ihrem Anfangswerthe aus vermindert haben, und zwar um die Grösse $\frac{N_2^2}{[bb]}$; ebenso hätte man dieselbe Summe vermindert um $\frac{N_3^2}{[cc]}$ wenn man z allein und zwar um $-\frac{N_3}{[cc]}$ vom Anfangswerthe aus corrigirt hätte.

Denkt man sich also, dass nachdem x um $\Delta x = -\frac{N_1}{[aa]}$ corrigirt worden, und nachdem hiedurch die Grössen

$$\begin{aligned} N_1' &= 0 \\ N_2' & \\ N_3' & \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

an die Stelle von N_1, N_2, N_3 ... getreten sind, jetzt in zweiter Instanz etwa der Variablen y eine solche Correction

$$\Delta y = -\frac{N_2'}{[bb]}$$

beigelegt werde, vermöge deren $y + \Delta y$ den Zahlenwerth erhält, welcher zu dem Werthsystem

$$x + \Delta x\ ,\ z\ ,\ \ldots$$

der übrigen Unbekannten am bessten passt, — so wird nun auch diese zweite Aenderung die Summe der Fehlerquadrate Q weiter vermindern um

$$\frac{N_y'^2}{[bb]}$$

nachdem sie schon zuvor von ihrem ersten Werthe ab um $\frac{N_1^2}{[aa]}$ verringert worden war.

Diese Aenderung des Werthes von y setzt an die Stelle der Grössen

$N_1' = o$, N_2' , N_3' , ... abermals neue Grössen N_1'' , $N_2'' = o$, N_3'' etc., wobei man hat

$$\begin{aligned} N_1'' &= N_1' + [ab]\,\Delta y = [ab]\,\Delta y \\ N_2'' &= N_2' + [bb]\,\Delta y = o \\ N_3'' &= N_3' + [bc]\,\Delta y \end{aligned}$$

etc.

Würde man jetzt an dritter Stelle etwa die Variable z so corrigiren, dass der neue Werth $z + \Delta z$ möglichst gut zu dem System passen würde, welches aus $x + \Delta x$, $y + \Delta y$ und den Anfangswerthen der späteren Unbekannten gebildet wäre, so würde man die Summe der Fehlerquadrate aufs Neue, und zwar um die Grösse

$$\frac{N_3''^2}{[cc]}$$

verringern; dagegen würde man sie um

$$\frac{N_1''^2}{[aa]}$$

verringern, wenn man jetzt schon auf die Variable x zurückkommen, und (da $x + \Delta x$ nicht mehr der Werth ist, welcher zum Systeme $y + \Delta y$, z , ... am bessten passt) an x eine zweite Correktion $-\frac{N_1''}{[aa]}$ anbringen wollte.

Wenn man also, von irgend welchem Systeme von Anfangswerthen ausgehend, und in irgend welcher Aufeinanderfolge der Unbekannten (wobei es nicht gerade nöthig ist, den ganzen Cyklus derselben durchzugehen, ehe man wieder auf eine schon verbesserte zurückkommt), successive Correctionen an den Unbekannten anbringt, indem man Sorge trägt, die jedesmalige Verbesserung einer jeden immer so zu bestimmen, dass durch dieselbe diejenige Normalgleichung erfüllt wird, in der die betreffende Unbekannte die ausgezeichnete Stellung in der Diogonale einnimmt, — so verringert man Schritt für Schritt die Summe der Fehlerquadrate (und zwar jedesmal um eine sofort angebbare Grösse der Form $\frac{N^2}{[aa]}$ oder $[aa]\,\Delta x^2$), solange an ihr noch etwas zu verringern ist. Denn di zu erzielenden Verminderungen von Q und die an den Unbekannten anzubringenden Correctionen (letztere von der Form

$-\frac{N}{[aa]}$) werden erst dann unmerklich, wenn gleichzeitig alle N auf verschwindend kleine Werthe herabgebracht worden sind. Ist aber dieses Endziel erreicht, so sind auch durch die wiederholt verbesserten Werthe der Unbekannten alle Normalgleichungen (B) zugleich erfüllt, und die Unbekannten haben sonach ihre wahrscheinlichsten Werthe.

Es verdient bemerkt zu werden, dass der Beweis der beständigen Verkleinerung von Q und also der Convergenz dieses Approximationsverfahrens durchaus auf der Voraussetzung beruht, dass man für eine jede Variable jede ihrer successiven Verbesserungen gemäss derjenigen Gleichung bildet, in welcher diese Variable in der Diagonale vorkommt; denn wenn man etwa in irgend einem Systeme lineärer Gleichungen mit gleich vielen Unbekannten von einem beliebigen Werthsysteme derselben ausgehen und successive Verbesserungen so anbringen wollte, dass man die Correction von x stets gemäss einer bestimmten, beliebig ausgewählten, unter den Gleichungen bestimmen würde, ebenso die Correction von y gemäss einer andern willkührlich ausgewählten Gleichung etc., — so würde sich durchaus nicht allgemein beweisen lassen, dass man sich dem wahren Systeme der Werthe der Unbekannten ohne Ende nähert, — es könnte vielmehr (wie man sich leicht überzeugt) sehr wohl geschehen, dass die successiven Werthe der nehmlichen Unbekannten schliesslich ins Unendliche wachsen, oder beständig zwischen endlich auseinander liegenden Grenzen oscilliren.

Wohl aber kann man auch jedes beliebige System lineärer Gleichungen mit gleich vielen Unbekannten in die Normalform (B) bringen, genau nach der auf die Gleichungen (A) angewendeten Vorschrift, und aus dieser Form ist es nach unserer Methode ganz ebenso auflösbar, wie die aus Beobachtungen abgeleiteten Normalgleichungen. Das endlose Umherschwanken oder unendliche Wachsen der aufeinander folgenden Werthe der Veränderlichen ist bei einem Gleichungssysteme dieser besondern Art, und bei unserer Art dasselbe zu behandeln, von vornherein abgeschnitten, weil bewiesen ist, dass man hier dem Ziele, die Quadratsumme Q zu verkleinern, sich mit jedem Schritte nähert, und dass man erst dann dieselbe um nichts Merkliches mehr verkleinert, wenn alle Gleichungen (B) bis auf verschwindend kleine

Grössen erfüllt sind, sonach alle Unbekannten bei ihren definitiven Werthen angelangt sind. Die Summe Q existirt natürlich ebensogut bei einem streng zu erfüllenden Systeme Gleichungen mit der zulässigen Zahl von Unbekannten, wie bei Beobachtungsgleichungen; der einzige Unterschied besteht darin, dass im ersten Falle der Minimalwerth, den sie zuletzt erhält, gleich Null ist.

Der Vorzug gewisser Convergenz, welchen die Normalform (B) der Gleichungen für unsere Art der Auflösung vor beliebigen anderen Formen darbietet, ist natürlich in den auszeichnenden Eigenschaften ihres Coefficientensystemes begründet, welche keineswegs in der Symmetrie um die Diagonale erschöpft sind, und deren wichtigste darin besteht, dass jede aus dem Systeme ausgehobene Unterdeterminante positiv ist, wenn sie zur Diagonale ein Stück der Diagonale des ganzen Systems hat.

Es versteht sich, dass unsere Methode um so schneller zum Ziele führen wird, je mehr die angenommenen Initial-Werthe von x , y , z ... der Wahrheit bereits nahe kommen. Für die Gewissheit endlicher Convergenz der Rechnung ist aber der Besitz auch nur annähernd richtiger Anfangswerthe in keiner Weise erforderlich.

In jedem Stadium der Rechnung wäre es strenge genommen das rationellste, zunächst diejenige Variable zu verbessern, durch deren Correctur die Summe der Fehlerquadrate am meisten verringert wird. So einfach indessen der Betrag zu erkennen ist, um welchen diese Summe im Einen oder im andern Falle sich verkleinert, so wird es doch in der Anwendung wohl gewöhnlich schneller zum Ziele führen, wenn man hierin nach dem blosen Ueberblick rasch vorgeht, als wenn man jedesmal nach dem Prinzip systematisch wählt.

Es ist schon hervorgehoben worden, dass es keineswegs nothwendig ist, der Reihe nach alle Unbekannten, eine um die andere zu verbessern, sondern dass man sehr wohl auf eine Variable zurückkommen kann, ehe alle andern gleich oft mit jener corrigirt sind. Dass man aber zu dem definitiven Werthsysteme im Allgemeinen nicht gelangen kann, ohne alle Unbekannten verbessert zu haben, ist an sich evident, und würde sich bei unserm Verfahren auch dadurch manifestiren, dass für die Herabdrückung des Werthes der der vernachlässig-

ten Unbekannten entsprechenden Grösse N, oder was dasselbe heisst, für Erfüllung derjenigen Normalgleichung, in welcher diese Unbekannte die ausgezeichnete Stelle einnimmt, „nichts geschehen wäre.[1])

3.

Die Vorschrift, jederzeit den verbesserten Werth einer Unbekannten so zu bestimmen, wie er aus derjenigen Gleichung, in welcher diese Unbekannte die Diagonale einnimmt, durch Substitution der für die andern Unbekannten bis dahin abgeleiteten Werthe sich ergibt, kann auch anders in Worte gefasst werden, und zwar so, dass man die Normalgleichung für x

$$[aa]\ x + [ab]\ y + \cdots + [an] = o$$

gar nicht als gebildet voraussetzt, sondern nur mit den einzelnen Beobachtungsgleichungen agirt, in welchem die Unbekannte x vorkommt, und welche die Form haben

$$a_1\ x + b_1\ y + c_1\ z + \cdots + n_1 = o$$
$$a_2\ x + b_2\ y + c_2\ z + \cdots + n_2 = o$$
$$\text{etc.}$$

Der Werth von x, welcher zu angenommenen Werthen der andern Unbekannten y , z , ... „am bessten passt", oder aus der obigen Normalgleichung sich ergibt, ist nämlich kein anderer, als das arithmetrische Mittel, mit Rücksicht auf Gewichte, aus all den Einzelbestimmungen, die sich, unter Voraussetzung der angenommenen Werthe der übrigen Unbekannten y , z , ... als ihrer wahren Werthe, für x aus den verschiedenen Beobachtungs-Gleichungen ergeben, in welchen diese Grösse vorkommt. Denn ist, wie schon im Anfange, vorausgesetzt, dass die einzelnen Beobachtungsgleich-

1) Das in § 1 erwähnte von Jacobi angegebene Auflösungsverfahren läuft ebenfalls nach allen seinen lineären Substitutionen so aus, dass die Werthe der letzten Unbekannten durch solche successive Correctionen, wie sie hier proponirt sind, sich bestimmen. Aber die ganze vorbereitende Rechnung, durch welche die Coefficienten ausserhalb der Diagonale bei Jacobi herabgebracht werden, so dass sie zu kleinen Grössen erster Ordnung werden, — worin der Schwerpunkt seiner Methode liegt, und die in der Anwendung sehr mühsam ist, fällt in unserem Rechnungsgange weg, weil der Beweis geführt ist, dass man einer solchen Vorbereitung der Normalgleichungen nicht bedarf, um sich mit Sicherheit dem Ziele zu nähern. Uebrigens war die Umgestaltung der Normalgleichungen in dem speziellen Falle, welcher Jacobi zur Aufstellung seines Verfahrens Anlass gab, nach den besondern Bedingungen desselben, viel mehr indicirt, als sie im gewöhnlichen Falle sein würde.

ungen bereits mit solchen Factoren versehen worden sind, vermöge deren sie alle gleichen „wahrscheinlichen Fehler“ v oder Ein und dasselbe Gewicht 1 haben, und denkt man sich, die Werthe der y , z , ... seien als richtig bekannt, so wird man für x aus den einzelnen Beobachtungen der Reihe nach die Bestimmungen erhalten

$$x = -\frac{b_1}{a_1} y - \frac{c_1}{a_1} z - \ldots - \frac{n_1}{a_1}$$
$$x = -\frac{b_2}{a_2} y - \frac{c_2}{a_2} z - \ldots - \frac{n_2}{a_2}$$

welche der Reihe nach die wahrscheinlichen Fehler haben $\frac{v}{a_1}, \frac{v}{a_2}, \ldots$ oder die Gewichte a_1^2 , a_2^2 , ... Denkt man sich daher jeden der Werthe von x , die zum arithmetischen Mittel zusammen genommen werden sollen, so oft angesetzt, als seinem Gewichte entspricht, oder mit anderen Worten, vor der Addition der letzten Gleichungen jede mit ihrem Gewichte multiplicirt, so erhält man für das arithmetische Mittel unter Anwendung der Klammern als Summenzeichen

$$[aa]\, x = -[ab]\, y - [ac]\, z - \ldots - [an]$$

d. h. der nach unserer Vorschrift gebildete Mittelwerth ist derselbe, welchen man für x aus seiner Normalgleichung findet.

In der hiedurch begründeten Weise habe ich, ohne die Normalgleichungen für die Lichtmengen der unter sich verglichenen Sterne zu bilden, das in Rede stehende Verfahren zur Ableitung ihrer wahrscheinlichsten Werthe in meiner oben citirten photometrischen Abhandlung angewandt. In den gewöhnlichen Fällen jedoch, wo die Coefficienten a , b , etc. nicht so einfache Zahlen sind, wie sie in jenem Beispiele waren, und wo desshalb die Ableitung des arithmetrischen Mittels der einzelnen Bestimmungen der Unbekannten sich nicht so einfach gestaltet wie dort, wird die wirkliche Bildung der Normalgleichungen vorzuziehen sein.

4.

Um unter Voraussetzung, dass die Normalgleichungen (B) gebildet worden sind, den Gang der Rechnung noch etwas näher zu erläutern, sei angenommen, dass in einem gewissen Stadium ihres Fortganges zufolge der bis dahin vorgenommenen successiven Correktionen für die Variablen x , y , z ... die Werthe vorliegen X , Y , Z ... Der Ausdruck

$$X + \frac{[ab]}{[aa]} Y + \frac{[ac]}{[aa]} Z + \cdots + \frac{[an]}{[aa]}$$

(welcher nach der ersten Normalgleichung o sein würde, wenn X , Y ... die wahrscheinlichsten Werthe wären) möge in diesem Momente der Rechnung den Zahlenwerth haben ξ:

D) $$\xi = X + \frac{[ab]}{[aa]} Y + \cdots + \frac{[an]}{[aa]}$$

so dass also, wenn das gewählte Stadium mit dem Anfange der ganzen Rechnung coincidirt, [aa] ξ gleich ist der vorher mit N_1 bezeichneten Grösse, während unmittelbar nach einer an x angebrachten Berichtigung $\xi = o$ sein würde, weil die letzte Verbesserung von x, durch welche diese Unbekannte den Werth X erhielt, aus der ersten Normalgleichung selbst bestimmt worden ist. Seit diesem Stadium I der Rechnung mögen nun, ehe man zu einer Verbesserung von X schreitet, die übrigen Variablen von ihren Werthen Y , Z , ... aus noch Correctionen Δy , Δz , ... etc. erhalten haben. In Folge dessen ist an die Stelle des Zahlenwerthes ξ getreten

$$\xi + \frac{[ab]}{[aa]} \Delta y + \frac{[ac]}{[aa]} \Delta z + \cdots$$

wobei möglicherweise in der Summe auch mehrere successive Correctionen Ein und derselben Variablen, z. B. ein $\Delta_1 y$, $\Delta_2 y$, beide mit demselben Coefficienten multiplizirt, auftreten können, wenn nämlich seit dem Stadium I der Rechnung dieselbe Variable y mehrmals corrigirt worden ist. Dagegen kommen in dem Ausdrucke Cor-

rectionen solcher Unbekannten nicht vor, welche seit der Berechnung von ξ keine weitere Berichtigung erhalten haben.

Um nun durch eine an X anzubringende Verbesserung Δx zu bewirken, dass die Normalgleichung für x wieder genau erfüllt wird, muss man offenbar machen

$$E) \ldots \qquad \Delta x = -\xi - \frac{[ab]}{[aa]}\Delta y - \frac{[ac]}{[aa]}\Delta z - \ldots$$

Bei der Berechnung dieser Grösse wird man nur wenig Decimalen anzuwenden haben; denn so lange man den wahren Werthen der Unbekannten noch nicht sehr nahe ist, wäre es illusorisch, ihre Verbesserungen sogleich mit bedeutender Genauigkeit suchen zu wollen, — sind aber die noch übrigen Correctionen einmal sehr klein geworden, so haben sie auch nur mehr wenige in Betracht kommende Ziffern. Die Anzahl der Stellen, mit welchen man zu operiren hat, vermindert sich aus letzterem Grunde schliesslich von Stufe zu Stufe. Nur bei Bildung der Grösse ξ, welche aber in den späteren Stadien der Rechnung annullirt ist, wird man unter Umständen etwas mehr Stellen gebrauchen, weil sie vielleicht ihren relativ kleinen Werth durch gegenseitiges Sich-Aufheben grösserer Glieder erhält.

Wenn man den Moment unmittelbar nach Berechnung unseres Δx Stadium II nennt, so ist nunmehr die Grösse ξ', welche an die Stelle von ξ tritt, $= 0$ (sowie nach dem oben Gesagten auch ξ schon selbst Null war, wenn Stadium I unmittelbar nach einer Berichtigung von x fiel). Bei der später folgenden weiteren Berichtigung von x hat man es also nur mit Gliedern der Form

$$-\frac{[ab]}{[aa]}\Delta y - \ldots$$

zu thun.

Durch die berechnete Verbesserung von x (Uebergang von X zu $X + \Delta x$) wird die Summe der Fehlerquadrate vermindert um die Grösse

$$[aa]\,\Delta x^2$$

Sobald Δx gebildet ist, multiplicirt man es mit all den Grössen

$$-\frac{[ab]}{[bb]}, -\frac{[ac]}{[cc]}, \ldots$$

welche in den Normalgleichungen derjenigen Unbekannten vorkommen, mit welchen x durch Beobachtungs-Gleichungen in Verbindung gesetzt ist, — und schreibt sich also in den der Gl. E analogen Gleichungen

$$E') \qquad \begin{aligned} \Delta y &= -\eta - \frac{[ab]}{[bb]}\Delta x - \frac{[bc]}{[bb]}\Delta z - \dots \\ \Delta z &= -\zeta - \frac{[ac]}{[cc]}\Delta x - \frac{[bc]}{[cc]}\Delta y - \dots \end{aligned}$$

etc.

sofort das betreffende Glied numerisch an, wobei es sich auch empfehlen mag, dasselbe sogleich mit der vorher hier schon zur Rechten stehenden Zahl zu vereinigen. Der Act einer einzelnen Correction z. B. an der Variablen x besteht hiernach nur darin, dass man die in Gl. E seit der letzten Correction von x rechts aufgelaufenen in Zahlen fertig vorliegenden Glieder zusammen addirt, dass man ihre Summe Δx als neue Correction dem bis dahin erhaltenen Werthe von x beifügt, und sofort in den Ausdrücken von Δy , ... die neuen Summanden $-\frac{[ab]}{[bb]}\Delta x$, etc. ansetzt. Es kommt dabei ganz allein auf Pünktlichkeit in der Ausführung dieser höchst einfachen Operationen an, — so zu sagen auf genaue Buchführung. Es wird namentlich nöthig sein, sich genau die Reihenfolge zu notiren in welcher die verschiedenen Variablen verbessert worden sind, damit man sich von der Entstehung der einzelnen Summanden stets Rechenschaft geben kann. In Fällen, wo man genöthigt ist, eine etwas grössere Anzahl successiver Correctionen anzubringen, wird man wohl thun, dazwischen an irgend einer Stelle mit den bis dahin erlangten Näherungswerthen X , Y , Z , ... der Unbekannten sich die Grössen

$$\begin{aligned} \xi &= X + \frac{[ab]}{[aa]}Y + \frac{[ac]}{[aa]}Z + \dots + \frac{[an]}{[aa]} \\ \eta &= Y + \frac{[ab]}{[bb]}X + \frac{[bc]}{[bb]}Z + \dots + \frac{[bn]}{[bb]} \\ \zeta &= Z + \frac{[ac]}{[cc]}X + \frac{[bc]}{[cc]}Y + \dots + \frac{[cn]}{[cc]} \end{aligned}$$

etc.

direct zu rechnen, und sich nicht darauf zu verlassen, dass z. B. unmittelbar nach einer Correction von x ξ den Werth o haben musste; man wird dadurch die Fortpflanzung eines etwa begangenen Fehlers durch einen grösseren Theil der Rechnung abschneiden, übrigens, wenn etwa ein solcher entdeckt würde, im allgemeinen nicht veranlasst sein, den fehlerhaften Theil der Rechnung zu berichtigen, sondern nur nach Richtigstellung der jetzt vorliegenden Werthe von ξ , η , ... von da ab weiter rechnen, um die Grössen X , Y , ... zu corrigiren, — weil in der Regel diese Werthe doch bereits der Wahrheit näher liegen werden, als die, von welchen man ausging.

Soll die definitive Bestimmung einer Unbekannten x etwa bis auf $\frac{1}{100}$ derjenigen Grösse genau werden, um welche die einzelnen Bestimmungen dieser Unbekannten von einander abweichen, oder um welche man vom Anfange an unsicher über ihren wahrscheinlichsten Werth sein kann, — so muss das Gewicht der probabelsten Bestimmung von x sich 10000 mal höher stellen, als das der Bestimmung aus einer einzelnen Beobachtung. Da dieser Fall äusserst selten realisirt sein wird, so ist es evident, dass es fast immer verlorene Mühe wäre, mehr als drei giltige Ziffern in der Verbesserung des Werthes einer Unbekannten erreichen zu wollen.

Dem schon mehrfach citirten älteren Beispiele entnehme ich noch die Anführung (p. 93 meiner älteren Abhandlung), dass dort eine zweimalige Durchrechnung durch das ganze System der Unbekannten nebst einigen partiellen Correctionen genügt hat, um die vierte Decimale rechnerisch festzulegen, während die Differenzen der einzelnen Beobachtungen die zweite betreffen.

5.

Die erlangte Uebung in der Anwendung irgend eines Rechnungs-Verfahren pflegt für die vortheilhafteste Handhabung desselben stets noch gewisse Directiven zu geben, welche sich durch theoretische Erörterung überhaupt nicht, und am wenigsten bei einer noch neuen Methode ersetzen lassen. Doch will ich Eines speciellen Umstan-

des Erwähnung thun, auf welchen ich bei der Ausgleichung meines photometrischen Netzes aufmerksam geworden bin. Man denke sich, dass in einem besondern Falle etwa die zwei Coefficienten

$$\frac{[ab]}{[aa]} \quad \text{und} \quad \frac{[ab]}{[bb]}$$

beide relativ beträchtliche Werthe haben (ihr Product ist übrigens nothwendig immer kleiner als Eins). Es wird dies dann der Fall sein, wenn durch die Beobachtungen zwischen den Variablen x und y ein solcher Connex hergestellt ist, dass der Werth einer jeden von diesen beiden vorzugsweise stark von dem Werthe der andern beeinflusst wird, wie dies aus den Normalgleichungen, z. B. in ihrer Form E , E ' ersichtlich ist. Jede Aenderung Δx wird alsdann ein nicht unbeträchtliches Δy erzeugen, — da aber dieses letztere auch wieder relativ stark auf Δx zurückwirkt, u. s. w. (in abnehmender geometrischer Progression), so wird man hier gut thun, den Einfluss von Δx auf weitere Variable z . . . erst dann zu berechnen, wenn Δx schon gemäss seiner Verbindung mit Δy corrigirt ist, also so zu sagen erst die zwei Variablen x und y unter sich abzugleichen, ehe man auf die andern übergeht. Uebrigens kann man leicht alle die sekundären, tertiären etc. Aenderungen summiren, welche an x selbst dadurch erzeugt werden, dass ein primär berechnetes $\Delta x = \alpha$ eine Aenderung $\Delta y = - \frac{[ab]}{[bb]} \alpha$ erzeugt, die dann auf x mit dem Betrage $+ \frac{[ab]}{[aa]} \frac{[ab]}{[bb]} \alpha$ zurückwirkt etc.; die ganze Veränderung von x wird hier die Summe der geometrischen Reihe

$$\alpha \left(1 + \frac{[ab]\,[ab]}{[aa]\,[bb]} + \ldots \right)$$

$$= \frac{1}{1 - \frac{[ab]\,[ab]}{[aa]\,[bb]}}$$

oder nach der gewöhnlichen und oben bei C) erwähnten Schreibweise, $= \alpha \frac{[bb]}{[bb.1]}$; so dass also die zuerst indicirte Aenderung α an x wegen der Verbindung zwischen dieser Grösse und y (nach welcher y bis zu einem gewissen Grade sich dem x accomodiren muss) noch einen sie jederzeit vergrössernden Factor erhält $\frac{[bb]}{[bb.1]}$. In gleicher Weise summirt sich hier die durch jenes α veranlasste Aenderung an y im Ganzen auf $-\alpha \frac{[ab]}{[bb.1]}$, indem ihr zuerst entstehender Bestandtheil $-\alpha \frac{[ab]}{[bb]}$ durch die secundären etc. Glieder denselben vergrössernden Factor $\frac{[bb]}{[bb.1]}$ erhält, der bei Δx sich ergibt.

Gerade so, wie hier x und y zu einer Gruppe zusammengenommen werden, die man für sich zusammenstimmt, ehe man von ihnen aus zu anderen Variablen übergeht, — kann auch der Fall vorkommen, wo es nützlich erfunden wird, jedesmal die Veränderlichen eines etwas ausgedehnteren partiellen Systems unter sich abzugleichen, ehe man von ihnen aus in der Rechnung auf sozusagen ferner liegende Unbekannte übergeht. Auch für solche Verbindungen von mehr als zwei Veränderlichen beweist man leicht, dass jede zuerst an x nach Vorschrift der Gleichung E) angebrachte Correction noch eine nachträgliche Verstärkung erhält durch die Rückwirkung auf x aller durch sie selbst an y , z , ... hervorgerufenen Aenderungen, also so zu sagen durch ihren eigenen Reflex; nur wird, je mehr Veränderliche man mit einander behandelt, desto leichter dieser Effect unkenntlich gemacht werden durch die Vermischung mit Correctionsgliedern von anderer Abstammung.

6.

Die Zulassung engerer Grössen-Complexe innerhalb des weiteren führt uns über auf die Bemerkung, dass überhaupt vielleicht der wichtigste Vorzug, der bei ausgedehnten Systemen von Unbekannten der vorgeschlagenen Rechnungsart zukommen möchte, gerade darin

besteht, dass sie es leicht macht, aus abgetheilten Beobachtungssystemen, von welchen etwa jedes für sich schon ausgeglichen ist, ein Ganzes zu bilden und dasselbe strenge einheitlich abzugleichen. Man stelle sich einen Fall vor, ähnlich demjenigen, der vorliegt, wenn die Triangulationen von zwei aneinanderstossenden Ländern oder auch nur zwei sich anliegende Polygone eines Dreiecknetzes in Verbindung gebracht werden sollen; d. h. man nehme an, dass das Beobachtungsmaterial (niedergelegt in Gleichungen der Form A), welches sehr viele Unbekannte enthalten mag, sich unter zwei Rechner so vertheilen lässt, dass die Gleichungen, welche gewisse Unbekannte enthalten, ausschliesslich dem ersten, diejenigen mit anderen Unbekannten ausschliesslich dem zweiten zugewiesen werden, und dass nur verhältnissmässig wenig Unbekannte einer dritten oder intermediären Gruppe durch Beobachtungsgleichungen einerseits mit Variablen des ersten und andererseits mit solchen des zweiten Systemes in Verbindung gebracht sind, und so den Zusammenhang beider Systeme vermitteln. Die Normalgleichungen (in der Form E, E^1) für die Unbekannten dieser verbindenden Art müssen von beiden Rechnern (natürlich übereinstimmend) angesetzt werden: ihre Glieder zur Rechten (auch die Complexe $\xi . \eta \ldots$) werden von selbst in drei Theile zerfallen, die Unbekannten des ersten, des zweiten und des intermediären Systems, resp. deren Correctionen, enthaltend. Ausserdem hat jeder Rechner vor sich die Normalgleichungen für die ihm allein zugetheilten Unbekannten. Indem nun ausgeglichen wird, muss von Zeit zu Zeit an gewissen Abschnitten der Arbeit jeder Rechner dem andern für die Normalgleichungen der gemeinsamen Unbekannten die Zahlenwerthe derjenigen Glieder mittheilen, welche aus den Correctionen der Unbekannten erwachsen sind, die dem Empfänger der Mittheilung fremd sind: die beiderseitigen Beiträge an solchen Gliedern sind mit einander und mit den Gliedern der gemeinsamen Art numerisch zusammenzulegen zur Bildung derjenigen Correctionen der intermediären Unbekannten, mit welchen jetzt jeder der beiden Rechner auf die Unbekannten seines Systemes zurückkommt. Gesetzt, man hätte zuerst mit Ignorirung der Verbindungsgleichungen jedes der zwei Hauptsysteme selbstständig ausgeglichen, so würde diese Arbeit, wenn man jetzt die Verbindung herstellen und das Ganze einheitlich

bearbeiten will, durchaus nicht als eine verlorene anzusehen sein; denn weil hiernach jedenfalls für die grosse Mehrzahl der Unbekannten die Werthe schon sehr nahe den definitiv wahrscheinlichsten gebracht wären, so würde eine desto schnellere Convergenz für die noch übrigen Schritte zu erwarten sein. Uebrigens müsste man beachten, dass für diejenigen Unbekannten, welche beide Systeme in Verbindung bringen, natürlich die Coefficienten in den Normalgleichungen sich ändern, wenn Beobachtungen jetzt mit in Betracht kommen, von welchen vorher keine Notiz genommen war.

7.

Noch einfacher als der soeben besprochene Fall ist der andere, wo für eine Anzahl Unbekannter, deren wahrscheinlichste Werthe man aus einem abgeschlossenen Beobachtungs-Systeme ermittelt hat, neue Beobachtungen, vielleicht wieder ein ganzes System von solchen, aufgestellt worden sind. Da durch den Hinzutritt derselben die Coefficienten [aa], [ab] etc. der Normalgleichungen sich durchaus verändern, so muss man nach der gewöhnlichen Auflösungsart Alles neu rechnen, und wird höchstens unter Umständen den Vortheil benützen können, mit weniger Decimalen zu rechnen, soferne die noch zu erwartenden Verbesserungen der Unbekannten beträchtlich kleiner ausfallen werden, als die früher bestimmten. Sich etwa so zu helfen, dass man aus dem neuen Systeme die Unbekannten unabhängig berechnet, und dann aus dem nach dem ersten System und aus dem nach dem zweiten erhaltenen Werthe von x das Mittel mit Rücksicht auf Gewichte nimmt, — wäre, wenn man mit mehr als Einer Unbekannten zu thun hat, keineswegs ein strenges Verfahren: es würde nicht den nach allen Beobachtungen nunmehr wahrscheinlichsten Werth von x liefern, und kann ihn schon desshalb nicht liefern, weil bei dieser Art vorzugehen auf die Verbindung der Unbekannten nicht Rücksicht genommen wird, vermöge deren immer ein anderer Werth für x der probabelste wird, je nachdem y, z ... sich verändern. Nach unserer Methode der Annäherung bildet man durch Summation der Werthe von [aa] etc. aus den beiden Systemen die Normalgleichungen für das vereinigte Material in ihrer Form B); bringt sie, indem man von den bereits vorliegenden genäherten Werthen der

Unbekannten ausgeht, in die Form E), und wird nun mit um so kleineren Werthen der Correctionen Δx etc. zu thun bekommen, also um so schneller zum Ziele der systematischen Ausgleichung gelangen, je näher schon aus den alten Beobachtungen die richtigen Werthe der Unbekannten hervorgegangen waren.

8.

Wenn man bei Anwendung des hier vorgeschlagenen Rechnungsganges das Gewicht der Bestimmung irgend einer Unbekannten ermitteln will, so kann man dazu ausgehen von folgendem Satze, der als die Definition des Ausdruckes „Gewicht" angesehen werden kann [1]):

„Die Bestimmung einer Zahl g als wahrscheinlichster Werth von x aus einem gewissen Beobachtungssysteme hat dann das Gewicht p, wenn durch den Hinzutritt einer neuen Beobachtung vom Gewichte 1, welche ergeben hätte

$$x = g + u$$

der wahrscheinlichste Werth von x sich vergrössern würde um $\frac{u}{p+1}$ *(so dass er jetzt, und zwar mit dem Gewichte* $p + 1$*, bestimmt wäre* $= g + \frac{u}{p+1}$*)."*

Um also das Gewicht der erlangten Bestimmung von x zu finden, fingire man, dass zu den Beobachtungsgleichungen, aus welchen x berechnet war, noch eine neue vom Gewichte 1 hinzutrete, welche für x ergeben hätte den vorher gefundenen Werth, verändert um eine willkührlich angenommene Grösse u (die man numerisch wählen kann). Durch diese Fiction wird nur die Normalgleichung für x verändert (indem an die Stelle von [aa] tritt [aa] + 1 und an die Stelle von [an] ··· [an] — der fingirte neu beobachtete Werth von x. Aus der hiernach abgeänderten Normalgleichung E berechnet man nun, gemäss unserer Vorschrift, eine primäre Correction von x, die an den übrigen Variablen entsprechende Correctionen erzeugt, welche auf x wieder

1) Mit den Determinanten-Ausdrücken für die Werthe der Unbekannten und der Gewichte beweist man ganz leicht, dass obige Definition des Gewichtes mit der Gauss'schen Rechnungsvorschrift in Einklang steht.

zurückwirken etc., — bis das Verfahren der successiven Annäherung wieder zu stehenden Werthen führt. Ergibt sich dann der neue schliessliche Werth von x verschieden von dem alten um v, so ist $v = \frac{u}{p+1}$, also $p = \frac{u-v}{v}$.

Die Rechnungsvorschrift kann noch etwas einfacher, nur mit nicht ganz so einleuchtender Begründung, so gestellt werden: *„Um das Gewicht p des gefundenen Werthes von x zu bestimmen, denke man sich lediglich die (in ξ steckende) Grösse [an] um einen willkürlichen Betrag — ϱ gegen vorher verändert. Die Veränderung, welche hiedurch nach allen Abgleichungen am definitiven Werthe von x sich ergibt, ist alsdann ϱ : p.“* Die Determinanten-Ausdrücke für die Gewichte beweisen nämlich, dass diese Vorschrift mit der vorigen, sowie mit der Gaussischen, in Einklang steht.

Da fast immer eine genaue Bestimmung des Gewichtes zwecklos sein würde (indem man aus bekannten Gründen den damit berechneten Werth des wahrscheinlichen Fehlers von x doch für zu klein halten muss), so wird auch in derjenigen Rechnung, durch welche es ermittelt wird, kein sehr hoher Grad von Annäherung zu erstreben sein.

Es sei gestattet, hier in Betreff der Gewichte eine Anmerkung beizufügen, ungeachtet der Möglichkeit, dass deren Inhalt nicht ganz neu wäre. Bekanntlich hängt das Gewicht z. B. der Bestimmung von x gar nicht ab von der Uebereinstimmung der verschiedenen Beobachtungen, welche zu ihr beitragen, unter sich, sondern allein von ihrer Anordnung; denn in seinem Ausdrucke kommen die Grössen n gar nicht vor, durch deren Abänderung man doch die Harmonie der Beobachtungen unter sich beliebig erhöhen oder vermindern könnte [1]). Da nun eine Beobachtung mehr unsere Kenntniss nur vergrössern, nie vermindern kann, so kann ihr Hinzutreten zu dem schon vorhandenen Materiale auch die Gewichte der Unbekannten unmöglich vermindern. Wenn

1) Dagegen hängt der Werth für den „wahrscheinlichen Fehler“ einer einzelnen Beobachtung und in Folge dessen auch der Bestimmung einer Unbekannten sehr stark ab von der Harmonie der Beobachtungen unter sich.

man sonach aus irgend einem System von Beobachtungen ein kleineres System aushebt (z. B. ein Polygon aus einem Dreiecksnetze) und in diesem für sich die Unbekannten und ihre Gewichte bestimmt, so kann man wohl kleinere, aber nie grössere Gewichte finden, als man bei einheitlicher Ausgleichung des grossen Systemes erhalten würde. Man kann sich also auf diese Weise, und zwar unter Umständen relativ leicht, eine untere Limite für das Gewicht einer Variablen verschaffen, und da es wichtiger ist, dass man dasselbe nicht zu hoch, als dass man es nicht zu niedrig schätzt, so wird deren Aufstellung im Allgemeinen mehr Interesse darbieten, als die der oberen Limite, die vom Gewichte der Variablen nicht erreicht werden kann. Diese letztere hat man jederzeit sofort zur Hand; das Gewicht der Bestimmung von x ist nothwendig immer kleiner als [aa], weil es auf dem von Gauss angegebenen Wege gleich gefunden wird einer Grösse [aa . r], die aus der positiven Grösse [aa] durch wiederholtes Subtrahiren kleinerer positiver Grössen abgeleitet wird. Auch alle Grössen [aa . 1] , [aa . 2] etc., welche an die Stelle von [aa] treten, indem man andere Unbekannte als x eliminirt, sind grösser als das Gewicht für x.

9.

Schliesslich sei noch, der Vollständigkeit wegen, des Umstandes Erwähnung gethan, dass unsere Auflösungsmethode auch dann angewendet werden kann, wenn für die Unbekannten x , $\dot{y}$, ... neben den (möglicherweise durch Fehler entstellten) Beobachtungsgleichungen A) auch noch strenge zu erfüllende Bedingungsgleichungen

F)
$$\begin{aligned} \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z + \cdots + \nu_1 &= 0 \\ \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z + \cdots + \nu_2 &= 0 \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

existiren; obwohl sie nicht für diesen Fall aufgestellt ist, und ich nicht die Absicht habe, ihre Anwendung auf denselben zu empfehlen; denn bekanntlich kann man dem Auftreten dieses Falles und der mit ihm stets verbundenen, oft sehr bedeutenden Anhäufung überzähliger Unbekannten durch eine geeignete Wahl der Variablen stets vorbeugen. Auf welche Art dies z. B. in dem wichtigen Falle

der Berechnung eines auf dem Rotations-Ellipsoid gelegenen Dreiecknetzes sich ausführen lässt, gedenke ich in einer zweiten Abhandlung, zu welcher die gegenwärtige eigentlich nur eine Vorarbeit darstellt, des Näheren zu erörtern.

Die übliche Behandlung des in Rede stehenden Falles besteht bekanntlich darin, dass man vorerst statt der Grösse Q die Grösse

$$\begin{aligned} Q' = Q &+ \lambda_1 (\alpha_1 x + \beta_1 y + \cdots + \nu_1) \\ &+ \lambda_2 (\alpha_2 x + \beta_2 y + \cdots + \nu_2) \\ &+ \cdots \end{aligned}$$

zum Minimum macht: dabei bezeichnen λ_1 , λ_2 $\cdots$ für den Augenblick noch unbestimmte Coefficienten, so viele an der Zahl, als Bedingungsgleichungen vorhanden sind. Man erhält dadurch statt der Normalgleichungen B) die folgenden:

$$\begin{aligned} &[aa]\, x + [ab]\, y + [ac]\, z + \cdots + [an] + \alpha_1\lambda_1 + \alpha_2\lambda_2 + \cdots = 0 \\ G)\quad &[ab]\, x + [bb]\, y + [bo]\, z + \cdots + [bn] + \beta_1\lambda_1 + \beta_2\lambda_2 + \cdots = 0 \\ &[ac]\, x + [bc]\, y + [cc]\, z + \cdots + [cn] + \gamma_1\lambda_1 + \gamma_2\lambda_2 + \cdots = 0 \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad \text{etc.} \end{aligned}$$

Sind sie nach x , y , z , ... aufgelöst, so hat man diese Grössen durch die neuen Unbekannten λ_1 , λ_2 etc. ausgedrückt; man substituirt diese Ausdrücke in die Bedingungsgleichungen F, und hat hiernach zur Bestimmung der λ soviel Gleichungen, als solche Unbekannte vorhanden sind, — und zwar wieder lineäre Gleichungen, deren Coefficienten, wie im Systeme B), gegen die Diagonale symmetrisch sich stellen [1]), — die also auf dieselbe Art zu lösen sind, wie die Gleichungen B).

Der Unterschied, welchen dagegen die Gleichungen G) gegenüber den B) aufweisen, besteht darin, dass an die Stelle der Grössen [an] , [bn] etc. Polynome getreten sind von der Form $[an] + \alpha_1\lambda_1 + \alpha_2\lambda_2 + \cdots$ Aus der lineären Natur der Gleichungen G) folgt aber sofort, dass ihre Auflösungen bei dieser polynomischen Gestalt der von den x , y , ... unabhängigen Glieder nichts anderes sind, als die Summen der Einzelauf-

1) Ob ein Beweis, dass diese Form nothwendig immer zum Vorschein kommt, schon irgendwo publicirt ist, kann ich im Augenblicke nicht angeben; jedoch ist dieser Beweis mittelst der Determinanten-Ausdrücke für die x , y , ... leicht zu führen.

lösungen, welche man für x , y ... erhielte, wenn an der Stelle des letzten Gliedes entweder 1) nur die [an] , [bn] , [cn] etc. allein, — oder 2) nur die $\alpha_1\lambda_1$, $\beta_1\lambda_1$, $\gamma_1\lambda_1$ etc. allein, — oder 3) nur die $\alpha_2\lambda_2$, $\beta_2\lambda_2$, $\gamma_2\lambda_2 \cdots$ allein stünden; das heisst: löst man sich nach und nach folgende Gleichungssysteme auf:

$$
\begin{aligned}
&[aa]\,x + [ab]\,y + [ac]\,z + \cdots + [an] = o\\
1)\quad &[ab]\,x + [bb]\,y + [bc]\,z + \cdots + [bn] = o\\
&[ac]\,x + [bc]\,y + [cc]\,z + \cdots + [cn] = o\\
&\text{etc.}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&[aa]\,x + [ab]\,y + [ac]\,z + \cdots + \alpha_1 = o\\
2)\quad &[ab]\,x + [bb]\,y + [bc]\,z + \cdots + \beta_1 = o\\
&[ac]\,x + [bc]\,y + [cc]\,z + \cdots + \gamma_1 = o\\
&\text{etc.}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&[aa]\,x + [ab]\,y + [ac]\,z + \cdots + \alpha_2 = o\\
3)\quad &[ab]\,x + [bb]\,y + [bc]\,z + \cdots + \beta_2 = o\\
&[ac]\,x + [bc]\,y + [cc]\,z + \cdots + \gamma_2 = o\\
&\text{etc}
\end{aligned}
$$

und so fort (wobei in den Systemen 2) , 3) etc. die Glieder [an] , [bn] etc. nicht vorhanden sind) — und bezeichnet man momentan die aus 1) hervorgehenden Werthe von x , y , z ... mit x_0 , y_0 , z_0 etc., die aus 2) hervorgehenden mit x_1 , y_1 , z_1 etc., die aus 3) hervorgehenden mit x_2 , y_2 , z_2 etc. u. s. f., so werden die dem Systeme G) genügenden und in F) zu substituirenden Werthe der x , y , z ... offenbar sein:

$$
\begin{aligned}
x &= x_0 + x_1\lambda_1 + x_2\lambda_2 + \cdots\\
y &= y_0 + y_1\lambda_1 + y_2\lambda_2 + \cdots\\
z &= z_0 + z_1\lambda_1 + z_2\lambda_2 + \cdots\\
&\text{etc.}
\end{aligned}
$$

Da nun die Systeme 1) , 2) etc. aufgelöst werden können, wie früher das System B), und da dann Gleiches von dem Systeme F gilt, nachdem in ihm die Werthe der x , y ... durch die λ_1 , λ_2 , ... sub-

stituirt sind, — so ist der Fall auf den vorher besprochenen zurückgeführt. Indessen scheint für diesen Fall die Auflösung der Gleichungen durch successive Annäherung keineswegs den Vorzug zu verdienen vor derjenigen auf dem gewöhnlichen Weg (bei welcher letzteren ein grosser Theil der zur Auflösung der Systeme 1)', 2) etc. nöthigen Arbeit nur einmal auszuführen ist); diesen Umstand halte ich aber desshalb für irrelevant, weil, wie schon erwähnt, Bedingungsgleichungen zwischen den Unbekannten jederzeit vermieden werden können, und zwar mit dem grossen Vortheil, dass man die Anzahl der Unbekannten vermindert. Angenommen z. B. man hätte 70 Unbekannte und zwischen ihnen 30 Bedingungsgleichungen, so lässt sich die Aufgabe offenbar von vorn herein so behandeln, dass man nur mit $40 = 70 - 30$ von einander unabhängigen Unbekannten zu thun hat, — während die in unserem letzten Abschnitt erwähnte übliche Behandlungsweise zu den 70 Grössen x, $y \ldots$ noch 30 neue Unbekannte λ_1, $\lambda_2 \ldots$ hinzufügt, im Ganzen also 100 Unbekannte, statt 40, in's Feld führt.

Ueber das

Pascal'sche Theorem.

Von

G. Bauer.

Ueber das Pascal'sche Theorem

von

G. Bauer.

Seit Steiner seine Sätze über das Pascal'sche Hexagramm veröffentlichte[1]), ist dasselbe Gegenstand zahlreicher und eingehender Arbeiten geworden. Demungeachtet ist es bisher noch nicht unter einem Gesichtspunkte betrachtet worden, welcher polare Beziehungen zwischen den Geraden und Punkten des Systems erkennen liess. Es stehen sich bekanntlich in der vollständigen Figur des Hexagramms 60 (Pascal'sche) Gerade und 60 (Kirkman'sche) Punkte gegenüber; ebenso 20 (Steiner'sche) Punkte, in welchen sich je drei Pascal'sche Gerade schneiden und 20 Gerade von Cayley und Salmon aufgefunden, in welchen je drei Kirkmann'sche Punkte liegen u. s. w. Herr Hesse hat noch besonders darauf hingewiesen, dass hier polare Verhältnisse obwalten möchten[2]); ist aber seitdem von dieser Ansicht zurückgekommen.[3]) Es soll nun aber hier gezeigt werden, dass das vollständige Hexagramm in Gruppen abgetheilt werden kann, deren jede in sich polar-reciprok ist in Bezug auf einen bestimmten Kegelschnitt. Jndem man diese Gruppen eine aus

1) Théorèmes sur l'Hexagrammum mysticum. Annales de Math. p. Gergonne T. XVIII (1827 und 1828.)

2) „Ueber die Reciprocität u. s. f." Crelle's Journal Bd. LXVIII (1868) S. 193.

3) Vorlesungen über Anal. Geom. der Geraden, des Punkts und des Kreises in der Ebene 2. Aufl. 1873 S. 178. Anm.

der anderen hervorgehen lässt, gewinnt man zugleich den Vortheil des leichtern Ueberblicks über den Bau des ganzen Systems.

Nr. 1. Es sei S ein gegebener Kegelschnitt und demselben zwei Dreiecke eingeschrieben, deren Seiten ich durch 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 bezeichne. Die Ecken dieser Dreiecke durch 23 , 31 , 12 ; 56 , 64 , 45 bezeichnet, bilden die sechs Punkte auf S, auf welche das Pascal'sche Theorem angewandt werden soll.

Die Verbindungslinie irgend einer Ecke des einen Dreiecks mit einer Ecke des andern, z. B. von 12 mit 45, soll durch (12—45) bezeichnet werden. Solche Verbindungslinien gibt es 9.

Der Durchschnittspunkt zweier Geraden werde überhaupt durch Nebeneinanderstellung der Symbole der Geraden dargestellt. Dann bezeichnet z. B. (12—45)(23—56) den Durchschnitt der Verbindungslinien (12—45) und (23—56). Da jede dieser Verbindungslinien von den 8 andern geschnitten wird, aber von vieren in den Ecken der Dreiecke, so trägt jede dieser Verbindungslinien noch (ausser den Ecken) vier solche Durchschnittspunkte, welche ich als Puncte p bezeichne. Solche Punkte p gibt es $9.\frac{4}{2} = 18$.

Diese Verbindungslinien schneiden ferner jede der Dreiecksseiten, ausser in den Ecken noch in drei Puncten; so wird die Seite 3 von den von der Ecke 12 ausgehenden Verbindungslinien (12—45) , (12—56) , (12—46) in den Puncten 3(12—45) , u. s. f. geschnitten. Punkte dieser Art gibt es ebenfalls 18; ich bezeichne sie als Punkte $\mathfrak{p}$.

Endlich schneiden sich die Seiten des einen Dreiecks (123) mit denen des andern Dreiecks (456) noch in 9 Punkten 15 , 24 , 36 , u. s. f., welche als Punkte π bezeichnet werden sollen.

Nr. 2. Sehen wir nun zunächst, wie die Seiten der zwei Dreiecke in die Pascal'schen Sechsecke eingehen. Die Gerade, auf welcher sich die gegenüberliegenden Seiten des Sechseckes schneiden, heisse eine Pascal'sche Gerade, und die drei Durchschnittspunkte der Seiten auf ihr, durch welche sie bestimmt wird, sollen Pascal'sche Punkte heissen.

Wir können zuerst Sechsecke bilden, welche zwei Seiten von jeden der beiden Dreiecke (123) , (456) enthalten, wie z. B.

1 , 2 , (23—56) , 5 , 4 , (46—13) (1.

Die Pascals'che Gerade des von diesen Geraden gebildeten Sechsecks ist durch die auf ihr liegenden Pascal'schen Punkte bestimmt

$$15 \text{ — } 24 \text{ — } (23\text{—}56)(46\text{—}13) \qquad (2.$$

Sie ist mithin die Gerade (15—24), Verbindungslinie von Durchschnittspunkten je einer Seite des einen Dreiecks mit einer Seite des andern Dreiecks, d. h. von zwei Punkten π. Diese Punkte π sind also Pascal'sche Punkte. Durch jeden derselben gehen vier solche Pascal'sche Gerade; so gehen durch 36 die vier Pascal'schen Geraden

$$(36\text{—}14)\ ,\ (36\text{—}24)\ ,\ (36\text{—}15)\ ,\ (36\text{—}25) \qquad (3.$$

Es gibt mithin $9.\frac{4}{2} = 18$ solche Pascal'sche Gerade; ich bezeichne sie als Gerade Π; jede derselben enthält ausser den zwei Punkten π noch einen der 18 Punkte p, welche mithin ebenfalls Pascal'sche Punkte sind, und es ist leicht ersichtlich, dass durch jeden dieser Punkte p nur eine der Geraden Π hindurchgeht.

Nr. 3. Man kann ferner Sechsecke bilden, in welche von jedem der beiden Dreiecke nur eine Seite eingeht, und zwar können wir mit denselben Seiten vier Sechsecke bilden. So lassen sich mit den Seiten 1 und 4 folgende vier Sechsecke bilden

$$\left.\begin{array}{llllll} 1 & (13\text{—}46) & 4 & (45\text{—}23) & (23\text{—}56) & (56\text{—}12) \\ 1 & (13\text{—}45) & 4 & (46\text{—}23) & (23\text{—}56) & (56\text{—}12) \\ 1 & (12\text{—}45) & 4 & (46\text{—}23) & (23\text{—}56) & (56\text{—}13) \\ 1 & (12\text{—}46) & 4 & (45\text{—}23) & (23\text{—}56) & (56\text{—}13) \end{array}\right\} (4.$$

von welchen das 1. und 3. und ebenso das 2. und 4. je drei Seiten nämlich die 1., 3. und 5. gemein haben, während die zwei ersten Sechsecke und ebenso die zwei letzten, ferner das 1. und 4. und das 2. und 3. je vier Seiten gemeinschaftlich haben.

Indem man je eine Seite des einen Dreiecks mit je einer des andern combinirt, erhält man $9.4 = 36$ Sechsecke dieser Art. Die Pascal'schen Geraden dieser Sechsecke seien durch $\mathfrak{P}$ bezeichnet. Für das erste obiger Sechsecke ist diese Gerade durch die drei Pascal'schen Punkte

$$1(45-23) - (13-46)(23-56) - 4(56-12) \qquad (5.$$

bestimmt. Sie enthält zwei Punkte $\mathfrak{p}$, welche mithin auch Pascal'sche Punkte sind und einen Punkt p. Die 9 Punkte π, die 18 Punkte $\mathfrak{p}$ und die 18 Punkte p geben die Gesammtzahl der Pascal'schen Punkte, nämlich 45.

Durch jeden der Punkte $\mathfrak{p}$ gehen vier der Geraden $\mathfrak{P}$ hindurch, so gehen durch den Punkt 1(45—23) ausser dem $\mathfrak{P}$ des ersten auch das $\mathfrak{P}$ des vierten obiger Sechsecke (4. hindurch, welches durch Vertauschung von 2 und 3 aus dem ersten hervorgeht; ferner gehen durch denselben Punkt die Pascal'schen Geraden $\mathfrak{P}$ derjenigen Sechsecke, welche aus demselben hervorgehen durch Vertauschung von 4 und 5 und auch durch gleichzeitige Vertauschung von 4 mit 5, und 2 mit 3.

Die Geraden $\mathfrak{P}$ gehen ferner paarweise durch die 18 Punkte p hindurch; so geht durch den Punkt (13—46)(23—56) ausser der Pascal'schen Geraden (5. auch die des Sechsecks, welches durch Vertauschung von 4 mit 5 und 1 mit 2 aus dem 1. der Sechsecke (4. hervorgeht.

Nr. 4. Es lässt sich, wie der Versuch sogleich zeigt, mit den 6 Punkten auf S kein Sechseck bilden, in welches zwei Seiten des einen Dreiecks und nur eine oder gar keine Seite des andern eingeht; ebensowenig lässt sich ein solches bilden, in welches nur eine Seite des einen Dreiecks und keine des andern eingeht.

Es bleiben somit nur die Sechsecke übrig, in welche gar keine Seite der beiden Dreiecke eingeht, und deren Seiten mithin nur Verbindungslinien einer Ecke des einen Dreiecks mit einer Ecke des andern sind. Sechsecke dieser Art gibt es sechs. Es sind folgende:

(12—46) (46—23) (23—45) (45—13) (13—56) (56—12)
(12—56) (56—23) (23—46) (46—13) (13—45) (45—12) } 6
(12—46) (46—13) (13—56) (56—23) (23—45) (45—12)

(12—46) (46—23) (23—56) (56—13) (13—45) (45—12)
(12—56) (56—13) (13—46) (46—23) (23—45) (45—12) } 6'
(12—46) (46—13) (13—45) (45—23) (23—56) (56—12)

Die Pascal'schen Geraden dieser sechs Sechsecke bezeichne ich als Gerade P. Wir haben nun die ganze Anzahl der 60 Sechsecke, welche mittelst der 6 Punkte gebildet werden können. Ihre Pascal'schen Geraden sind die 18 Geraden Π, die 36 Geraden $\mathfrak{P}$ und die 6 Geraden P.

Was die Pascal'schen Punkte betrifft, welche auf diesen 6 Geraden P liegen, so sind es, wie man sogleich ersieht, keine neuen Punkte, sondern die 18 Punkte p, von welchen je drei auf jeder Geraden P liegen.

Durch jeden dieser Punkte p geht mithin eine Gerade Π, zwei Gerade $\mathfrak{P}$ und eine Gerade P, während durch jeden Punkt π vier Gerade Π, durch jeden Punkt $\mathfrak{p}$ vier Gerade $\mathfrak{P}$ gehen; sonach gehen durch jeden Pascal'schen Punkt vier Pascal'sche Gerade.

Nr. 5. Dieses letzte partielle System der Geraden P mit ihren Punkten p ist nun von besonderer Wichtigkeit für die hier dargelegte Methode, indem aus ihm das gesammte System erzeugt wird.

Es ist bekannt, dass wenn zwei Dreiecke einem Kegelschnitt eingeschrieben sind, es einen Kegelschnitt gibt, für welchen die zwei Dreiecke Polardreiecke sind. Der Kegelschnitt, für welchen die zwei Dreiecke (123) , (456) , dem Kegelschnitt S eingeschrieben, Polardreiecke sind, sei mit Σ (123,456) oder kurz mit Σ bezeichnet. In Bezug auf diesen Kegelschnitt sind die Pole der sechs Seiten

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6$$

die sechs Ecken der Dreiecke

$$23 \quad 31 \quad 12 \quad 56 \quad 64 \quad 45 .$$

Die Pole der Verbindungslinien je einer Ecke des einen Dreiecks mit einer Ecke des andern (diese Verbindungslinien sollen als Linien V bezeichnet werden)

$$(12-45) , (23-56) , \ldots$$

sind die Punkte

$$36 , 14 , \ldots$$

Der Durchschnittspunkt zweier Linien V, z. B.

$$(12—45)(23—56)$$

hat mithin zur Polare die Gerade (36—14).

Also: In Bezug auf den Kegelschnitt Σ sind die 9 Punkte π die Pole der 9 Verbindungslinien V und die 18 Geraden Π die Polaren der 18 Durchschnittspunkte der Linien V, d. h. der 18 Punkte p.

Da auf einer Linie V je vier Punkte p liegen, so gehen je vier Gerade Π durch einen Punkt π. Da ferner je drei Punkte p in einer der sechs Pascal'schen Geraden P liegen, so schneiden sich die Geraden Π zu je dreien in einem Punkte; diese Punkte gehören zu den 60 von Kirkman aufgefundenen Punkten.

Die 18 Geraden Π schneiden sich also zu je dreien in sechs Kirkman'schen Punkten, welche die Pole sind von den sechs Pascal'schen Geraden P, in Bezug auf den Kegelschnitt Σ.

Nr. 6. Die Pascal'schen Geraden der drei Sechsecke 6.) durch ihre Pascal'schen Punkte bestimmt, sind

$$\left.\begin{array}{l}(23—45)(12—56) - (12—46)(13—45) - (13—56)(23—46)\\ (13—46)(12—56) - (23—56)(13—45) - (12—45)(23—46)\\ (23—45)(13—46) - (12—46)(23—56) - (13—56)(12—45)\end{array}\right\} 7$$

und die der drei Sechsecke 6'.)

$$\left.\begin{array}{l}(12—45)(23—56) - (13—56)(12—46) - (23—46)(13—45)\\ (12—45)(13—46) - (13—56)(23—45) - (23—46)(12—56)\\ (13—46)(23—56) - (23—45)(12—46) - (12—56)(13—45)\end{array}\right\} 7'$$

Die drei ersten Geraden schneiden sich in einem Steiner'schen Punkte g und ebenso die drei letztern in einem Steiner'schen Punkte g'. Diess ergibt sich sogleich, wenn wir die zwei Dreiecke betrachten, gebildet aus den Seiten

$$13—46\ ,\ 12—56\ ,\ 23—45$$

einerseits und

$$23—56 \ , \ 13—45 \ , \ 12—46$$

anderseits. Die Durchschnittspunkte der entsprechenden Seiten liegen auf der dritten der Pascal'schen Geraden (7'. Folglich gehen die Geraden, welche entsprechende Ecken verbinden durch einen Punkt. Diese drei Geraden sind aber die drei Pascal'schen Geraden (7. Ebenso beweist man, dass die drei Geraden (7'. durch einen Punkt g' gehen. Die zwei Punkte sind Steiner'sche „Gegenpunkte."[1])

Wenden wir die Salmon'sche Bezeichnung an[2]) und nennen die sechs Ecken der Dreiecke

$$13 \quad 12 \quad 23 \quad 56 \quad 45 \quad 46$$

nach der Reihe

$$a \quad b \quad c \quad d \quad e \quad f$$

so sind die Geraden (7.

$$\begin{vmatrix} bf & ad & ce \\ ea & fc & db \end{vmatrix} \ , \ \begin{vmatrix} ea & fc & bd \\ dc & eb & fa \end{vmatrix} \ , \ \begin{vmatrix} bf & ad & ce \\ dc & eb & fa \end{vmatrix}$$

und der Steiner'sche Punkt g, in dem sie sich schneiden

$$\begin{vmatrix} bf & ad & ce \\ ea & fc & db \\ dc & eb & fa \end{vmatrix} \qquad (8$$

Die drei Geraden (7'. aber sind

$$\begin{vmatrix} bf & fc & ad \\ da & ae & eb \end{vmatrix} \ , \ \begin{vmatrix} bd & da & af \\ fc & ce & eb \end{vmatrix} \ , \ \begin{vmatrix} bf & fa & ae \\ ec & cd & db \end{vmatrix}$$

und der Steiner'sche Punkt g', in dem sie sich schneiden

$$\begin{vmatrix} bf & ea & cd \\ ad & fc & eb \\ ce & db & fa \end{vmatrix} \qquad (8'$$

1) Steiner's Vorlesung über synth. Geom. bearb. v. Schröter. S. 132.
2) Salmon „Kegelschnitte" deutsch von Fiedler. Zus. II S. 580.

Man sieht dass bei dieser Bezeichnungsweise sich die beiden Punkte nur dadurch unterscheiden, dass die Horizontallinien des einen die Vertikallinien im Ausdruck des andern sind und umgekehrt.

Da die drei Geraden (7. und die drei Geraden (7'. sich in je einem Punkte g und g' schneiden, so liegen ihre Pole die obigen sechs Kirkman'schen Punkte zu je dreien in zwei Geraden G und G', den Polaren von g und g'.

Dass die 60 Kirkman'schen Punkte des ganzen Systems zu je dreien in 20 Geraden liegen, haben schon Cayley und Salmon gleichzeitig entdeckt[1]); zugleich fanden sie, dass jede dieser 20 Geraden noch durch einen der 20 Steiner'schen Punkte gehe. Die Geraden G und G' nun gehen, wie im nächsten Nr. gezeigt werden wird, durch die Steiner'schen Punkte g , g' und zwar geht G durch g' und G' durch g. Fassen wir diese Resultate zusammen, so folgt:

Die sechs Kirkman'schen Punkte, in welchen sich die 18 Pascal'schen Geraden Π zu je dreien schneiden, liegen zu dreien in zwei (Salmon-Cayley'schen) Geraden G , G', welche die Polaren sind der zwei Steiner'schenPunkte g,g' in Bezug auf den Kegelschnitt Σ. G geht durch g'; G' geht durch g. Es sind mithin g,g' conjugirte Punkte, G,G' conjugirte Gerade in Bezug auf ebendenselben Kegelschnitt Σ.

Es bilden mithin auch ein Steiner'scher Punkt g (g') und die drei Kirkman'schen Punkte, welche auf der durch ihn gehenden Geraden G' (G) liegen, dasselbe anharmonische Verhältniss, wie die drei Pascalschen Geraden und die Gerade G (G') die im conjugirten Punkte g' (g) zusammentreffen.[2])

Nr. 7. Bezeichnen wir specieller die drei durch g gehenden Geraden P (7.) durch P_1 , P_2 , P_3 und die durch g' gehenden (7') mit

---

1) Cayley, „Note zur quelques théorèmes de la geom. de position." Crelle's Journ. Bd. XLI (1850). S. 66 und 84.

2) Dass zwei Steiner'sche Gegenpunkte auch conjugirte Punkte sind in Bezug auf den dem Sechseck umschriebenen Kegelschnitt S hat schon Herr Hesse gefunden. „Ueber das geradlinige Sechseck auf dem Hyperboloid". Crelle's Journ. Bd. XXIV. S. 40.

P_1' , P_2' , P_3'. Die Pascal'schen Punkte p, welche auf den drei ersten Geraden liegen, seien in der Ordnung wie sie in den Gleichungen (7.) auftreten, mit

$$\begin{matrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{matrix} \qquad (9.$$

bezeichnet und ebenso die auf den drei Geraden P' liegenden mit

$$\begin{matrix} p_{11}' & p_{12}' & p_{13}' \\ p_{21}' & p_{22}' & p_{23}' \\ p_{31}' & p_{32}' & p_{33}' \end{matrix} \qquad (9'.$$

Die in einer Horizontalen stehenden p liegen auf derselben Pascalschen Geraden P; von den in einer Vertikalen stehenden sage ich, sie bilden ein Tripel.

Die Gerade Π, Polaren dieser Punkte, in Bezug auf Σ, sind in derselben Ordnung

$$\left.\begin{matrix} 16-34 & 35-26 & 24-15 \\ 25-34 & 14-26 & 36-15 \\ 16-25 & 35-14 & 24-36 \end{matrix}\right\} 10.$$

$$\left.\begin{matrix} 36-14 & 24-35 & 15-26 \\ 36-25 & 24-16 & 15-34 \\ 25-14 & 16-35 & 34-26 \end{matrix}\right\} 10.$$

Ich bezeichne sie analog den Punkten p mit

$$\left.\begin{matrix} \Pi_{11} & \Pi_{12} & \Pi_{13} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{matrix}\right\} 11.$$

$$\left.\begin{matrix} \Pi_{11}' & \Pi_{12}' & \Pi_{13}' \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{matrix}\right\} 11'.$$

Die in einer Horizontalen der 1. Gruppe (10. oder (11.) stehenden Geraden bilden die Kirkman'schen Punkte auf G, die ich nach der

Reihe mit $k^{(1)}$, $k^{(2)}$, $k^{(3)}$ oder wo keine Unterscheidung nothwendig ist, einfach durch k bezeichne; ebenso bilden die in einer Horizontalen der zweiten Gruppe (10′) oder (11′) stehenden die Kirkman'schen Punkte auf G′, die ich mit k′ oder nach der Reihe mit $k^{(1)'}$ $k^{(2)'}$ $k^{(3)'}$ bezeichne. Die in einer Vertikalen der 1. oder der 2. Gruppe stehenden gehen einzeln durch die drei Punkte k oder k′ und ich sage daher sie bilden ein Tripel.

Nun geht z. B. die Gerade 15—24 (2.) oder Π_{13}, Polare von p_{13}, durch (23—56)(46—13) d. i. p'_{31} und wie aus der Vertauschung von 4 und 5 in (2.) sogleich ersichtlich, 14—25 oder Π'_{31}, Polare von p'_{31} durch (23—46)(56—13) d. i. p_{13}. Also allgemein, wenn $_{i,k}$ irgend welche der Zahlen 1 , 2 , 3 sind:

Die Gerade Π_{ik}, Polare von p_{ik}, geht durch p'_{ki} und Π'_{ki} Polare von p'_{ki}, geht durch p_{ik}. Die 9 Pascal'schen p auf drei durch g gehenden Pascal'schen Geraden P gelegen sind einzeln conjugirt zu den 9 Pascal'schen Punkten p′ auf den drei durch g′ gehenden Pascal'schen Geraden P′, in Bezug auf den Kegelschnitt Σ. Es sind nämlich p_{ik} und p'_{ki} conjugirte Punkte; den drei p auf einer Geraden P ist ein Tripel der p′ auf den Geraden P′ conjugirt und umgekehrt.

Ebenso sind die 9 Pascal'schen Geraden Π, welche durch die drei Kirkman'schen Punkte k auf G gehen einzeln conjugirt in Bezug auf Σ zu den 9 Geraden Π', welche durch die drei Kirkman'schen Punkte k′ auf G′ gehen. Es sind nämlich Π_{ik} und Π'_{ki} conjugirte Gerade. Drei Π (Π_{i1} , Π_{i2} , Π_{i3}) welche einen Kirkman'schen Punkt k bilden und durch ein Tripel der p′ (p'_{1i} , p'_{2i} , p'_{3i}) gehen sind einem Tripel der Π' (Π'_{1i} , Π'_{2i} , Π'_{3i}) conjugirt, welche durch drei Punkte p (p_{i1} , p_{i2} , p_{i3}) auf einer Geraden P gehen und umgekehrt.

Man bemerke, dass irgend zwei Gerade Π, welche sich in ihrem Ausdruck nur dadurch unterscheiden, dass die zwei Seiten des 1. oder 2. Dreiecks, welche in ihn eingehen, vertauscht sind, wie

15—24 und 25—14
36—14 und 34—16 u. s. f.

conjugirte Gerade sind.[1])

Betrachten wir nun die Dreiecke gebildet aus den drei Tripeln der Punkte

$$\begin{array}{lccccccc}
\text{I.} & 26 & , & 14 & , & 35 & & \\
\text{II.} & \left.\begin{array}{l}13-56\\12-45\\26-34\end{array}\right\} p_{33} & , & \left.\begin{array}{l}13-56\\23-46\\14-25\end{array}\right\} p_{13} & , & \left.\begin{array}{l}12-45\\23-46\\16-35\end{array}\right\} p_{23} & & \\
\text{III.} & \left.\begin{array}{l}23-45\\13-46\\15-26\end{array}\right\} p_{31} & , & \left.\begin{array}{l}12-56\\23-45\\14-36\end{array}\right\} p_{11} & , & \left.\begin{array}{l}12-56\\13-46\\24-35\end{array}\right\} p_{21} & &
\end{array}$$

wo bei jedem Punkte p ausser den zwei Linien V die sich in ihm schneiden, noch die Gerade Π beigesetzt ist, die durch ihn hindurchgeht.

Die entsprechenden Seiten dieser drei Dreiecke (in I. Gerade Π, in II und III Linien V) treffen in denselben Punkten zusammen, nämlich in den Punkten

$$\left.\begin{array}{l}12-45\\13-46\\26-35\end{array}\right\} p'_{23} \quad , \quad \left.\begin{array}{l}23-46\\12-56\\14-35\end{array}\right\} p'_{21} \quad \left.\begin{array}{l}13-56\\23-45\\14-26\end{array}\right\} p'_{22}$$

welche auf der Geraden P'_2 liegen.

Die Verbindungslinien entsprechender Ecken der Dreiecke I und II laufen in dem Punkte

$$\left.\begin{array}{l}26-34\\16-35\\14-25\end{array}\right\} k^{(3)'}$$

zusammen.

---

1) Sind von drei Geraden 10.) die durch einen Punkt gehen zwei gegeben, so gibt es eine einfache Regel um die dritte zu finden. Ist z. B. gegeben

14—26 , 15—36

so haben sie in ihren Symbolen zwei Zahlen gemein, hier 1 und 6. Man verbinde die Glieder beider Ausdrücke übers Kreuz und hebe sodann diese gemeinschaftliche Zahlen 16 weg, so erhält man die dritte Gerade 25—34.

Für die Dreiecke I und III gehen die Verbindungslinien entsprechender Ecken durch den Punkt

$$\left.\begin{array}{l} 26-15 \\ 14-36 \\ 35-24 \end{array}\right\} \; k^{1)'}$$

Für die Dreiecke II und III liegen die entsprechenden Ecken auf den Geraden P_1 , P_2 , P_3 die sich in dem Punkte g schneiden. Nach einem bekannten Satze liegen also die Punkte $k^{(3)'}$, $k^{(1)'}$, g auf einer Geraden. Hiemit ist der Nachweis für die in Nr. 6 gemachte Behauptung geliefert, dass die Gerade G' durch g geht. Ebenso könnte man zeigen dass die Gerade G durch g' geht.

Nr. 8. Die Tripel der Punkte p bilden Dreiecke, deren Seiten die 9 Verbindungslinien V sind; dasselbe gilt für die von den Punkten p gebildeten Tripel. Die einen sind durch die andern bestimmt. Die homologen Seiten nämlich je zweier von den Punkten p gebildeten Dreiecke schneiden sich auf einer Geraden P'; die drei Tripel zu je zwei combinirt, bestimmen so die drei Geraden P', die sich in dem Punkte g' schneiden. Drei homologe Seiten aber der drei Tripel bilden ein Dreieck den drei Geraden P' eingeschrieben, dessen Ecken ein Tripel der Punkte p sind.

Die Tripel der Pascal'schen Geraden Π und Π' bilden die reciproke Figur. Nämlich jedes Tripel der Π durch die 3 Kirkman'schen Punkte k auf G gehend bildet ein Tripel von Punkten π. Diese Tripel der π sind in Horizontalreihen zusammengestellt

$$\left.\begin{array}{lll} 34 & 16 & 25 \\ 26 & 35 & 14 \\ 15 & 24 & 36 \end{array}\right\} 12.$$

Ie zwei dieser Tripel liegen perspektivisch, da sich ihre homologen Seiten auf G schneiden.

Die Verbindungslinien homologer Punkte je zweier Tripel gehen mithin durch einen Punkt; diese Verbindungslinien sind die Geraden Π' und die Punkte, durch welche sie gehen, die Kirkman'schen Punkte k auf der Geraden G' gelegen. Drei Verbindungslinien aber homologer

Ecken der drei Tripel der Punkte (12.) geben ein Tripel der Geraden Π', einzeln durch die drei Punkte k' hindurchgehend. Jedes solche Tripel der Π' bildet ein Tripel der Punkte π, die in (12. in einer Vertikalreihe stehen.[1])

Nr. 9. Man ersieht, dass das ganze partielle System, das in den Nr. 4—8 betrachtet wurde in sich reciprok ist in Bezug auf den Kegelschnitt Σ. Wenn wir dasselbe in Bezug auf diesen Kegelschnitt polarisiren, so gehen nur die π und V, die p und Π, die k und P in einander über und der den zwei Dreiecken (123), (456) umschriebene Kegelschnitt S, verwandelt sich in den diesen beiden Dreiecken zugleich eingeschriebenen Kegelschnitt S'; dieses partielle System gehört mithin zugleich dem den zwei Dreiecken umschriebenen Kegelschnitt S und dem diesen zwei Dreiecken eingeschriebene S' an.

Diese Polarität in Bezug auf Σ findet aber nicht mehr statt, wenn wir auf diejenigen Theile des vollständigen Hexagramm's übergehen, in welchen die Pascal'schen Punkte und Gerade $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{P}$ auftreten. Denn wenn wir von einen Punkte $\mathfrak{p}$ z. B. 3(12—45) die Polare in Bezug auf Σ bilden, so ist dieselbe (12—36), eine Gerade, welche in dem Hexagramme der gegebenen sechs Punkte nicht auftritt, sondern einem System angehört, das durch Vertauschung einer der Geraden 1 , 2 , 3 mit einer der Geraden 4 oder 5 aus dem gegebenen hervorgeht. Ebenso ist die Polare von 4(23—56) die Gerade (14—56), von welcher ähnliches gilt, u. s. f.

Nun lassen sich aus den sechs Geraden 1 . . . 6 auf 10 Arten Paare von Dreiecken bilden. Man erhält aus den Dreiecken (123, (456) die neun übrigen Paare indem man jede Seite des einen Dreiecks mit jeder Seite des andern vertauscht. In diesem vollständigen System der 10 Paare von Dreiecken treten alle Verbindungslinien irgend zweier Durchschnittspunkte der sechs Geraden auf. Ihr Ausdruck ist nach der

---

1) Es ist zu bemerken, dass die 9 Linien V ausser in den 18 Durchschnittspunkten p , p' sich noch zu je dreien in sechs Punkten schneiden, nämlich den 6 Ecken der Dreieke (123) , (456). Ebenso liegen die 9 Punkte π (12.) ausser in den 18 Linien Π noch zu dreien in den sechs Seiten dieser Dreiecke.

hier gebrauchten Bezeichnung allgemein von der Form (ik−lm), wo i , k , l , m irgend vier der Zahlen 1 . . . 6 sind. Ihre Anzahl ist 45 (die Geraden 1 , 2 , . . . 6 selbst nicht mitgezählt). Denn lässt man irgend eine der 15 Combinationen von je zwei Geraden weg, so lassen sich die vier übrigen noch auf drei Arten in Paare zusammenfassen. Die Pole dieser 45 Verbindungslinien in Bezug auf den Kegelschnitt Σ sind die 45 Pascal'schen Punkte des hier betrachteten von den zwei Dreiecken (123) , (456) gebildeten Hexagramms.

Zu diesen 45 Linien gehören die 9 Linien V, deren Pole die Punkte π sind, die 18 Geraden Π, deren Pole die Punkte p sind, und die 18 übrigen Verbindungslinien haben zu Polen die 18 Punkte $\mathfrak{p}$.

Es ist leicht nachzuweisen[1]), dass wenn sechs Gerade zwei Dreiecke bilden, die einem Kegelschnitt S eingeschrieben sind, jedes der 9 andern Paare von Dreiecke, welches diese Gerade bei anderer Zusammenfassung zu Gruppen von je dreien bilden, wieder einem Kegelschnitt S_i eingeschrieben ist, und dass es mithin auch für jedes Paar solcher Dreieke einen Kegelschnitt Σ_i gibt, in Bezug auf welchen die beiden Dreiecke Polardreiecke sind.

---

1) Sind nämlich die Gleichungen der sechs Geraden 1 , 2 . . . 6

$$u_1 = 0 \ , \ u_2 = 0 \ , \ \ldots \ u_6 = 0$$

so kann die Gleichung eines Kegelschnittes Σ, welcher die zwei Dreiecke (123) , (456) zu Polardreiecken hat, sowohl in der einen als in der andern folgender Formen geschrieben werden

$$\left.\begin{array}{l} k_1 u_1^2 + k_2 u_2^2 + k_3 u_3^2 = 0 \\ k_4 u_4^2 + k_5 u_5^2 + k_6 u_6^2 = 0 \end{array}\right\} a$$

Es muss dann folglich zwischen den Funktionen u eine identische Gleichung der Form

$$k_1 u_1^2 + k_2 u_2^2 + k_3 u_3^2 + k_4 u_4^2 + k_5 u_5^2 + k_6 u_6^2 = 0$$

bestehen. Diese Gleichung lässt sich aber auf 10 Arten in zwei Gleichungen der Form a.) zerlegen, welche zugleich erfüllt sein müssen, sowie eine von ihnen es ist, und man ersieht hieraus, dass es für jedes der 9 anderen Paare von Dreiecken, welche die 6 Geraden bilden können, ebenfalls einen Kegelschnitt Σi gibt, der das Paar von Dreiecken zu Polardreiecken hat.

Zwei Dreiecke können aber nur dann zugleich Polardreiecke eines und desselben Kegelschnitts Σ sein, wenn um die zwei Dreiecke ein Kegelschnitt beschrieben werden kann und ist diess der Fall, so besimmen sie Σ eindeutig.

Hiemit ist obiger Satz erwiesen.

Da jedes der 10 Paare von Dreiecken gebildet von den sechs Geraden einem Kegelschnitt eingeschrieben ist, so bestimmt jedes solche Paar ein Pascal'sches Hexagramm.

Polarisirt man das vollständige System obiger 45 Verbindungslinien der Durchschnittspunkte der sechs Geraden in Bezug auf irgend einen der 10 Kegelschnitte Σ_i, so erhält man die 45 Pascal'schen Punkte des Hexagramms, das zu dem betreffenden Paar von Dreiecken gehört.

Nr. 10. Um nun das vollständige Hexagramm das durch die zwei Dreiecke (123)(456) erzeugt wird, zu erhalten, kann man auf folgende Art verfahren. Man bilde das in den Nr. 4—8 dargelegte partielle System mit seinen sechs Pascal'schen Geraden P und seinen sechs Kirkman'schen Punkten k nicht nur für diese zwei Dreiecke, sondern auch für die neun andern Paare von Dreiecken, welche durch die sechs Geraden bei anderer Zusammenfassung zu je dreien besimmt werden, und polarisire diese neun Hülfssysteme in Bezug auf den Kegelschnitt Σ. Alle diese polarisirten partiellen Systeme gehören sodann dem Hexagramm an und bilden das vollständige System. Bei der Polarisation verwandeln sich die P und k der Hülfssysteme in k und P des zu bestimmenden Systems und wir haben sodann

$10 \times 6 = 60$ Pascal'sche Gerade
$10 \times 6 = 60$ Kirkman'sche Punkte
10 Paare Steiner'sche Punkte g , g'
10 Paare Salmon-Cayley'scher Geraden G , G'.

Zugleich verwandeln sich die p der Hülfssysteme in Pascal'sche Gerade, welche durch die Kirkman'schen Punkte hindurchgehen, die Π der Hülfs-Systeme in Pascal'schen Punkte. Wir erhalten so $10.18 = 3.60$ Pascal'sche Gerade, welche durch die 60 Kirkman'schen Punkte gehen (jede dieser Geraden kommt dreimal vor) und $10.18 = 4.45$ Pascal'sche Punkte; jeder Pascal'sche Punkt tritt viermal auf, weil durch jeden vier Pascal'sche Gerade gehen.

Da die polaren Verhältnisse erhalten bleiben, wenn man auf die reciproke Figur übergeht, so enthält das vollständige Hexagramm mithin 10 partielle Systeme, welche in sich voll-

kommen polar reciprok sind, jedes derselben in Bezug auf denjenigen Kegelschnitt Σ_i' als Direktrix, welcher aus dem Σ_i des betreffenden Hülfssystems bei der Polarisation in Bezug auf Σ hervorgeht.

Nr. 11. Bilden wir nun das partielle System das aus dem ersten durch Vertauschung der Geraden 3 und 6 hervorgeht und mithin zu den Dreiecken (126) , (345) gehört.

Die Pascal'schen Geraden P , P′ des Systems sind, durch die auf ihnen liegenden Pascal'schen Punkte p betimmt, nach Nr. 6

$$\left.\begin{array}{l}(26-45)(12-35) - (12-34)(16-45) - (16-35)(26-34)\\(16-34)(12-35) - (26-53)(16-45) - (12-45)(26-34)\\(26-45)(16-34) - (12-34)(26-53) - (16-35)(12-45)\end{array}\right\}13.$$

$$\left.\begin{array}{l}(12-45)(26-53) - (16-35)(12-34) - (26-34)(16-45)\\(12-45)(16-34) - (16-35)(26-45) - (26-34)(12-35)\\(16-34)(26-53) - (26-45)(12-34) - (12-35)(16-45)\end{array}\right\}13'.$$

Die drei ersten, wie die drei letzteren schneiden sich in einem Steiner'schen Punkt des Systems.

Die Geraden *II* dieses Systems sind nach (10. und (10′.

$$\left.\begin{array}{lll}13-46 & 56-23 & 24-15\\25-46 & 14-23 & 36-15\\13-25 & 56-14 & 24-36\end{array}\right\}14.$$

$$\left.\begin{array}{lll}36-14 & 24-56 & 15-23\\36-25 & 24-13 & 15-46\\25-14 & 13-56 & 46-23\end{array}\right\}14'.$$

Es sind die Polaren der 18 in (13. und (13′. enthaltenen Punkte in Bezug auf den Kegelschnitt Σ_2 oder Σ(126,345), für welchen die zwei Dreiecke (126) , (345) Polardreiecke sind.

Die drei Geraden in einer Horizontallinie bestimmen einen Kirkman'schen Punkt des Systems. Die drei durch (14. bestimmten Kirkman'schen Punkte liegen in einer Geraden, Polare des Steiner'schen Punkts (13., welche durch den Steiner'schen Punkt (13′. geht. Ebenso liegen die drei

Kirkman'schen Punkte (14'. in einer Geraden, welche Polare des Punkts (13'. ist und durch den Punkt (13. hindurchgeht.

Dieses System ist dem ursprünglich betrachteten Hexagramm fremd. Polarisiren wir nun aber dasselbe in Bezug auf Σ, d. i. $\Sigma(123,456)$, so gibt das System der Geraden (14.

$$\left.\begin{array}{l} 25 - 14 - (13-56)(23-46) \\ 5\,(13-46) - 1\,(23-56) - (12-45)(23-46) \\ 2\,(13-46) - 4\,(23-56) - (13-56)(12-45) \end{array}\right\} 15.$$

$$\left.\begin{array}{l} (12-45)(23-56) - 4\,(13-56) - 1\,(23-46) \\ (12-45)(13-46) - 2\,(13-56) - 5\,(23-46) \\ (13-46)(23-56) - 24 - 15 \end{array}\right\} 15'.$$

Das System der 18 Pascal'schen Punkte (13. , (13' geben polarisirt folgendes System von Geraden:

$$\left.\begin{array}{l} 6(13-45)-3(12-46)\,,\ 3(12-56)-6(23-45)\,,\ (23-45)(12-46)-(13-45)(12-56) \\ (23-45)(12-56)-3(12-46)\,,\ (13-45)(12-46)-6(23-45)\,,\ 36-(13-45)(12-56) \\ 6(13-45)-(23-45)(12-56)\,,\ 3(12-56)-(13-45)(12-46)\,,\ 36-(23-45)(12-46) \end{array}\right\} 16.$$

$$\left.\begin{array}{l} 36-(13-45)(12-46)\,,\ (23-45)(12-46)-3(12-56)\,,\ (13-45)(12-56)-6(23-45) \\ 36-(23-45)(12-56)\,,\ (23-45)(12-46)-6(13-45)\,,\ (13-45)(12-56)-3(12-46) \\ (23-45)(12-56)-(13-45)(12-46)\,,\ 6(13-45)-3(12-56)\,,\ 3(12-46)-6(23-45) \end{array}\right\} 16'.$$

Die Punkte (15. (15'. sind Pascal'sche Punkte, die sechs Geraden auf denen sie liegen sechs neue Pascal'sche Gerade des ursprünglichen Hexagramms. Die drei Geraden (15. und ebenso die Geraden (15'. schneiden sich in zwei neuen Steiner'schen Punkten g_2 und g_2'.

Die Geraden in (16. und (16'. sind Pascal'sche Gerade; je drei in einer Horizontalen gehen durch einen Punkt; diese sechs Punkte sind neue Kirkman'sche Punkte des ursprünglichen Hexagramms. Die drei Punkte (16. und ebenso die drei Punkte (16'. liegen auf zwei neuen Cayley-Salmon'schen Geraden G_2 , G_2'; die letztere geht durch g_2, die erstere durch g_2'.

Alle die descriptiven Eigenschaften, welche dem ersten partiellen System (Nr. 4—8) zukommen, kommen auch diesem zweiten partiellen System zu. Ferner ist dieses zweite partielle System, wie das erste, in sich polar-reciprok in Bezug auf den Kegelschnitt Σ_2', Polarkegelschnitt von Σ_2 oder Σ (126,345) in Bezug auf Σ oder Σ(123,456) als Direktrix. Da die Dreiecke (126) , (345) durch Polarisation in Bezug auf Σ übergehen in die Dreiecke, deren Seiten

$$(13—45) \text{ , } (23—45) \text{ , } 3$$
$$(12—46) \text{ , } (12—56) \text{ , } 6$$

sind, oder wenn wir die in Nr. 6 benützte Bezeichnung der Ecken beibehalten, in die Dreiecke

$$(cdf) \text{ , } (ace)$$

so ist Σ_2' derjenige Kegelschnitt, für welche diese beiden Dreiecke Polardreiecke sind.

Und in der That, vertauscht man in den Pascal'schen Geraden (7. (7'. und Kirkman'schen Punkten (10. , (10'. des ersten partiellen Systems die Geraden

	1	2	4	5
mit	(13—45)	(23—45)	(12—46)	(12—56)

wechselseitig, so gehen sie in die des 2ten Systems (15. (15'. und (16. (16'. über.

Man kann noch bemerken, dass der Punkt 36 und die Linie (12—45) zugleich Pol und Polare sind für die beiden Kegelschnitte Σ und Σ_2'.

Nr. 12. Unter den Geraden (15. und (15'. kommt je eine Gerade Π und zwei Gerade $\mathfrak{P}$ vor, so dass in den neun abgeleiteten Systemen jede Gerade Π und jede Gerade $\mathfrak{P}$ je einmal unter den Geraden vorkommt, welche durch einen Steiner'schen Punkt gehen.

Unter den Geraden (16. , (16' besteht die letzte Vertikalreihe in (16. und die erste in (16'. aus je einer Geraden P und zwei Geraden Π; die übrigen sechs sind Gerade $\mathfrak{P}$, so dass in den neun abgeleiteten

Systemen unter den durch Kirkman'sche Punkte hindurchgehenden Geraden jede der sechs P und ebenso jede der 36 Geraden $\mathfrak{P}$ je dreimal; jede Gerade Π noch zweimal vorkommt. Auf jeder Pascal'schen Geraden liegen also drei Kirkman'sche Punkte.

Man wird ferner bemerken, dass die Punkte, welche in (15. in der letzten Vertikalreihe stehen, und ebenso diejenigen, welche in (15'. in der ersten stehen, die Punkte

$$\begin{matrix} p_{13} & p_{23} & p_{33} \\ \text{und} \\ p'_{11} & p'_{21} & p'_{31} \end{matrix}$$

sind, welche je ein Tripel von Punkten p und p' bilden (Nr. 7). Beim Uebergang vom 1ten System auf das 2te abgeleitete, haben sich die Pascal'schen Geraden, welche einen Steiner'schen Punkt bilden, um eines der auf ihnen liegenden Tripel von Pascal'schen Punkten gedreht.

Für jedes der neun abgeleiteten Systeme gehen die drei Pascal'schen Geraden, welche einen Steiner'schen Punkt bilden durch eines der auf den Geraden P (P') liegenden Tripel von Punkten p (p').

Nr. 13. Man ersieht, dass die Bildung der 9 übrigen partiellen Systeme darauf hinauskommt, an die Stelle der ursprünglichen Dreiecke (123) , (456) mit den Ecken a,b,c; d,e,f nach und nach die 9 andern Paare von Dreiecken zu substituiren, welche aus den sechs Punkten gebildet werden können. Aber es gewährt Vortheile, dieselben, wie hier bei der Bildung des zweiten Systems geschehen, nur durch Vertauschung von zwei Zahlen und nachherige Polarisation hervorgehen zu lassen. Nachdem dieses zweite System gebildet, können nun die acht übrigen auch allein durch cyclische Vertauschungen der Zahlen 123 oder 456 aus diesem abgeleitet werden.

Wir bilden so das

3te System aus dem 2ten durch cyclische Vertauschung von 123. Geht aus dem 1ten System hervor durch Vertauschung der Zahlen 1 und 6 und Polarisation, oder also, indem man die Geraden

2 3 4 5
mit (12—45) (13—45) (23—46) (23—56)
vertauscht. Es gehört zu den Dreiecken

(abe) , (cdf).

4tes System aus dem 2ten durch zweimalige cyclische Vertauschung von 123. Geht auch aus dem ersten hervor durch Vertauschung der Zahlen 2 und 6 und Polarisation, oder durch Vertauschung der Geraden

1 3 4 5
und (12—45) (23—45) (13—46) (13—56)
Es gehört zu den Dreiecken

(bce) , (adf).

5tes System aus dem 2ten durch cyclische Vertauschung von 456. Geht auch aus dem 1ten hervor durch Vertauschung der Zahlen 3 , 4 und Polarisation, oder Vertauschung der Geraden

1 2 5 6
mit (13—56) (23—56) (12—45) (12—46)
Es gehört zu den Dreiecken

(acd) , (bef).

6tes System aus dem 2ten durch zweimalige cyclische Vertauschung von 456. Geht aus dem 1ten hervor durch Vertauschung der Zahlen 3 , 5 und Polarisation; es gehört zu den Dreiecken

(bde) , (acf).

7tes System aus dem 2ten durch cyclische Vertauschung von 123 und von 456. Geht aus dem 1ten System hervor durch Vertauschung der Zahlen 1 , 4 und Polarisation. Es gehört zu den Dreiecken

(abd) , (cef).

8tes System aus dem 2ten durch einmalige cyclische Vertauschung von 123 und zweimalige von 456. Geht aus dem 1ten hervor durch Vertauschung der Zahlen 1 , 5 und Polarisation. Es gehört zu den Dreiecken

(abf) , (cde).

9tes System aus dem 2ten durch zweimalige cyclische Vertauschung von 123 und einmalige von 456. Geht aus dem 1ten System hervor durch Vertauschung der Zahlen 2 , 4 und Polarisation. Es gehört zu den Dreiecken

(bcd) , (aef).

10tes System aus dem 2ten durch zweimalige cyclische Vertauschung von 123 sowohl als von 456. Geht aus dem 1ten System hervor durch Vertauschung der Zahlen 2 , 5 und Polarisation. Es gehört zu den Dreiecken

(bcf) , (ade).

Jedes dieser Systeme ist in sich polar-reciprok in Bezug auf den Kegelschnitt Σ_1', für welchen die zwei Dreiecke des Systems Polardreiecke sind.

Nr. 14. Wir haben gesehen, dass beim Uebergang vom ersten partiellen System auf eines der neun abgeleiteten, die aus den P und P' hervorgehenden Pascal'schen Geraden des neuen Systems sich um ein Tripel von Punkten p, resp. p' drehen. Durch cyclische Vertauschung von 123 oder von 456 gehen die Geraden P ineinander über, ebenso die P', so dass mithin die Steiner'schen Punkte g , g' durch diese Vertauschungen nicht geändert werden. Wohl aber gehen die Tripel der p und p' bei diesen Vertauschungen ineinander über, indem sie sich zugleich drehen.

Fassen wir die Geraden P zunächst in's Auge. Dieselben bleiben fest, wenn wir zugleich eine cyclische Vertauschung von 123 und von 456 machen. Es gehen mithin auch in diesem Falle die auf ihnen liegenden Tripel der p nur in einander über, ohne sich zu drehen. Die abgeleiteten Systeme, welche durch solche Vertauschungen aus

einander hervorgehen, haben ihre Steiner'schen Punkte g_i [1]) auf einer der drei Plücker'schen Geraden $\mathfrak{P}$ [2]), welche von dem Steiner'schen Punkt g (oder g_1) des 1ten Systems, in welchem sich die Geraden P schneiden, ausgehen. In diesem Falle sind das 2te System, dessen Gerade (15. durch das Tripel p_{13} , p_{23} , p_{33} hindurchgehen, das 7te System dessen Gerade durch das Tripel p_{12} , p_{22} , p_{32} und das 10te, dessen Gerade durch das Tripel p_{11} , p_{21} , p_{31} hindurchgehen (wie sogleich aus (15. und dem System der p (7.) zu ersehen). Ebenso das 4te, 5te und 8te System und das 3te, 6te und 9te System.

Wenn wir aber die Geraden P (7. einer zweimaligen cyclischen Vertauschung von 123 und einer einmaligen von 456 oder umgekehrt, einer zweimaligen von 456 und einer einmaligen von 123 unterwerfen, vertauschen sich die Geraden P, aber die auf ihnen liegenden Tripel von Punkten p drehen sich in sich selbst, ohne in einander überzugehen. In den Systemen, welche durch Vertauschungen dieser Art aus einander hervorgehen, gehen mithin die Pascal'schen Geraden, welche den Steiner'schen Punkt g_i des Systems bilden, durch dasselbe Tripel der p. So gehen sie im 3ten, 5ten, 10ten System durch das 1te Tripel p_{11} , p_{21} , p_{31} ; im 4ten, 6ten, 7ten System durch das 2te Tripel p_{12} , p_{22} , p_{32} ; im 2ten, 8ten, 9ten System durch das 3te Tripel p_{13} , p_{23} , p_{33} und die Steiner'schen Punkte g_i je dreier dieser Systeme bilden ein Tripel von Steiner'schen Punkten auf den drei durch g_1 gehenden Plücker'schen Geraden $\mathfrak{P}$ gelegen.

Schreibt man die 9 abgeleiteten Systeme in der Weise

$$\left.\begin{array}{lll} 2^{tes}, & 10^{tes}, & 7^{tes} \\ 8^{tes}, & 5^{tes}, & 4^{tes} \\ 9^{tes}, & 3^{tes}, & 6^{tes} \end{array}\right\} \quad (16.$$

so liegen die g_i von je drei Systemen, die in einer Horizontalen stehen,

---

1) Die aus (15. und (15'. abgeleiteten Steiner'schen Punkte des 1ten Systems sollen durch g_i , g_i' bezeichnet werden. Es sind „Steiner'sche Gegenpunkte"; jedes dieser Paare hat die Eigenschaft, dass sie in der Form (8. (8'. Nr. 4 dargestellt, sich nur durch Vertauschung der Horizontal- und Vertikalreihen unterscheiden.

2) Dass die 20 Steiner'schen Punkte zu vieren auf 15 Geraden liegen, von welchen je drei durch einen Steiner'schen Punkt gehen, ist zuerst von Plücker nachgewiesen worden 1829. Crelle's Journ. Bd. V. „Ueber ein neues Princip der Geometrie" S. 268.

in einer der durch g_1 gehenden Plücker'schen Geraden $\mathfrak{P}$, und die Pascal'schen Geraden, welche die drei Punkte g_i bilden, gehen durch verschiedene Tripel der p; hingegen die g_i von je drei Systemen in einer Vertikalreihe bilden ein Tripel auf den drei durch g_1 gehenden Plücker'schen Geraden gelegen, und die Pascal'schen Geraden, welche die drei Punkte g_i bilden, gehen durch dasselbe Tripel der p.

Wenn wir auf die Geraden P' übergehen und die conjugirten Steiner'schen Punkte g_i', so findet gerade das Entgegengesetzte statt. Es vertauscht sich die Bedeutung der Horizontal- und Vertikalreihen in der Anordnung (16. Diejenigen Systeme, welche in einer Vertikalreihe stehen, haben ihre g_i' auf einer der drei durch g_1' gehenden Plücker'schen Geraden; und in drei Systemen, die in (16. in einer Horizontalreihe stehen, bilden die g_i' ein Tripel auf den drei durch g_1' gehenden Geraden $\mathfrak{P}$ gelegen und die Pascal'schen Geraden, welche diese Punkte g_i' bilden, gehen durch dasselbe Tripel der p'.

Die drei Tripel der g_i auf den Geraden $\mathfrak{P}$, welche von g_1 ausgehen und die drei Tripel der g_i' auf den Geraden $\mathfrak{P}$, welche von g_1' ausgehen stehen in ganz ähnlicher Beziehung zu einander, wie die Tripel der p und der p' (Nr. 8). Nämlich die Seiten der Dreiecke gebildet von den Tripeln der g_i sind zugleich die Seiten der von den g_i' gebildeten Tripel. Die neun Seiten dieser Tripel sind mithin selbst Plücker'sche Gerade $\mathfrak{P}$, auf welchen je vier Steiner'sche Punkte liegen und vervollständigen ihre Anzahl zu 15.[1]) Aus der Anordnung (16. ist sogleich zu entnehmen, welche 4 Steiner'sche Punkte auf jeder dieser 9 Geraden $\mathfrak{P}$, Seiten der Tripel, liegen; nämlich die g_i von irgend zwei Systemen in einer Vertikalreihe liegen in einer Geraden mit den g_i' der zwei Systeme, die in verschiedenen Horizontal- und Vertikalreihen stehen, also:

1) Auf die besondere Anordnung, welche die Plücker'schen Geraden zeigen und die Steiner'schen Punkte, ist schon von Herrn Hesse hingewiesen worden („Eine Bemerkung zum Pascal'schen Theorem." Crelles's Journ. Bd. XLI. 1850. Seite 269).

g_2 , g_8 mit g'_3 , g'_6
g_2 , g_9 mit g'_4 , g'_5
g_8 , g_9 mit g'_{10} , g'_7
g_3 , g_5 mit g'_2 , g'_7
g_3 , g_{10} mit g'_8 , g'_4
u. s. f.

Nr. 15. Es erübrigt noch den Beweis für die Behauptung beizubringen, dass die Steiner'schen Punkte der Systeme, welche in der Anordnung (16. in einer Horizontalreihe stehen, also z. B. g_2 , g_7 , g_{10} in einer Geraden liegen mit g_1. Der Beweis lässt sich kurz auf folgende Weise führen.

Auf den drei durch $k_1^{(3)}$ gehenden Geraden

$$25—16 , 36—24 , 14—35$$

liegen die drei Punkte

$$25 , 36 , 14$$

dann die drei Punkte

$$16 , 24 , 35$$

und ausserdem, wie aus dem Bildungsgesetz der einzelnen Systeme sogleich zu entnehmen ist, je ein Kirkman'scher Punkt k des 3ten, 9ten und 6ten Systems (die 3ten in dem Schema), die mit

$$k_3 , k_9 , k_6$$

bezeichnet werden mögen. Betrachten wir die drei perspektivisch liegenden Dreiecke gebildet aus diesen Punkten.

Die homologen Seiten des 1ten und 2ten Dreiecks schneiden sich in den drei Punkten k' des ersten Systems, also auf der Geraden G'_1. Die Seiten des dritten Dreiecks sind die Geraden

k_9k_6 d. i. $3(12—45)—4(23—56)—p_{21}$
k_6k_3 d. i. $5(13—46)—1(23—56)—p_{23}$
k_3k_9 d. i. $2(13—46)—6(12—45)—p_{22}$

Sie schneiden sich mit den homologen Seiten des zweiten Dreiecks in den Punkten p_{21} , p_{23} , p_{22}, also auf P_2. Dieselben Geraden schneiden

sich aber mit den homologen Seiten des ersten Dreiecks in den Punkten g_{10} , g_2 , g_7 ; folglich liegen diese drei Punkte in einer Geraden $\mathfrak{Z}$, und diese Gerade geht mit P_2 und G_1' durch denselben Punkt, enthält mithin auch den Punkt g_1.

Nr. 16. Da drei Pascal'sche Gerade, welche einen Steiner'schen Punkt bilden, immer durch eines der sechs Tripel der Punkte p oder p' hindurchgehen und was vom 1ten System gilt von jedem der neun übrigen gilt, so haben wir in den 10 partiellen Systemen 60 solche Tripel Pascal'scher Punkte, von welchen jedoch jedes viermal gezählt ist. Es können folglich die 45 Pascal'schen Punkte des Hexagramms in 15 Tripel derart zusammengefasst werden, dass die 45 Pascal'schen Geraden, welche durch jedes Tripel hindurchgehen, vier Steiner'sche Punkte bilden. Die sechs Gerade, welche diese vier Punkte verbinden, sind Plücker'sche Gerade.

So bilden, wie sich aus dem Ausdruck für die Pascal'schen Geraden im 2ten partiellen System und den daraus abgeleiteten sogleich entnehmen lässt, die Geraden, welche durch das Tripel

14 , 1(23—56) , 4(23—56)	gehen die Punkte	g_2 , g_{10} , g_4' , g_6'
25 , 2(13—46) , 5(13—46)	„ „ „	g_2 , g_7 , g_3' , g_5'
36 , 6(12—45) , 3(12—45)	„ „ „	g_7 , g_{10} , g_8' , g_9'

u. s. f.

Nr. 17. Betrachten wir noch die Kirkman'schen Punkte, welche in den verschiedenen Systemen auf die Geraden P , P' zu liegen kommen. In jedem der neun abgeleiteten Systeme fällt ein k' auf eine Gerade P, so im 2ten, 7ten und 10ten System auf P_1; im 4ten, 5ten, 8ten auf P_3, im 3ten, 6ten, 9ten auf P_2; und ebenso fällt in jedem dieser Systeme ein k auf eine Gerade P', so im 3ten, 5ten, 10ten System auf P_1', im 2ten, 8ten, 9ten auf P_3', im 4ten, 6ten, 7ten auf P_2'.

Schreibt man also die Systeme in der Ordnung (16., so haben je drei in einer Horizontalreihe einen Kirkman'schen Punkt k' auf derselben Geraden P, und je drei in einer Vertikalreihe haben ein Tripel solcher Punkte auf den drei Geraden P. Das Umgekehrte findet statt für die Kirkman'schen Punkte, welche auf die Geraden P' fallen.

Diese Tripel der Kirkman'schen Punkte k' auf den Geraden P haben eine bemerkenswerthe Lage in Beziehung auf die Tripel der Punkte p auf denselben Geraden und den zugehörigen Steiner'schen Punkten g. Betrachten wir z. B. das Tripel der Punkte k', welche im 2ten, 8ten und 9ten System auf die Geraden P fallen und durch k'_2 , k'_8 , k'_9 bezeichnet sein sollen, und das Tripel p_{13} , p_{23} , p_{33}. Die durch letztere Punkte hindurch gehenden Pascal'schen Geraden bilden ausser g_1 noch die Punkte g_2 , g_8 , g_9. Aber die Gerade $p_{33}g_9$ d. i. 3(12—46)—6(23—45) und die Gerade $p_{23}g_8$ d. i. 3(12—56)—6(13—45) schneiden sich in dem Punkte k'_2 auf P_1. Die Geraden $p_{23}g_2$ und $p_{13}g_9$ d. i. 1(23—56)—5(13—46) und 1(23—45)—5(12—46) schneiden sich in k'_8 auf P_3; endlich die Geraden $p_{33}g_2$ und $p_{13}g_8$, d. i. 2(13—46)—4(23—56) und 2(13—45)—4(12—56) schneiden sich in k'_9 anf P_2.

Die neun Punkte dieser drei Tripel der p , k', und g liegen also zu dreien auf sechs Pascal'schen Geraden. Diese Geraden bilden ein Brianchon'sches Sechsseit; denn das aus diesen Geraden gebildete Sechseck

$$k'_9 \; p_{33} \; k'_2 \; p_{23} \; k'_8 \; p_{13}$$

hat zu Hauptdiagonalen die drei Geraden P, die sich in g_1 schneiden.

Das mit denselben Geraden gebildete Sechseck

$$g_9 \; p_{33} \; g_2 \; p_{23} \; g_8 \; p_{13}$$

hat zu Hauptdiagonalen die drei dritten durch g_2 , g_8 , g_9 gehenden Geraden $p_{13}g_2$, $p_{23}g_9$, $p_{33}g_8$, d. h. die Geraden (14—25), (16—35), (26—34), welche sich in einem Kirkman'schen Punkt k' des ersten Systems, auf der durch g_1 gehenden Salmon'schen Geraden G'_1 gelegen, schneiden.

Nimmt man endlich zu Ecken die Punkte

$$k'_9 \; g_2 \; k'_8 \; g_9 \; k'_2 \; g_8$$

so sind die drei Hauptdiagonalen die Geraden $g_2k'_2$, $g_8k'_8$, $g_9k'_9$, d. h. die drei Salmon'schen Geraden G'_2 , G'_8 , G'_9 , die sich mithin ebenfalls in einem Punkte h treffen.

Ebenso könnte man nachweisen, dass G'_1 , G'_8 , G'_9 sich in einem Punkte schneiden und mithin die vier Geraden G'_1 , G'_2 , G'_8 , G'_9 durch denselben Punkt h gehen.

Man kann daher den Satz im vorigen Nr. zu folgendem vervollständigen:

Die 4.3 Pascal'sche Gerade, welche durch ein Tripel Pascal'scher Punkte gehen, schneiden sich nicht nur zu dreien in vier Steiner'schen Punkten, sondern auch noch zu dreien in vier Kirkman'schen Punkten. Die vier Steiner'schen Punkte und die vier Kirkman'schen (z. B. $g_1g_2g_8g_9$ und $k_1'k_2'k_8'k_9'$) gehören denselben vier partiellen Systemen an. Die sechs Geraden, welche die vier Steiner'schen Punkte verbinden, sind Plücker'sche Gerade; die vier Geraden, welche die Steiner'schen Punkte mit den Kirkman'schen desselben Systems verbinden (g_1k_1' , g_2k_2' , g_8k_8' , g_9k_9') sind Salmon'sche Gerade G (G'), welche sich in einem Punkte h schneiden.

Entsprechend den 15 Tripeln Pascal'scher Punkte gibt es 15 solche Punkte h, in denen sich je vier der Geraden G , G' schneiden, wie bekannt. Auf jeder dieser Geraden liegen drei solche Punkte. So liegen auf G_1' drei Punkte h entsprechend den drei Tripeln der Punkte p auf den Geraden P; ebenso liegen drei Punkte h auf der Geraden G_1 , welche von g_1' ausgeht. Die 18 Salmon'schen Geraden, welche von diesen 6 Punkten auf G_1' und G_1 ausgehen, schneiden sich noch zu vieren in 9 andern Punkten h und bilden mithin eine ganz ähnliche Figur wie die 18 Geraden Π, welche durch die sechs Kirkman'schen Punkte des ersten Systems, auf eben diesen Geraden G_1' , G_1 gelegen, gehen (Nr. 8).

Nr. 18. Anschliessend an Nr. 9 sei noch bemerkt, dass, wenn wir die sechs Sechsecke des 1ten partiellen Systems (6. (6'. in Bezug auf Σ polarisiren, wir den Satz erhalten:

Sind zwei Dreiecke (123), (456) einen Kegelschnitt S eingeschrieben, so können mit den sechs Seiten 1,2 . . 6 sechs Sechsecke gebildet werden, einem und demselben Kegelschnitt S' umschrieben, deren Ecken Pascal'sche Punkte und deren Hauptdiagonalen Pascal'sche Gerade des von den zwei Dreiecken (123) , (456) gebildeten Sechsecks sind, welche sich in

einem Kirkman'schen Punkt dieses Sechsecks schneiden. Die sechs Kirkman'schen Punkte der sechs Sechsecke liegen zu dreien in einer Geraden. Die Ecken dieser sechs Sechsecke sind die 18 Punkte π; ihre Hauptdiagonalen die Geraden Π.

Polarisirt man aber auch die Sechsecke der 9 andern partiellen Systeme, welche aus dem 1ten durch Vertauschung je einer der Geraden 1,2,3 mit je einer der Geraden 4,5,6 hervorgehen und bemerkt, dass die Seiten dieser Sechsecke sämmtlich Linien V sind, deren Pole in Bezug auf Σ Pascal'sche Punkte sind, so erhält man folgenden allgemeinen Satz:

Ist ein Sechseck abcdef einem Kegelschnitt S eingeschrieben, so können mit den 45 Pascal'schen Punkten desselben 60 Sechsecke gebildet werden, welche einem Kegelschnitt umschrieben sind, und für welche die drei Hauptdiagonalen Pascal'sche Gerade und die Brianchon'schen Punkte Kirkman'sche Punkte des Sechsecks abcdef sind. Ie sechs dieser Sechsecke sind ein und demselben Kegelschnitt S_i' umschrieben; dieselben haben ihre Brianchon'schen Punkte zu je dreien in zwei Geraden. Jede der 60 Pascal'schen Geraden gehört als Diagonale dreien der 60 Sechsecke an, entsprechend den drei Combinationen zu zweien der drei Pascal'schen Punkte, die sie trägt, oder auch entsprechend den drei Kirkman'schen Punkten, durch die sie geht. Die Seiten dieser Sechsecke sind Diagonale oder auch Seiten des Sechsecks abcdef; die 10 Kegelschnitte S_i' sind die Reciproken der Kegelschnitte S_i in Bezug auf Σ als Direktrix, also diejenigen Kegelschnitte, welche je einem der 10 Paare von Dreiecken eingeschrieben werden können, welche mit den sechs Punkten a,b . . . f gebildet werden können.

So gehört z. B. zur Combination (126) , (345) das Sechseck gebildet aus den Linien

(12—35) , (35—26) , (26—54) , (54—16) , (16—34) , (34—12)

welches einem Kegelschnitt S_2 eingeschrieben ist. Polarisirt in Bezug

auf Σ gibt dasselbe das Sechseck, dessen Ecken die Pascal'schen Punkte (Nr. 11)

$$3(12-46),(12-46)(13-45),6(13-45),6(23-45),(23-45)(12-56),3(12-56)$$

des ursprünglich gegebenen Sechsecks abcdef sind. Seine Seiten sind die der Dreiecke (bdf) , (ace) , welchen ein Kegelschnitt S_2' , eingeschrieben werden kann; seine drei Hauptdiagonalen sind die drei Pascal'schen Gerade, welche den letzten der Kirkman'schen Punkte (16'. bilden.

München, März 1874.

Das

Bayerische Präcisions-Nivellement.

Dritte Mittheilung

von

Carl Max v. Bauernfeind.

Ergebnisse

des in

Verbindung mit der Europäischen Gradmessung in Bayern

ausgeführten

Präcisions-Nivellements.

Dritte Mittheilung

von

Carl Max v. Bauernfeind.

Indem ich mit Genehmigung der mathematisch-physicalischen Classe der K. Bayerischen Akademie der Wissenschaften die vorliegende dritte Mittheilung über das unter meiner Leitung stehende und zunächst für die Europäische Gradmessung bestimmte Präcisionsnivellement in den Abhandlungen der K. Akademie veröffentliche, bemerke ich, dass diese Mittheilung genau an die zweite vom Jahre 1872 [1]), worin über die Beobachtungen und Rechnungen vom Herbste 1870 bis zum Beginn des Sommers 1872 berichtet wurde, sich anschliesst und demnach die in den Herbstmonaten der Jahre 1872 und 1873 ausgeführten Beobachtungsarbeiten und die in den darauf folgenden Winterhalbjahren hergestellten Berechnungen umfasst.

---

1) Vergl. die Abhandlungen der Classe II, Band XI. Abth. III, Seite 41 bis 95.

Nachdem sich die schon in den Jahren 1868 und 1869 festgestellten Beobachtungs- und Rechnungsmethoden vollständig bewährt hatten, fand ich keine Veranlassung, an denselben eine Aenderung vorzunehmen, vielmehr sorgte ich dafür, dass meine neuen Assistenten, die Herren J. H. Franke und A. Rieppel, welche mit deren Ausführung beauftragt waren, sich genau mit dem bisherigen Messungs- und Rechnungsverfahren [1]) vertraut machten, ehe sie dasselbe anwendeten. Ein günstiger Umstand für die in Rede stehenden Präcisionsarbeiten war es, dass mit dem Wechsel der operirenden Ingenieure nicht auch einer der Messgehilfen zusammenfiel; denn ein vollständiger Personenwechsel würde wahrscheinlich eine Verschiedenheit der Gewichte der hier und in den beiden ersten Mittheilungen behandelten Beobachtungen zur Folge gehabt haben.

Der leichteren Vergleichung wegen werde ich den gegenwärtigen Specialbericht in derselben Weise abtheilen, wie dieses in meinen beiden ersten Mittheilungen über das Bayerische Präcisionsnivellement geschehen ist.

Uebersicht der Nivellements-Arbeiten.

Die hier in Betracht kommenden auswärtigen Arbeiten des Jahres 1872 begannen am 12. August und wurden mit zwei Instrumenten bis zum 13. October fortgesetzt; im Jahre 1873 wurde von Herrn Rieppel allein vom 17. August bis 17. October beobachtet. Auf 63 Reisetage des Jahres 1872 fielen 45 zu Beobachtungen geeignete Arbeitstage, und in diesen wurden die Strecken München—Grafing—Rosenheim und München—Geiselhöring—Regensburg in einer Gesammtlänge von 216 Kilometer nivellirt, während auf 62 Reisetage des verflossenen Jahres 62 Arbeitstage kamen, in denen das Nivellement der Strecken Regensburg—Schwandorf—Weiden und Regensburg—Neumarkt—Nürnberg vollendet werden konnte. Diese beiden Strecken sind zusammen 190,4 Kilometer lang und geben mit den erstgenannten vereinigt eine Länge von 406,4 Kilometer oder 54,78 geographischen Meilen, über welche hier

1) Vergl. die erste Mittheilung in den Abhandlungen der II. Classe, Band XI, Abth. III, Seite 89 bis 132.

zu berichten ist. Fügt man diese Länge zu der bereits früher nivellirten Strecke von 1444 Kilometer, so beträgt die nunmehrige Längenausdehnung des Bayerischen Präcisionsnivellements 1850,4 Kilometer oder 249,28 geographische Meilen.

Die in den Jahren 1872 und 1873 nivellirten Strecken enthalten 239 Fixpunkte, von denen sich 48 an Wänden von Stationsgebäuden befinden und mit den bekannten metallenen Höhenmarken (⊙) bezeichnet sind. Zwischen jenen Fixpunkten waren im Ganzen 3156 Instrumenten-Aufstellungen erforderlich, und von diesen treffen 1663 auf das erste der genannten Jahre: die mittlere Zielweite betrug somit 63,7^{m} im Jahre 1873 und 64,9^{m} im Jahre 1872, während sie 1871 auf 60,0^{m} 1870 auf 66,5^{m} und 1869 auf 60,0^{m} sich berechnete.

Bestimmt man aus den vorliegenden Daten die tägliche Leistung der mit dem Nivelliren beauftragten Ingenieure, so folgt dieselbe für das Jahr 1872 und zwei Instrumente zu 4,8 Kilometer und für das Jahr 1873 und ein Instrument zu 4,4 Kilometer. Diesen mittleren Tagesleistungen stehen aus den Jahren 1870 und 1871 andere von 6,7 und beziehungsweise 4,2 Kilometer gegenüber. Der Unterschied in den täglichen Leistungen mit zwei Instrumenten in den Jahren 1870 und 1871, verglichen mit jenen im Jahre 1872, erklärt sich einfach aus den im letzteren Jahre eingetretenen Personenwechsel, welcher es mit sich brachte, dass die Herren Franke und Rieppel sich erst an die in Bayern gebräuchliche Nivellirmethode und deren gemeinsame Ausführung gewöhnen mussten; und was die im Jahre 1873 wiederholt festgestellte Thatsache betrifft, dass mit zwei Instrumenten nicht das Doppelte von dem, was man mit einem vermag, geleistet werden kann: so habe ich mich hierüber bereits in der zweiten Mittheilung über das Bayerische Präcisionsnivellement (Seite 45) ausgesprochen, wesshalb ich mir erlaube, hier auf meine frühere Aeusserung zu verweisen.

Der Nivellirapparat.

Die beiden in der ersten Mittheilung vom Jahre 1870 abgebildeten und beschriebenen Nivellirinstrumente blieben, mit Ausnahme der in der zweiten Mittheilung (Seite 46) erwähnten kleinen Verbesserungen, in

den Jahren 1872 und 1873 ganz unverändert, und auch die Nivellirlatten blieben die alten, mit Ausnahme der von der Eidgenössischen Aichstätte in Bern untersuchten Latte Nr. I, welche am 4. September 1872 auf der Strecke München—Rosenheim in Folge der Unvorsichtigkeit eines Messgehilfen überfahren wurde und durch eine neue mit I^a bezeichnete ersetzt werden musste.

Diese neue Latte wurde im Winter 1872/1873 in dem geodätischen Institut des K. Polytechnicums zu München mit den daselbst befindlichen Breithaupt'schen metallenen Meterstäben untersucht und bei $19^0{,}1$ C pro Meter um $0{,}001^{mm}$ zu klein befunden, während nach früheren Untersuchungen die Länge eines nominellen Meters der Latte Nr. II bei $9^0{,}4$ C Temperatur $1{,}000312^m$ und an der Latte Nr. III bei $8^0{,}3$ C Temperatur $1{,}000274^m$ betrug. Somit ist die nominelle Meterlänge, je nachdem bei der Arbeit mit einem Instrumente die Latten I^a und II oder I^a und III, oder bei der Arbeit mit zwei Instrumenten die Latten I^a, II, III benützt werden:

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}\,(I^a + II) &= 1{,}000151^m \text{ bei } + 14^0{,}2 \text{ C} \\ \tfrac{1}{2}\,(I^a + III) &= 1{,}000132 \quad ,, \quad + 13\,,7 \\ \tfrac{1}{3}\,(I^a + II + III) &= 1{,}000192 \quad ,, \quad + 12\,,2 \quad . \end{aligned}$$

Die Verhältnisszahl w der mittleren Breite der weissen Centimeter-Felder zur mittleren Breite aller weissen und schwarzen Centimeter-Felder ergab sich für die Latte I^a zu 0,9638, für die Latte II zu 0,9725 und für die Latte III zu 0,9661, somit im Mittel $w = 0{,}9675$, wofür abgerundet 0,97 gesetzt werden kann, so dass die Correction für die einzelnen Felder wie früher 0,03 B beträgt, wenn B der aus dem weissen Felde abgeschätzte Centimeter-Bruchtheil ist.

Die Constanten der Instrumente.

Der Abstand der äusseren Horizontalfäden des distanzmessenden Fernrohrs wurde im Jahre 1872 zweimal bestimmt: das erste Mal vor Beginn und das zweite Mal nach Beendigung der Beobachtungsarbeiten. Es ergab sich dabei

am 10. August 1872 für das Instrument:

Nr I: $\cot\varphi = 137{,}09 \pm 0{,}06$ und $\varphi = 1504'',6 \pm 0'',7$

Nr II: $\cot\varphi = 137{,}17 \pm 0{,}06$ und $\varphi = 1503,\ 7 \pm 0,\ 7;$

am 5. November 1872 für das Instrument:

Nr I: $\cot\varphi = 137{,}16 \pm 0{,}02$ und $\varphi = 1503'',8 \pm 0'',2$

Nr II: $\cot\varphi = 137{,}07 \pm 0{,}04$ und $\varphi = 1504,\ 8 \pm 0,\ 4.$

Im Jahre 1873 wurden ebenfalls zwei Bestimmungen gemacht, die eine in Walhallastrasse und die andere in Parsberg, wobei sich nur für das Instrument Nro. I eine Aenderung ergab, nämlich am erstgenannten Orte für:

Nr I: $\cot\varphi = 136{,}56 \pm 0{,}05$ und $\varphi = 1510'',4 \pm 0'',6$

und in Parsberg ebenfalls für

Nr I: $\cot\varphi = 136{,}85 \pm 0{,}06$ und $\varphi = 1507'',2 \pm 0'',6.$

Demgemäss wurden zur Bestimmung der Entfernungen E folgende Ausdrücke benützt:

1872 für das Instrument Nr I:

$$E = 137{,}12a + 0{,}78$$

1873 für das Instrument Nr I:

$$E = 136{,}71a + 0{,}78$$

und 1872 und 1873 für das Instrument Nr II:

$$E = 137{,}12a + 0{,}78.$$

Die Höhencorrectionen wurden aus den schon früher beschriebenen photographischen Tafeln, denen der Werth $\cot\varphi = 137{,}5$ zu Grunde liegt, entnommen, nachdem schon in der ersten Mittheilung über das Bayerische Präcisionsnivellement dargethan ist, dass die kleinen Unterschiede in den Werthen von $\cot\varphi$, wie sie hier vorkommen, keinen merkbaren Einfluss auf jene Correctionen auszuüben vermögen.

Abschlüsse von Polygonen.

Durch die in den Jahren 1872 und 1873 nivellirten Strecken wurden folgende Polygone zum Abschlusse gebracht:

1. München—Holzkirchen—Rosenheim—Grafing—München in einer Gesammtlänge von 138,9 Kilometer oder 18,73 geographischen Meilen. Der Anschluss geschah bei der Höhenmarke ⊙ Nr 784 in

Rosenheim mit einer Differenz von $0^{m}0015 \pm 0{,}13^{mm}$, während er sich zu $\pm 0{,}55^{mm}$ ergibt, wenn man ihn aus den wahrscheinlichen Fehlern der einzelnen Abtheilungen oder aus den Standfehlern berechnet.

2. München — Geiselhöring — Regensburg — Weiden — Bayreuth — Bamberg — Nürnberg — Gunzenhausen — Augsburg — München

in einer Gesammtlänge von 689,3 Kilometer oder 92,90 geographischen Meilen. Der Anschluss erfolgte an der Höhenmarke in Weiden mit $0^{m}0143 \pm 0{,}0164$, wonach der wahrscheinliche Fehler per Kilometer $\pm 0{,}54^{mm}$ beträgt.

3. München — Regensburg — Neumarkt — Nürnberg — Gunzenhausen — Augsburg — München

in einer Ausdehnung von 482,3 Kilometer oder 65,00 geographischen Meilen. Bei diesem Polygone geschah der Anschluss bei der Höhenmarke ⊙ Nr 365 am Stationsgebäude in Nürnberg mit einer Differenz von $0^{m}0379 \pm 0{,}0121$ und folglich mit einem wahrscheinlichen Fehler per Kilometer von $\pm 1{,}72^{mm}$.

Verzeichniss der Fixpunkte.

Fortsetzung.

Erklärung der Ueberschriften und Zeichen.

Nr Laufende Nummer der Höhenmarke oder des Fixpunktes;
A Nummer einer Abtheilung zwischen zwei benachbarten Fixpunkten, nach der Reihenfolge der Aufnahme;
J Anzahl der Stände des Instruments in einer Abtheilung;
Z die in derselben angewendete mittlere Zielweite in Meter;
D die Distanz zweier sich folgenden Fixpunkte in Meter;
H deren Höhenunterschied in Meter;
w wahrscheinlicher Fehler von H in Millimeter;
w' derselbe Fehler, reducirt auf D = 1 Kilometer, in Millimeter;
⊙ messingene Höhenmarken (Bolzen mit centraler Bohrung) in verticalen Wänden;
□ wagrechte, in Stein gehauene und mit einer Rinne umgebene Vierecke, welche zur Bezeichnung von Fixpunkten dienen;
⍁ dergleichen, mit den eingemeisselten Buchstaben HM (Höhenmarke), oder auch viereckige Cementplatten, in rauhe oder bröckelnde Steine eingesetzt;
= wagrecht geebnete Steinflächen zur Bezeichnung untergeordneter Fixpunkte:
Pl Planiehöhe (Schwellenoberfläche) der Eisenbahnen:
St Wegstunde (halbe Bayerische Meile), bezieht sich auf die in Bayern gebräuchliche Bezeichnung der Bahnstrecken. Eine Bayerische Meile misst 7415^{m}.

Die Kunstbauten der Bahnen sind theils auf grössere Strecken fortlaufend, theils nach den bei dem Baue bestandenen Sectionen numerirt. Eine definitive Bezeichnung derselben bleibt für die letzte Mittheilung über das Bayerische Präcisionsnivellement vorbehalten.

Die Coten in Meter gehen von einem Generalhorizont aus, welcher 1600′ Bayr. = 466,976^{m} über dem Nullpunkt des Lindauer Bodenseepegels und (nach vorläufigen Ermittlungen) 862^{m} über dem Meeresspiegel liegt.

Die eingeklammerten Abtheilungen $\{ \ldots . \}$ bilden Zweignivellements zu Höhenmarken und Fixpunkten, auf deren Coten das durchlaufende Nivellement sich nicht stützt.

München — Grafing — Rosenheim.

Nr	A	J	Z	D	± H	w	w^2	w'	Cote
743.	Signal-Glockensäule östl. neben dem 3. Pfeiler (von Norden her) der Wegbrücke für die Salzstrasse im Bahnhof München □ über Pl bei St 0,2 + 120m								
	—	—	—	—		—	—	—	340,1405
744.	⊙ an der Wegbrücke für die Salzstrasse im Bahnhofe München, 3. Pfeiler von Norden her, für den westl. Träger, Nordseite, bei St 0,2 + 130m								
	—	—	—	—	— 1,5048	—	—	—	338,6357
750.	⌓ auf dem offenen Bahndurchlass zwischen beiden Bahnen nach Rosenheim, südlich von der Landsberger Strasse, mittlere Gesimsplatte des gemeinschaftlichen Flügels, bei St 0,2 + 280m, nahezu Pl								
	1	13	64	1665	— 3,8832	1,4	1,9	1,1	336,2573
995.	□ auf der Umfassungsmauer der Signal-Glockensäule bei Bahnwärterhaus Nr 1b								
	2	11	58	1151	— 4,2599	0,4	0,2	0,3	331,9974
996.	□ auf der ersten nordwestl. Bodenplatte in der Vorhalle zu Station Thalkirchen, dicht neben dem Eingange zum Zimmer des Stationsdieners								
	3	14	68	1845	+ 5,1458	0,7	0,5	0,5	337,1432
997.	□ auf der ersten südöstl. Bodenplatte in der Vorhalle zu Station Thalkirchen								
	4	1	16	32	— 0,0114	—	—	—	337,1318
998.	⌓ auf der eisernen Fachwerkbrücke mit 3 Oeffnungen über die Isar, nordwestl. Widerlager, bei St 1,6 + 182m								
	1	5	64	680	+ 0,2437	0,3	0,1	0,4	337,3755
999.	⌓ auf der eisernen Fachwerkbrücke mit 3 Oeffnungen über die Isar, südöstl. Widerlager, bei St 1,6 + 365m								
	2	1	91	182	— 0,0003	—	—	—	337,3752
1000.	□ auf der nördl. Futtermauer der gewölbten Strassenbrücke für den Weg von Giesing nach der Au, bei St 2,1 + 95m								
	3	12	62	1544	— 1,4808	0,6	0,3	0,4	335,8944
1001.	□ auf dem südöstl. Randsteine am Eingange der grossen Drehscheibe im Bahnhofe Haidhausen								
	4	17	62	2101	— 5,8061	0,7	0,5	0,5	330,0883
1002.	□ unter der Höhenmarke zu Station Haidhausen, in einen Pflasterstein gehauen								
	5	2	67	269	— 0,0045	0,2	0,0	0,4	330,0838
1003.	⊙ am südöstl. Pfeiler des provisorischen Betriebsgebäudes (Güterhalle) zu Station Haidhausen								
	—	—	—	—	— 1,7144	—	—	—	328,3694

München — Grafing — Rosenheim.

Nr	A	J	Z	D	± H	w	w^2	w'	Cote
1004.	= auf dem Bahngrenzsteine Nr 192 südl. der Bahn bei St 0,3 + 260^m (Zählung der Bahnstunden vom Bahnhofe Haidhausen aus)								
	1	10	55	1107	+ 1,5707	0,5	0,2	0,5	331,6545
1005.	= auf dem Bahngrenzsteine südl. der Bahn bei St 0,9 + 58^m								
	2	20	50	2011	+ 4,3914	1,5	2,2	1,0	336,0459
1006.	⊙ am Betriebsgebäude zu Station Trudering, Nordseite, dicht neben dem Eingange zur Expedition								
	3	12	52	1249	— 3,7923	0,5	0,3	0,5	332,2536
1007.	□ auf dem Bahngrenzsteine ohne Nummer, nördl. der Bahn, bei St 1,5 + 13^m								
	1	8	59	945	— 0,5476	0,5	0,3	0,6	331,7060
1008.	□ auf dem Bahngrenzsteine Nr 24, nördl. der Bahn, bei St 2,3 + 335^m								
	2	28	59	3291	— 8,1446	1,1	1,2	0,6	323,5614
1009.	⊙ am Betriebsgebäude zu Station Haar, Nordseite, dicht neben dem Eingange zur Expedition								
	3	10	60	1199	— 5,3584	0,6	0,3	0,5	318,2030
1010.	□ auf der Umfassungsmauer der Signal-Glockensäule, bei Bahnwärterhaus Nr 7, südöstl. Ecke, bei St 3,0 + 230^m								
	1	12	58	1396	— 0,9034	1,0	1,1	0,9	317,2996
1011.	□ auf der Umfassungsmauer der Signal-Glockensäule, bei Bahnwärterhaus Nr 9, südöstl. Ecke, bei St 4,1 + 220^m								
	2	34	60	4084	— 5,2588	1,3	1,6	0,6	312,0408
1012.	□ auf der Umfassungsmauer der Signal-Glockensäule, bei Bahnwärterhaus Nr 10, nordwestl. Ecke, bei St 4,7 + 205^m								
	3	18	61	2197	— 8,2123	0,9	0,8	0,6	303,8285
1013.	⊙ am Betriebsgebäude zu Station Zorneding, Nordseite, dicht neben dem Eingange zum Wartesaal III. Classe								
	4	3	48	288	— 1,7560	0,2	0,0	0,4	302,0725
1014.	□ auf der Umfassungsmauer der Signal-Glockensäule, bei Bahnwärterhaus Nr 12, südöstl. Ecke								
	1	13	64	1671	+ 1,5138	1,0	1,1	0,8	303,5863
1015.	⊙ am Betriebsgebäude zu Station Kirchseeon, Südwestseite, dicht neben dem Eingange zur Expedition								
	2	24	61	2908	— 4,5937	0,9	0,8	0,5	298,9926

München — Grafing — Rosenheim.

Nr	A	J	Z	D	± H	w	w^2	w'	Cote
1016.	□ auf dem südwestl. Decksteine des gedeckten Bahndurchlasses Nr 4[a] bei St 6,8 + 75[m], tief unter Pl								
	1	23	60	2780	+ 11,3817	0,9	0,8	0,5	310,3743
1017.	⊙ am Betriebsgebäude zu Station Grafing, Südwestseite, dicht neben dem Eingange zur Expedition								
	2	20	58	2328	+ 6,8976	0,8	0,7	0,5	317,2719
1018.	□ auf der Umfassungsmauer der Signal-Glockensäule, bei Bahnwärterhaus Nr 18, südöstl. Ecke								
	1	3	53	316	+ 2,0993	0,2	0,0	0,4	319,3712
1019.	□ auf der offenen Bahndurchfahrt Nr 7, I[ter] südwestl. Flügeldeckstein des südöstl. Widerlagers, bei St 7,8 + 365[m]								
	2	12	57	1365	+ 6,9337	0,8	0,6	0,7	326,3049
1020.	□ auf der Umfassungsmauer der Signal-Glockensäule, bei Bahnwärterhaus Nr 20, südwestl. Ecke, bei St 8,5 + 325[m]								
	3	22	58	2570	+ 12,6096	0,8	0,7	0,5	338,9145
1021.	□ auf der Umfassungsmauer der Signal-Glockensäule, bei Bahnwärterhaus Nr 21 südwestl. Ecke, bei St 8,9 + 230[m]								
	4	12	58	1388	+ 6,8289	0,5	0,2	0,4	345,7434
1022.	⊙ am Betriebsgebäude zu Station Assling, Südwestseite, dicht neben dem Eingange zum Zimmer des Stationsdieners								
	5	16	57	1820	+ 5,0545	0,7	0,4	0,5	350,7979
1023.	= auf dem Bahngrenzsteine Nr 84 östl. der Bahn, bei St 10,2 + 138[m]								
	1	28	59	3309	+ 17,6792	0,9	0,9	0,5	368,4771
1024.	⊙ am Betriebsgebäude zu Station Ostermünchen, Südwestseite, dicht neben dem Eingange zum Zimmer des Stationsdieners								
	2	23	71	3263	— 11,4434	0,9	0,9	0,5	357,0337
1025.	□ auf der gewölbten Bahnbrücke und Durchfahrt Nr 2 und 3, nördl. Brüstungsstein des östl. Widerlagers bei St 13,0 + 275[m]								
	1	52	66	6881	+ 34,6132	1,8	3,4	0,7	391,6469
1026.	⊙ am Betriebsgebäude zu Station Karolinenfeld, Südwestseite, dicht neben dem Eingange zur Expedition								
	2	5	56	560	— 1,2221	0,3	0,1	0,4	390,4248
1027.	= auf dem gedeckten Bahndurchlass Nr 6 südwestl. Kante der ersten Deckplatte bei St 13,5 + 200[m]								
	1	9	61	1097	+ 6,6686	0,4	0,1	0,3	397,0934

München — Landshut — Regensburg — Weiden.

Nr	A	J	Z	D	± H	w	w^2	w'	Cote
1028.	= auf dem gedeckten Wegdurchlass Lit. A, südwestl. Deckplatte, bei St 13,7 + 335m								
	2	10	50	1005	+ 5,0824	0,5	0,3	0,5	402,1758
782.	□ auf der gewölbten Bahnbrücke Nr 2 mit 3 Oeffnungen über den Markt-Canal, am Westende des Bahnhofes Rosenheim, südl. Stirn, Gesimsstein des östl. vorspringenden Stirnflügels, bei St 19,5 + 302m nahezu Pl								
	3	29	58	3380	+ 13,0810	1,1	1,3	0,6	415,2568
783.	= unter der Höhenmarke zu Station Rosenheim, in die Treppenstufe gehauen								
	4	5	45	445	— 0,6542	0,4	0,1	0,5	414,6026
784.	⊙ am Betriebshauptgebäude zu Station Rosenheim, Haupteingang von der Stadt her, Nordseite, westl. Seitenfläche des vortretenden Portals								
	—	—	—	—	— 1,5412	—	—	—	413,0614

München — Landshut — Regensburg — Weiden.

743.	Signal-Glockensäule östl. neben dem 3. Pfeiler (von Norden her), der Wegbrücke für die Salzstrasse im Bahnhofe München, □ 0,2m über Pl								
	—	—	—	—	—	—	—	—	340,1405
1029.	□ auf dem Bahngrenzsteine Nr 84, westl. der Bahn								
	1	8	62	985	— 0,8476	0,4	0,2	0,4	339,2929
1030.	□ auf dem Bahngrenzsteine ohne Nummer, östl. der Bahn, bei St 0,9 + 150m								
	2	13	68	1772	+ 6,5358	0,7	0,5	0,5	345,8287
1031.	□ auf dem offenen Bahndurchlass Nr 1 über den Würmkanal, nordwestl. Widerlager, nördl. Flügeldeckstein, bei St 1,1 + 325m, Pl								
	3	7	66	921	+ 2,4277	0,4	0,2	0,4	348,2564
1032.	□ auf dem Bahngrenzsteine ohne Nummer, östl. der Bahn, bei St 2,4 + 275m								
	4	35	68	4765	+ 17,7289	1,1	1,3	0,5	365,9853
1033.	⊙ am Betriebsgebäude zu Station Feldmoching, Nordseite								
	5	4	45	357	— 1,6238	0,4	0,2	0,7	364,3615

München — Landshut — Regensburg — Weiden.

Nr	A	J	Z	D	± H	w	w^2	w'	Cote
1034.	= auf dem Bahngrenzsteine ohne Nummer, westl. der Bahn, bei St 3,2 + 27m								
	1	18	66	2380	+ 10,1000	0,9	0,9	0,6	374,4615
1035.	⊙ am Betriebsgebäude zu Station Schleissheim, westl. Pfeiler, zwischen den Eingängen zur Expedition und zum Wartesaal II. Classe								
	2	12	70	1684	+ 1,5434	0,8	0,6	0,6	376,0049
1036.	□ auf dem Bahngrenzsteine ohne Nummer, östl. der Bahn, bei St 4,3 + 90m								
	1	19	65	2462	+ 8,8118	0,8	0,7	0,5	384,8167
1037.	□ auf dem Bahngrenzsteine ohne Nummer, nordwestl. der Bahn, bei St 4,8 + 24m								
	2	15	60	1806	+ 5,1735	0,7	0,5	0,5	389,9902
1038.	⊙ am Betriebsgebäude zu Station Lohhof, Nordseite, westl. Ecke								
	3	5	61	612	— 1,2622	0,4	0,2	0,5	388,7280
1039.	□ auf dem Bahngrenzsteine ohne Nummer, nordwestl. der Bahn, bei St 5,9 + 280m								
	1	26	72	3753	+ 8,3576	0,9	0,7	0,5	397,0856
1040.	□ auf dem Bahngrenzsteine ohne Nummer, nordwestl. der Bahn, bei St 6,6 + 24m								
	2	18	65	2342	+ 2,5624	0,7	0,5	0,5	399,6480
1041.	⊙ am Betriebsgebäude zu Station Neufahrn, Nordwestseite, dicht neben dem Eingange zur Expedition								
	3	6	72	865	— 1,7219	0,4	0,2	0,5	397,9261
1042.	□ auf dem offenen Bahndurchlass Nr 1, I^{ter} nordwestl. Flügeldeckstein, bei St 7,5 + 190m								
	1	21	63	2646	+ 7,1419	0,9	0,9	0,6	405,0680
1043.	□ auf dem Bahngrenzsteine ohne Nummer, nordwestl. der Bahn, bei St 8,3 + 292m								
	2	23	67	3074	+ 3,7714	0,9	0,9	0,5	408,8394
1044.	□ auf dem gewölbten Bahndurchlass Nr 6, nordöstl. Flügeldeckstein, bei St 9,1 + 315m								
	3	23	65	2993	+ 5,2021	0,9	0,8	0,5	414,0415
1045.	⊙ am Betriebshauptgebäude zu Station Freising, Nordostseite, zwischen den Eingängen zum Wartesaal III. Classe und dem Gepäckbureau								
	4	13	59	1530	— 0,3176	0,9	0,9	0,7	413,7239
1046.	⊼ auf der schiefen Blechträgerbrücke Nr 12 mit 4 Oeffnungen, südl. Flügelmauer, III^{ter} südöstl. Flügeldeckstein, bei St 9,6 + 325m, Bahnhof-Pl								
	1	3	57	341	+ 2,0821	0,3	0,1	0,4	415,8060

Nr	A	J	Z	D	± H	w	w^2	w'	Cote
1047.	□ auf dem Bahngrenzsteine ohne Nummer, östl. der Bahn, bei St 10,2 + 280m								
	2	18	61	2185	+ 6,0551	0,7	0,4	0,4	421,8611
1048.	□ auf dem offenen Bahndurchlass Nr 14, südöstl. Flügelmauer, II^{ter} Deckstein, bei St 11,3 + 76m								
	3	27	72	3872	+ 3,1659	0,9	0,8	0,5	425,0270
1049.	⊙ am Betriebsgebäude zu Station Langenbach, Westseite, dicht neben dem Eingange zur Expedition								
	4	24	70	3355	+ 5,9923	0,9	0,8	0,5	431,0193
1050.	□ auf dem offenen Bahndurchlass Nr 22, I^{ter} Deckstein der südwestl. Flügelmauer, bei St 12,9 + 296m								
	1	21	67	2828	+ 9,1976	1,0	1,0	0,6	440,2169
1051.	□ auf dem offenen Bahndurchlass Nr 2, I^{ter} Deckstein der südwestl. Flügelmauer, bei St 13,2 + 66m Pl								
	2	8	54	865	+ 0,3844	0,4	0,2	0,4	440,6013
1052.	□ auf dem Bahngrenzsteine ohne Nummer, westl. der Bahn, bei St 14,0 + 294m								
	3	23	69	3196	+ 6,6291	0,8	0,7	0,5	447,2304
1053.	□ auf der Umfassungsmauer der Drehscheibe zu Station Moosburg, westl. Randstein								
	4	3	64	384	— 0,3490	0,4	0,1	0,6	446,8814
1054.	□ auf der Blechträgerbrücke Nr 5 mit 9 Oeffnungen über die Amper, südöstl. Eck-Pfeiler des nordöstl. Widerlagers, bei St 14,8 + 200m								
	5	20	62	2498	+ 1,0135	0,7	0,5	0,5	447,8949
1055.	□ auf dem offenen Bahndurchlass Nr 11, II^{ter} Deckstein der südöstl. Flügelmauer bei St 16,0 + 220m								
	6	36	63	3519	+ 6,8201	1,2	1,4	0,5	454,7150
1056.	⊙ am Betriebsgebäude zu Station Bruckberg, Nordwestseite								
	7	4	47	377	— 1,5595	0,4	0,2	0,6	453,1555
1057.	= auf dem Perron zu Station Bruckberg, Ostseite								
	1	1	20	40	+ 1,2448	0,1	0,0	0,5	454,4003
1058.	□ auf dem Bahngrenzsteine ohne Nummer, nordöstl. der Bahn, bei St 16,5 + 218m								
	2	10	67	1349	+ 4,1251	0,5	0,2	0,4	458,5254

München — Landshut — Regensburg — Weiden.

Nr	A	J	Z	D	± H	w	w^2	w'	Cote
1059.	□ auf dem offenen Bahndurchlass Nr 18, II^{ter} Deckstein der südwestl. Flügelmauer, bei St 17,1 + 180^{m}								
	3	15	75	2243	+ 1,8996	0,4	0,2	0,3	460,4250
1060.	□ auf dem offenen Bahndurchlass Nr 19, II^{ter} Deckstein der östl. Flügelmauer, bei St 17,4 + 210^{m}, Pl								
	4	8	68	1096	+ 2,1413	0,3	0,1	0,3	462,5663
1061.	□ auf dem offenen Bahndurchlass Nr 21, II^{ter} Deckstein der südöstl. Flügelmauer, bei St 18,0 + 165^{m}, Pl								
	5	16	70	2240	+ 1,8527	0,8	0,6	0,5	464,4190
1062.	□ auf dem offenen Bahndurchlass Nr 24 mit 3 Oeffnungen über den Pfettragbach, II^{ter} Deckstein der östl. Flügelmauer, bei St 18,7 + 353^{m}								
	6	19	73	2783	+ 3,7487	0,9	0,8	0,5	468,1677
1063.	□ auf dem offenen Bahndurchlass Nr 2 mit 3 Oeffnungen, IV^{ter} Deckstein der östl. Flügelmauer bei St 19,0 + 36^{m}								
	7	7	57	792	+ 0,7759	0,7	0,5	0,8	468,9436
1064.	⌓ auf der Blechträgerbrücke Nr 4, II^{ter} Deckstein der südlichen Flügelmauer, bei St 19,3 + 200^{m}								
	8	12	53	1281	+ 1,7096	0,5	0,2	0,4	470,6532
1065.	⊙ am Betriebshauptgebäude zu Station Landshut, nordöstl. Pfeiler, dicht neben dem Eingange zum Portier								
	9	10	61	1228	— 1,4867	0,8	0,6	0,7	469,1665
1064.	⌓ auf der Blechträgerbrücke Nr 4, II^{ter} Deckstein der südl. Flügelmauer bei St 19,3 + 200^{m}								
	1	10	61	1228	+ 1,4867	0,8	0,6	0,7	470,6532
1066.	□ auf der Blechträgerbrücke Nr 5, III^{ter} Deckstein der nordöstl. Flügelmauer, bei St 20,0 + 79^{m} (Landshut—Regensburger Strecke)								
	2	1	34	69	+ 0,0814				470,7346
1067.	= auf dem Bahngrenzsteine ohne Nummer, westl. der Bahn, bei St 20,6 + 74^{m}								
	3	16	69	2217	— 3,8900	0,6	0,3	0,4	466,8446
1068.	□ auf der Blechträgerbrücke Nr 12, V^{ter} Deckstein der südöstl. Flügelmauer, bei St 20,9 + 295^{m}								
	4	9	74	1340	— 3,1381	0,6	0,4	0,5	463,7065

München — Landshut — Regensburg — Weiden.

Nr	A	J	Z	D	± H	w	w^2	w'	Cote
1069.	□ auf dem Bahngrenzsteine ohne Nummer, nordwestl. der Bahn, bei St 21,8 + 258^m								
	5	27	61	3285	— 19,2143	0,8	0,7	0,5	444,4922
1070.	⊙ an der Wegbrücke ausserhalb des Bahnhofes Mirskofen, östl. Pfeiler, Westseite, bei St 22,0 + 55^m								
	6	5	55	547	— 1,8492	0,4	0,1	0,5	442,6430
1071.	□ auf dem Bahngrenzsteine ohne Nummer, nordöstl. der Bahn, bei St 22,4 + 87^m								
	1	14	54	1512	— 8,2501	0,7	0,4	0,5	434,3929
1072.	□ auf dem Viaduct Nr 21 mit 5 Oeffnungen, I^{ter} nordöstl. Brüstungsstein des nördl. Widerlagers, bei St 22,7 + 140^m								
	2	9	65	1166	— 8,1459	0,5	0,2	0,4	426,2470
1073.	□ auf dem Viaduct Nr 24 mit 5 Oeffnungen, nordöstl. Brüstungsstein, bei St 23,9 + 4^m, 0,04^m über Pl								
	3	30	72	4310	— 7,4830	0,9	0,9	0,5	418,7640
1074.	□ auf dem Bahngrenzsteine ohne Nummer, südl. der Bahn, bei St 24,1 + 14^m								
	4	7	54	752	+ 6,0785	0,4	0,1	0,4	424,8425
1075.	□ auf dem Wegdurchlass Lit. A und B, nordwestl. Deckstein, bei St 24,4 + 210^m								
	5	11	59	1309	+ 9,1707	0,5	0,3	0,4	434,0132
1076.	⊙ am Betriebsgebäude zu Station Ergoldsbach, Westseite, dicht neben dem Eingange zur Expedition								
	6	14	59	1642	+ 5,1209	1,0	0,9	0,8	439,1341
1077.	□ auf dem offenen Bahndurchlass Nr 9, westl. Eckstein des südl. Widerlagers, bei St 25,4 + 155^m								
	1	14	72	2022	+ 11,7886	0,7	0,5	0,5	450,9227
1078.	□ auf dem offenen Bahndurchlass Nr 11, I^{ter} Deckstein der östl. Flügelmauer, bei St 25,6 + 260^m								
	2	7	60	842	+ 2,9176	0,4	0,2	0,4	453,8403
1079.	□ auf der gewölbten Bahnbrücke Nr 14 mit 2 Oeffnungen, I^{ter} nordwestl. Deckstein, bei St 26,2 + 75^m								
	3	13	73	1909	+ 3,5680	0,5	0,2	0,3	457,4083
1080.	□ auf dem gewölbten Bahndurchlass Nr. 25, I^{ter} nordöstl. Deckstein, bei St 27,3 + 192^m								
	4	30	72	4345	+ 13,5104	1,0	1,0	0,5	470,9187

Nr	A	J	Z	D	± H	w	w^2	w'	Cote
1081.	⊙ am Betriebsgebäude zu Station Niederlindhardt, Südseite, dicht neben dem Eingange zur Expedition								
	5	4	49	396	— 2,1095	0,2	0,1	0,4	468,8092
1082.	☐ auf dem gewölbten Bahndurchlass Nr 30, II^{ter} nordöstl. Deckstein, bei St 27,9 + 338^{m}								
	1	14	71	1986	+ 10,3291	0,8	0,6	0,6	479,1383
1083.	☐ auf dem gewölbten Bahndurchlass Nr 33, I^{ter} nordwestl. Deckstein, bei St 28,6 + 305^{m}								
	2	22	58	2567	+ 7,6731	0,7	0,5	0,5	486,8114
1084.	☐ unter der Höhenmarke zu Station Laberweinting, in die Treppenstufe gehauen								
	3	17	69	2347	+ 5,5464	0,7	0,5	0,5	492,3578
1085.	⊙ am Betriebsgebäude zu Station Laberweinting, Ostseite, dicht neben dem Eingange zur Expedition								
					— 1,5820				490,7758
1086.	☐ auf der gewölbten Bahnbrücke Nr 36, mit 2 Oeffnungen, II^{ter} Deckstein der nordöstl. Flügelmauer, bei St 29,3 + 345^{m}								
	1	3	52	313	+ 0,3467	0,4	0,2	0,8	492,7045
1087.	☐ auf dem offenen Bahndurchlass Nr 40, I^{ter} südl. Deckstein des östl. Widerlagers, bei St 30,1 + 368^{m}								
	2	23	65	2990	+ 9,1525	1,0	0,9	0,6	501,8570
1088.	☐ auf der Umfassungsmauer der grossen Drehscheibe zu Station Geisselhöring, nordöstl. Randstein								
	3	25	59	2968	+ 0,7020	0,7	0,5	0,4	502,5590
1089.	⊙ am Betriebshauptgebäude zu Station Geisselhöring, Südostseite, dicht neben dem Eingange zum Telegraphenbureau								
	4	1	59	119	— 2,0114	0,2	0,0	0,6	500,5476
1090.	☐ auf der offenen Bahndurchfahrt Nr 22, I^{ter} östl. Deckstein des nordöstl. Widerlagers, bei St 45,5 + 95^{m}								
	1	16	56	1797	+ 9,4961	0,7	0,6	0,6	510,0437
1091.	☐ auf der Fluthbrücke Nr 13 mit 6 Oeffnungen, I^{ter} nördl. Brüstungsstein, bei St 43,7 + 60^{m}, 0,13^{m} über Pl								
	2	48	70	6715	+ 8,4911	1,3	1,7	0,5	518,5348

München — Landshut — Regensburg — Weiden.

Nr	A	J	Z	D	± H	w	w^2	w'	Cote
1092.	⊙ am Betriebsgebäude zu Station Sünching, Nordostseite, dicht neben dem Eingange zur Expedition								
	3	4	64	516	— 1,8813	0,4	0,1	0,5	516,6535
1093.	□ auf dem gedeckten Wegdurchlass, Lit. E und F, II^{ter} westl. Deckstein. bei St 43.2 + 265^{m}								
	1	10	56	1124	— 2,5231	0,5	0,3	0,5	514,1304
1094.	⊏ auf der schiefen Blechträgerbrücke Nr 6 (dicht vor Station Taimering), I^{ter} Deckstein der nordwestl. Flügelmauer, bei St 42,3 + 190^{m}								
	2	24	72	3440	+ 5,4503	0,9	0,8	0,5	519,5807
1095.	□ auf dem Perron zu Station Moosham, Südwestseite								
	3	23	73	3349	— 1,0283	0,9	0,8	0,5	518,5524
1096.	⊙ am Betriebsgebäude zu Station Moosham, Südwestseite, dicht neben dem Eingange zum Wartesaal I^{ter} und II^{ter} Classe								
	4	1	19	38	— 1,7394	0,2	0,0	1,0	516,8130
1097.	□ auf dem gewölbten Bahndurchlass Nr 14, I^{ter} südwestl. Deckstein, bei St 40,9 + 250^{m}								
	1	14	62	1745	+ 5,6302	0,8	0,6	0,6	522,4432
1098.	□ auf der Umfassungsmauer der Waage zu Station Mangolding, südwestl. Randstein								
	2	24	59	2820	— 1,1454	0,8	0,7	0,5	521,2978
1099.	□ auf dem offenen Bahndurchlass Nr 9, I^{ter} Deckstein des nordwestl. Widerlagers, bei St 39,4 + 330^{m}								
	3	19	73	2778	+ 1,1800	0,7	0,5	0,4	522,4778
1100.	□ auf dem offenen Bahndurchlass Nr 8, II^{ter} Deckstein des westl. Widerlagers, bei St 39,0 + 326^{m}								
	4	10	70	1399	— 3,2160	0,5	0,2	0,4	519,2618
1101.	⊙ am Betriebsgebäude zu Station Obertraubling, Nordostseite								
	5	1	51	102	— 2,1260	0,2	0,0	0,5	517,1358
1102.	□ auf dem offenen Bahndurchlass Nr 5, I^{ter} südwestl. Deckstein, bei St 38,1 + 217^{m}								
	1	23	73	3339	+ 7,0413	1,1	1,2	0,6	524,1771
1103.	⊏ auf dem gewölbten Bahndurchlass Nr 1, II^{ter} Deckstein des nordöstl. Widerlagers, bei St 37,4 + 33^{m} [Abzweigung der Linie Regensburg—Eger]								
	2	19	73	2790	+ 3,3106	1,0	0,9	0,6	527,4877

München — Landshut — Regensburg — Weiden.

Nr	A	J	Z	D	± H	w	w^2	w'	Cote
1104.	□ auf dem Bahngrenzsteine ohne Nummer, nordwestl. der Bahn, bei St 37,0 + 250m, 19m bis zur Ueberfahrt Nr 136								
	3	9	70	1267	— 4,8971	0,5	0,3	0,5	522,5906
1105.	= unter der Höhenmarke zu Station Regensburg, in die Treppenstufe gehauen								
	4	4	56	447	— 0,7960	0,2	0,0	0,3	521,7946
1106.	⊙ am Betriebshauptgebäude zu Station Regensburg, Nordseite, mittlerer Bogenpfeiler der Vorhalle gegen die Stadt								
					— 1,6406				520,1540

Regensburg — Weiden.

1105.	= unter der Höhenmarke zu Station Regensburg, in die Treppenstufe gehauen								
									521,7946
1104.	□ auf dem Bahngrenzsteine ohne Nummer, nordwestl. der Bahn, bei St 37,0 + 250m, 19m bis zur Ueberfahrt Nr 136								
	1	5	49	487	+ 0,8057	0,3	0,1	0,5	522,6003
1103.	⊼ auf dem gewölbten Bahndurchlass Nr 1, IIter Deckstein des nordöstl. Widerlagers, bei St 37,4 + 33m [Abzweigung der Linie Regensburg—Eger]								
	2	11	58	1282	+ 4,8899	0,7	0,5	0,6	527,4902
1107.	□ auf der eisernen Gitterbrücke mit 5 Oeffnungen über die Donau, südwestl. Widerlager, bei St 36,9 + 243m								
	3	13	63	1637	— 3,4868	0,8	0,6	0,6	524,0034
1108.	⊼ auf der eisernen Gitterbrücke mit 5 Oeffnungen über die Donau, nordwestl. Widerlager, Brüstungsstein dicht neben dem Brückenportal, bei St 36,9 + 0m								
	4	2	64	258	+ 0,0358	0,2	0,0	0,4	524,0392
1109.	□ auf der Umfassungsmauer der Waage zu Station Walhallastrasse, südwestl. Eckstein								
	5	4	74	597	+ 2,0468	0,4	0,2	0,6	526,0860
1110.	□ auf dem gedeckten Bahndurchlass Nr 27, nordwestl. Deckstein, bei St 35,8 + 171m (dicht vor der Haltestelle Wutzelhofen)								
	6	23	69	3160	— 8,1271	1,3	1,6	0,7	517,9589

München — Landshut — Regensburg — Weiden.

Nr	A	J	Z	D	± H	w	w^2	w'	Cote
1111.	□ auf dem gedeckten Bahndurchlass Nr 25, westl. Deckstein, bei St 34,3 + 60m								
	7	11	72	1583	— 0,2650	0,5	0,2	0,4	517,6939
1112.	□ auf dem offenen Bahndurchlass Nr 18, nordöstl. Deckstein, bei St 33,2 + 300m								
	8	27	72	3885	— 0,2729	1,1	1,3	0,6	517,4210
1113.	□ auf der steinernen Brücke Nr 16, mit 1 Oeffnung für Abfluss von Bergwasser, südöstl. Brüstungsstein, bei St 32,9 + 75m, 0,4m über Pl								
	9	10	67	1335	— 0,8790	0,5	0,3	0,4	516,5420
1114.	= unter der Höhenmarke zu Station Regenstauf, in die Treppenstufe gehauen								
	10	8	61	979	+ 1,8057	0,6	0,4	0,6	518,3477
1115.	⊙ am Betriebsgebäude zu Station Regenstauf, Südostseite, dicht neben dem Eingange zum Cassa- und Gepäcklocal								
					— 1,5006				516,8471
1116.	□ auf der steinernen Brücke Nr 13 mit 6 Oeffnungen über den Regen, südöstl. Brüstungsstein des östl. Widerlagers, bei St 32,5 + 40m, 0,38m über Pl								
	1	4	59	475	+ 1,3952	0,5	0,3	0,7	519,7429
1117.	= auf dem Bahngrenzsteine ohne Nummer, östl. der Bahn, bei St 32,0 + 70m								
	2	16	60	1928	— 5,1526	0,7	0,5	0,5	514,5903
1118.	□ auf dem gewölbten Bahndurchlass Nr 6, südl. Brüstungsmauer, östl. Deckstein, bei St 30,8 + 90m								
	3	37	60	4407	— 21,6920	1,2	1,5	0,6	492,8983
1119.	= auf dem Perron zu Station Ponholz, Südostseite								
	4	18	59	2114	— 9,8256	0,8	0,6	0,6	483,0727
1120.	⊙ am Betriebsgebäude zu Station Ponholz, Südostseite, zwischen den Eingängen zum Wartesaal Ier und IIter Classe und der Expedition								
	5	1	13	25	— 1,8448				481,2279
1121.	□ auf der offenen Bahndurchfahrt Nr 30, Ier nordwestl. Flügeldeckstein des westl. Widerlagers, bei St 29,7 + 265m								
	1	15	60	1796	— 6,3091	0,7	0,5	0,5	474,9188
1122.	□ auf dem offenen Bahndurchlass Nr 28, südöstl. Deckstein bei St 29,4 + 87m, dicht vor Station Haidhof								
	2	11	59	1291	— 3,5061	0,6	0,3	0,5	471,4127

Nr	A	J	Z	D	± H	w	w^2	w'	Cote
1123.	⊙ am Betriebsgebäude zu Station Haidhof, Ostseite, dicht neben dem Eingange zum Wartesaal III^{ter} Classe								
	3	1	44	89	— 2,0121	0,1	0,0	0,4	469,4006
1124.	= auf dem Bahngrenzsteine ohne Nummer, östl. der Bahn, bei St 29,0 + 48^m								
	1	12	61	1463	+ 9,5390	0,7	0,5	0,6	478,9396
1125.	□ auf dem offenen Bahndurchlass Nr 18, westl. Stirnmauer, I^{ter} Deckstein des nordwestl. Widerlagers, bei St 28,3 + 180^m, Pl								
	2	19	65	2454	+ 10,9742	0,9	0,8	0,6	489,9138
1126.	□ auf dem gewölbten Bahndurchlass Nr 19, I^{ter} Deckstein des westl. Widerlagers, bei St 27,7 + 135^m								
	3	24	47	2270	+ 11,5132	1,2	1,5	0,8	501,4270
1127.	□ auf der Umfassungsmauer der Waage zu Station Klardorf, östl. Randstein								
	4	21	65	2743	+ 5,5999	1,1	1,2	0,7	507,0269
1128.	⊙ am Betriebsgebäude zu Station Klardorf, Westseite (Rückseite), dicht neben dem Eingange								
	5	2	20	82	— 1,5477	0,2	0,0	0,6	505,4792
1129.	□ auf dem gedeckten Bahndurchlass Nr 12, I^{ter} nordwestl. Deckstein des westl. Widerlagers, bei St 26,5 + 30^m, Pl								
	1	15	60	1810	+ 0,8129	1,1	1,2	0,8	506,2921
1130.	□ auf dem gedeckten Bahndurchlass Nr 8, I^{ter} Deckstein der westl. Stirnmauer, bei St 25,6 + 320^m, tief unter Pl								
	2	22	69	3054	— 1,4841	0,9	0,8	0,5	504,8080
1131.	= unter der Höhenmarke zu Station Schwandorf, in die Treppenstufe gehauen								
	3	13	64	1668	— 2,4594	0,9	0,7	0,7	502,3486
1132.	⊙ am Betriebshauptgebäude zu Station Schwandorf, Nordostseite, Haupteingang von der Stadt								
					— 1,4637				500,8849
1133.	□ auf der Blechbalkenbrücke Nr 7 mit 6 Oeffnungen über die Naab, südl. Widerlager, westl. Flügeldeckstein, bei St 25,1 + 4^m								
	1	4	68	543	— 0,2189	0,5	0,2	0,6	502,1297
1134.	□ auf dem offenen Bahndurchlass Nr 5, nördl. Widerlager, nordwestl. Deckstein, bei St 24,2 + 367^m								
	2	21	71	2978	— 2,2162	0,8	0,6	0,5	499,9135

Nr	A	J	Z	D	± H	w	w^2	w'	Cote
1135.	= auf dem Perron zu Station Irrenlohe, Westseite								
	3	6	67	763	— 1,4013	0,8	0,6	0,9	498,5122
1136.	⊙ am Betriebshauptgebäude zu Station Irrenlohe, Westseite, dicht neben dem Haupteingange								
	4	1	32	65	— 1,7126	0,3	0,1	1,3	496,7996
1137.	□ auf der offenen Bahnbrücke Nr 6, I^{ter} Deckstein der südwestl. Flügelmauer, bei St 0,5 + 120^{m} (Zählung der Bahnstunden vom Bahnhofe Irrenlohe aus)								
	1	14	74	2063	— 0,7642	1,0	1,0	0,7	497,7480
1138.	□ auf dem offenen Bahndurchlass Nr 8, I^{ter} nordwestl. Deckstein, bei St 0,6 + 355^{m}, Pl								
	2	6	63	752	— 0,1535	0,5	0,3	0,6	497,5945
1139.	□ auf der Umfassungsmauer der Waage zu Station Schwarzenfeld, östl. Randstein								
	3	9	73	1316	— 2,8390	0,7	0,5	0,6	494,7555
1140.	□ auf dem gedeckten Bahndurchlass Nr 12, II^{ter} westl. Deckstein, bei St 1,3 + 260^{m}, 0,45^{m} unter Pl								
	4	9	66	1194	+ 1,7460	0,4	0,1	0,3	496,5015
1141.	⊐ auf der Blechträgerbrücke Nr 14, mit 3 Oeffnungen über den Hüttenbach, I^{ter} Deckstein der südwestl. Flügelmauer, bei St 1,6 + 200^{m}, Pl								
	5	7	74	1043	— 1,8617	0,4	0,2	0,4	494,6398
1142.	□ auf dem gedeckten Bahndurchlass Nr 13, nordöstl. Deckplatte, bei St 1,8 + 200^{m}, 0,42^{m} unter Pl								
	6	6	62	750	+ 1,0046	0,5	0,2	0,5	495,6444
1143.	□ auf dem offenen Bahndurchlass Nr 17 (alter Flusslauf der Naab), I^{ter} Deckstein der nordöstl. Flügelmauer, bei St 2,5 + 170^{m}, Pl								
	7	21	62	2592	— 1,3375	0,9	0,8	0,5	494,3069
1144.	□ auf der Umfassungsmauer der Waage zu Station Naabburg, südöstl. Randstein								
	8	13	71	1849	— 0,6622	0,5	0,3	0,4	493,6447
1145.	⊙ am Betriebsgebäude zu Station Naabburg, Südostseite, zwischen den Eingängen zu den Wartesälen I^{ter}, II^{ter} und III^{ter} Classe								
	9	1	41	81	— 2,0884	0,1	0,0	0,3	491,5563

München — Landshut — Regensburg — Weiden.

Nr	A	J	Z	D	± H	w	w^2	w'	Cote
1146.	□ auf der offenen Bahndurchfahrt Nr 21, I^{ter} Deckstein der nordwestl. Flügelmauer, bei St 3,2 + 0^m								
	1	4	58	461	+ 1,2566	0,5	0,2	0,7	492,8129
1147.	= auf einem vorspringenden Felsen, nordwestl. der Bahn, bei St 4,0 + 90^m								
	2	21	73	3086	— 1,2599	0,9	0,8	0,5	491,5530
1148.	⌓ auf dem offenen Bahndurchlass Nr 33 über den Steinbach, I^{ter} Deckstein der nordöstl. Flügelmauer, bei St 4,3 + 130^m, Pl (nordwestl. der Station Pfreimt)								
	3	9	59	1065	— 1,4790	0,6	0,3	0,6	490,0740
1149.	□ auf dem offenen Bahndurchlass Nr 37, nordwestl. Deckplatte, bei St 4,5 + 320^m, Pl								
	4	10	53	1051	— 2,8934	0,8	0,6	0,8	487,1806
1150.	□ auf dem gedeckten Bahndurchlass Nr 46, nordwestl. Deckplatte, bei St 5,6 + 300^m, 0,60^m unter Pl								
	5	31	66	4095	— 1,9859	1,1	1,2	0,5	485,1947
1151.	= auf dem Perron zu Station Wernberg, Nordwestseite								
	6	10	74	1486	— 7,2559	0,7	0,4	0,5	479,9388
1152.	⊙ am Betriebsgebäude zu Station Wernberg, Nordwestseite, dicht neben dem Eingange zum Wartesaal III^{ter} Classe								
	7	1	24	49	— 1,7483	0,2	0,0	0,8	478,1905
1153.	□ auf der Umfassungsmauer der Waage zu Station Wernberg, nordöstl. Randstein								
	1	1	45	91	+ 2,1680	0,2	0,0	0,6	480,3585
1154.	□ auf der Durchfahrt Nr 53 (Blechträger), I^{ter} Deckstein der nordöstl. Flügelmauer, bei St 6,9 + 215^m, Pl								
	2	21	74	3095	+ 0,8872	0,7	0,4	0,4	481,2457
1155.	□ auf dem gedeckten Bahndurchlass Nr 60, nordwestl. Deckplatte, bei St 7,7 + 325^m, 0,46^m unter Pl								
	3	22	72	3180	— 1,8310	0,8	0,7	0,5	479,4147
1156.	□ auf dem gewölbten Bahndurchlass Nr 65, südwestl. Deckstein, bei St 8,3 + 310^m, 0,44 unter Pl (dicht vor Station Luhe)								
	4	16	66	2103	— 5,9864	0,7	0,4	0,5	473,4283

Regensburg — Neumarkt i./O. — Nürnberg.

Nr	A	J	Z	D	± H	w	w^2	w'	Cote
1157.	⊙ am Betriebsgebäude zu Station Luhe, Westseite dicht neben dem Eingange zum Postbureau								
	5	1	61	121	— 2,4557	0,3	0,1	0,8	470,9726
1158.	⌓ auf der eisernen Fachwerkbrücke Nr 69, mit 2 Oeffnungen über die Haidenaab, III^{ter} Deckstein des nordwestl. Stirnflügels, bei St 8,7+75^{m}, Pl								
	1	11	52	1133	+ 4,1058	0,7	0,5	0,7	475,0784
1159.	□ auf der offenen Bahndurchfahrt Nr 72, I^{ter} Deckstein des nordwestl. Stirnflügels, bei St 9,3 + 350^{m}								
	2	18	70	2515	— 5,2558	0,7	0,6	0,5	469,8226
1160.	= auf dem gedeckten Bahndurchlass Nr 76, südwestl. Deckplatte, bei St 9,8 + 95^{m}								
	3	14	57	1598	— 5,2880	0,8	0,7	0,6	464,5346
1161.	□ auf dem offenen Bahndurchlass Nr 79, I^{ter} nordöstl. Deckstein, bei St 10,4 + 50^{m}, Pl								
	4	15	73	2186	+ 0,5447	0,7	0,4	0,4	465,0793
164.	□ auf der Umfassungsmauer der grossen Drehscheibe zu Station Weiden, nordöstl. Randstein								
	5	7	69	694	— 0,3577	0,6	0,4	0,6	464,7216
165.	= unter der Höhenmarke zu Station Weiden, in die Treppenstufe gehauen								
	6	2	41	164	— 0,3710	0,4	0,2	1,0	464,3506
166.	⊙ am Betriebshauptgebäude zu Station Weiden, Ostseite gegen die Stadt, Mittelpfeiler am Haupteingange, Sandstein-Monolith								
					1,8145				462,5361

Regensburg — Neumarkt i./O. — Nürnberg.*)

1106.	⊙ am Betriebshauptgebäude zu Station Regensburg, Nordseite, mittlerer Bogenpfeiler der Vorhalle — 1,6403	520,1543

*) Die Strecke von Regensburg (Nr 1106) bis Seubersdorf (Nr 1190) ist noch nicht nach Stunden abgetheilt.

Regensburg — Neumarkt i./O. — Nürnberg.

Nr	A	J	Z	D	± H	w	w^2	w'	Cote
1105.	= unter der Höhenmarke zu Station Regensburg, in die Treppenstufe gehauen								521,7946
1162.	□ auf dem gedeckten Bahndurchlass Nr 22, südwestl. Deckstein, 280m vom Bahnwärterhaus Nr 83 entfernt, 0,06m unter Pl								
	1	14	67	1881	— 1,6615	0,8	0,7	0,6	520,1331
1163.	⊙ am Betriebsgebäude zu Station Prüfeningen, Nordostseite, dicht neben dem Eingange zur Expedition								
	2	14	68	1890	— 8,5834	0,7	0,5	0,5	511,5497
1164.	□ auf dem Deckstein innerhalb der ersten südwestl. Nische über den Fluthöffnungen der eisernen Fachwerkbrücke Nr 17 über die Donau bei Maria-Ort								
	1	9	73	1311	— 1,3726	0,6	0,4	0,6	510,1771
1165.	□ auf dem Brüstungsstein der Flügelmauer, dicht neben der letzten südwestl. Nische auf dem nordwestl. Widerlager der eisernen Fachwerkbrücke Nr 17 über die Donau bei Maria-Ort, 0,50m über Pl								
	2	2	73	291	— 0,5163	0,2	0,0	0,3	509,6608
1166.	□ auf einer Bodenplatte in der Vorhalle zu Station Etterzhausen, Südfront, (mittlerer Stein) gegenüber dem Eingange zum Wartesaal IIIter Classe								
	3	32	69	4393	— 41,7254	1,0	1,1	0,5	467,9354
1167.	⊙ am Betriebsgebäude zu Station Etterzhausen, Südwestseite (Seitenbau)								
	4	1	17	34	— 1,4765				466,4589
1168.	□ auf dem offenen Bahndurchlass Nr 7, IIter südwestl. Deckstein des westl. Widerlagers, 0,16m unter Pl								
	1	12	63	1508	— 13,5897	0,6	0,3	0,5	452,8692
1169.	= auf dem Podest der Freitreppe zu Station Eichhofen, südwestl. von dem Betriebsgebäude und dicht neben dem Geländer								
	2	10	70	1402	— 10,1670	0,7	0,5	0,6	442,7022
1170.	⊙ am Betriebsgebäude zu Station Eichhofen, Nordseite, zwischen den Eingängen zur Expedition und dem Wartesaal Iter und IIter Classe								
	3	1	10	21	— 1,6907				441,0115
1171.	= auf der gewölbten Bahndurchfahrt Nr 5, nordöstl. Brüstungsstein, 270m vom Wechselwärterhaus entfernt, 0,21m über Pl								
	1	4	74	593	+ 0,3900	0,3	0,1	0,4	441,4015

Regensburg—Neumarkt i./O.—Nürnberg.

Nr	A	J	Z	D	± H	w	w^2	w'	Cote
1172.	= auf dem gedeckten Bahndurchlass Nr 1, I^{ter} nordwestl. Deckstein, zwischen Bahnwärter-Posten 73 und 74, 0,72^{m} unter Pl								
	2	16	71	2258	— 13,2599	0,9	0,7	0,6	428,1416
1173.	□ auf dem offenen Bahndurchlass Nr 34, I^{ter} südöstl. Stirnflügeldeckstein, zwischen Bahnwärter-Posten 73 und 72 und den Telegraphenstangen 76 und 77								
	3	12	59	1409	— 5,6172	0,5	0,2	0,4	422,5244
1174.	= auf dem gewölbten Bahndurchlass Nr 28, I^{ter} südwestl. Flügeldeckstein, zwischen Bahnwärter-Posten 72 und 71 und den Telegraphenstangen 44 und 43, 0,46^{m} unter Pl								
	4	9	65	1162	+ 2,9770	0,3	0,1	0,3	425,5014
1175.	= auf dem gedeckten Wegdurchlass Lit. T, II^{ter} südöstl. Stirndeckstein, dicht vor dem Wechselwärterhaus zu Station Laaber								
	5	10	70	1391	— 0,4682	0,6	0,4	0,5	425,0332
1176.	⊙ am Betriebsgebäude zu Station Laaber, Südwestseite, zwischen den Eingängen zu den Wartesälen I^{ter}, II^{ter} und III^{ter} Classe								
	6	2	47	186	— 2,1976	0,3	0,1	0,6	422,8356
1177.	□ auf der Umfassungsmauer der Waage zu Station Laaber, nördl. Randstein								
	1	1	53	107	+ 2,1494	0,1	0,0	0,2	424,9850
1178.	□ auf einem vorspringenden Dolomitfelsen, nordöstl. der Bahn, zwischen Bahnwärter-Posten 70 und 69 und gegenüber Telegraphenstange Nr 141								
	2	12	60	1440	— 6,6229	0,5	0,2	0,4	418,3621
1179.	□ auf dem gedeckten Wegdurchlass bei Ueberfahrt Nr 15, nordöstl. Ecke des östl. Stirndecksteins, gegenüber Bahnwärter-Posten 69								
	3	11	62	1360	— 7,6404	0,6	0,3	0,5	410,7217
1180.	□ auf der offenen Bahndurchfahrt Nr 17 (Blechträger), I^{ter} Deckstein des südwestl. Stirnflügels, zwischen Telegraphenstangen 44 und 43 und Bahnwärter-Posten 68 und 67								
	4	14	72	2023	— 5,0625	0,8	0,7	0,6	405,6592
1181.	□ auf der eisernen Fachwerkbrücke Nr 14 mit 3 Oeffnungen über die Laaber bei Station Beratzhausen, VI^{ter} Brüstungsstein des südwestl. Stirnflügels, südöstl. Widerlager, 0,4^{m} über Pl								
	5	6	71	850	+ 2,3073	0,4	0,1	0,4	407,9665
1182.	⊼ auf der eisernen Fachwerkbrücke Nr 14 mit 3 Oeffnungen über die Laaber bei Station Beratzhausen, I^{ter} Brüstungsstein des nordöstl. Stirnflügels (Nische), nordwestl. Widerlager, 0,40^{m} über Pl								
	6	1	93	186	+ 0,0637	0,2	0,0	1,0	408,0302

Regensburg—Neumarkt i./O.—Nürnberg.

Nr	A	J	Z	D	± H	w	w^2	w'	Cote
1183.	⊙ am Betriebsgebäude zu Station Beratzhausen, Nordseite, dicht neben dem Eingange zum Wartesaal I^{ter} und II^{ter} Classe								
	7	5	71	711	— 3,2213	0,4	0,2	0,5	404,8089
1184.	□ auf der Thürsohle des Einganges zum Expeditionslokal der Haltestelle Mausheim, südöstl. Ecke								
	1	36	63	4543	— 13,2415	1,1	1,1	0,5	391,5674
1185.	□ auf der offenen Wegdurchfahrt Nr 21 (Blechträger), Strasse von Parsberg nach Lupburg, I^{ter} Deckstein des nordwestl. Stirnflügels, nördl. Widerlager, zwischen Telegraphenstangen 24 und 23 und Bahnwärter-Posten 58 und 57								
	2	38	66	5047	— 24,3296	1,1	1,3	0,5	367,2378
1186.	□ auf der Umfassungsmauer der Waage zu Station Parsberg, nordwestl. Randstein								
	3	7	55	773	— 3,4410	0,2	0,1	0,3	363,7968
1187.	⊙ am Betriebsgebäude zu Station Parsberg, zwischen den Eingängen zu den Wartesälen I^{ter}, II^{ter} und III^{ter} Classe, Nordseite								
	4	1	57	114	— 2,3637	0,1	0,0	0,4	361,4331
1188.	□ auf der offenen Bahndurchfahrt Nr 20 (Blechbalkenbrücke), II^{ter} Deckstein des südöstl. Stirnflügels, zwischen Telegraphenstangen 95 und 94, Pl								
	1	3	51	309	+ 1,6304	0,3	0,1	0,5	363,0635
1189.	= auf dem gedeckten Wegdurchlass, Lit. P und Q, für die Strasse von Dasswang nach Daschhofen, östl. der Bahn, südöstl. Stirn, bei Bahnwärter-Posten Nr 54								
	2	32	59	3793	+ 5,4299	0,9	0,8	0,5	368,4934
1190.	□ auf dem Perron zu Station Seubersdorf, Südwestseite								
	3	28	57	3216	— 18,8258	1,0	1,1	0,6	349,6676
1191.	⊙ am Betriebsgebäude zu Station Seubersdorf, zwischen den Eingängen zu den Wartesälen I^{ter}, II^{ter} und III^{ter} Classe, Nordseite								
	4	1	18	37	— 1,8692				347,7984
1192.	= auf dem gedeckten Wegdurchlass, Lit. F und G, nordwestl. der Bahn, südwestl. Stirn, bei St 14,8 + 276^m, 0,62^m unter Pl (Zählung der Bahnstunden von Nürnberg aus)								
	1	12	56	1349	— 3,4043	0,5	0,3	0,4	344,3941
1193.	□ auf dem gedeckten Wegdurchlass, Lit. D und E, nördl. der Bahn, nordwestl. Stirn, bei St 14,5 + 222^m, 0,23^m unter Pl								
	2	10	58	1167	— 1,7974	0,4	0,2	0,4	342,5967

Regensburg — Neumarkt i./O. — Nürnberg.

Nr	A	J	Z	D	± H	w	w^2	w'	Cote
1194.	□ auf dem Sockel des östl. Widerlagers der gewölbten Strassenbrücke Nr 2, bei St 14,0 + 300m, 0,60m über Pl								
	3	14	64	1785	+ 2,9139	0,7	0,5	0,5	345,5106
1195.	□ auf der offenen Bahndurchfahrt Nr 3, nordwestl. Stirnflügel, II^{ter} Deckstein, bei St 13,7 + 325m, Pl (Zugleich Ueberbrückung des Altfalterbaches bei seinem Ursprunge)								
	4	9	60	1073	+ 7,8416	0,5	0,2	0,5	353,3522
1196.	□ auf der Begrenzungsmauer des nördl. Seitengrabens in dem Einschnitte bei Altfalta, westl. Eingang, I^{ter} Stein, bei St 13,3 + 0m								
	5	18	51	1835	+ 12,2190	0,6	0,4	0,5	365,5712
1197.	⊏̄ auf der eisernen Fachwerkbrücke Nr 30 mit 5 Oeffnungen über die kleine Laaber, nordöstl. Stirnflügel, I^{ter} Brüstungsstein am Auflager des Fachwerks, nordwestl. Widerlager, bei St 13,0 + 36m, 0,40m über Pl								
	6	8	67	1077	+ 7,0746	0,4	0,2	0,4	372,6458
1198.	□ auf der eisernen Fachwerkbrücke Nr 30 mit 5 Oeffnungen über die kleine Laaber, nordöstl. Stirnflügel, I^{ter} Brüstungsstein, westl. Widerlager, bei St 12,9 + 90m, 0,40m über Pl								
	7	2	79	314	+ 0,1225	0,2	0,0	0,3	372,7683
1199.	□ auf der Umfassungsmauer der Waage zu Station Deining, I^{ter} südwestl. Randstein								
	8	10	68	1369	+ 3,7968	0,5	0,3	0,5	376,5651
1200.	⊙ am Betriebsgebäude zu Station Deining, zwischen den Eingängen zum Wartesaal III^{ter} Classe und der Expedition								
	9	1	46	93	— 2,0817	0,0	0,0	0,0	374,4834
1201.	= auf dem gedeckten Wegdurchlass bei Ueberfahrt Nr 27, nördl. der Bahn, östl. Stirndeckplatte, bei St 12,0 + 54m, 1,02m unter Pl,								
	1	13	64	1656	+ 12,3459	0,6	0,4	0,5	386,8293
1202.	□ auf dem offenen Bahndurchlass Nr 34 (Schienenträger), nordöstl. Stirnflügel, II^{ter} Deckstein, bei St 11,7 + 228m, Pl								
	2	11	54	1196	+ 7,0327	0,6	0,4	0,6	393,8620
1203.	□ auf der offenen Bahndurchfahrt Nr 31 (Blechträger), II^{ter} Deckstein des südwestl. Stirnflügels, südl. Widerlager, bei St 11,3 + 250m, Pl								
	3	14	52	1458	+ 9,7093	0,5	0,3	0,4	403,5713

Regensburg — Neumarkt i./O. — Nürnberg.

Nr	A	J	Z	D	± H	w	w^2	w'	Cote
1204.	☐ auf der offenen Bahndurchfahrt Nr 24, II^{ter} Deckstein des südöstl. Stirnflügels, nordöstl. Widerlager, bei St 10,6 + 220^{m}, Pl								
	4	23	57	2630	+ 17,2412	0,6	0,4	0,4	420,8125
1205.	☐ auf dem Bahngrenzsteine ohne Nummer, nordwestl. der Bahn, bei St 10,2 + 233^{m}, 1,77^{m} unter Pl								
	5	14	53	1485	+ 9,1475	0,5	0,2	0,4	429,9600
1206.	☐ auf dem offenen Bahndurchlass Nr 22, südwestl. Lagerstein für die Schienenträger des II^{ten} noch nicht hergestellten Geleises, bei St 9,8 + 270^{m}, 0,20^{m} unter Pl (südwestl. Rückseite des Steines)								
	6	10	73	1453	+ 3,7824	0,4	0,2	0,4	433,7424
1207.	☐ auf der Umfassungsmauer der grossen Drehscheibe zu Station Neumarkt i./O., II^{ter} nordwestl. Randstein vom Schienengeleise, Bahnhof-Pl								
	7	6	48	575	+ 0,0030	0,5	0,3	0,7	433,7454
1208.	= unter der Höhenmarke zu Station Neumarkt i./O. in die Treppenstufe gehauen								
	8	2	21	86	— 0,5679	0,2	0,0	0,6	433,1775
1209.	⊙ am Betriebshauptgebäude zu Station Neumarkt i./O., Ostfront, Thürpfosten am Haupteingang von der Stadt her								
					— 1,6203				431,5572
1210.	☐ auf dem offenen Bahndurchlass (zugleich Durchfahrt) Nr 18, südwestl. Flügelmauer, westl. Widerlager, II^{ter} Deckstein, bei St 9,4 + 355^{m} und 200^{m} vom Ludwigscanal entfernt, Pl								
	1	7	59	820	+ 2,4763	0,3	0,1	0,3	436,2217
1211.	☐ auf dem offenen Bahndurchlass Nr 16, nordöstl. Stirnflügel, bei St 9,0 + 54^{m}, Pl								
	2	15	60	1790	— 7,6334	0,4	0,2	0,3	428,5883
1212.	☐ auf dem offenen Bahndurchlass Nr 14 (Schienenträger), I^{ter} Deckstein des nordwestl. Stirnflügels, bei St 8,4 + 120^{m}, 0,05^{m} über Pl								
	3	20	54	2163	— 14,2885	0,7	0,5	0,5	414,2998
1213.	☐ auf dem gedeckten Wegdurchlass Lit. C und D, südl. der Bahn, westl. Stirndeckplatte, bei St 7,8 + 115^{m}, 0,23^{m} unter Pl								
	4	21	53	2245	14,7779	0,8	0,6	0,5	399,5219
1214.	☐ auf dem offenen Bahndurchlass Nr 7, mit 2 Oeffnungen, Lagerstein auf dem Mittelpfeiler des westl. Schienenträgers des II^{ten} noch nicht hergestellten Geleises, bei St 7,4 + 120^{m}, 0,18^{m} unter Pl								
	5	10	73	1465	+ 1,8551	0,6	0,3	0,5	401,3770

Nr	A	J	Z	D	± H	w	w^2	w'	Cote
1215.	☐ auf der Umfassungsmauer der Waage zu Station Postbauer, westl. Randstein								
	6	4	61	487	+ 0,6373	0,3	0,1	0,4	402,0143
1216.	⊙ am Betriebsgebäude zu Station Postbauer, Nordostseite, zwischen den Eingängen zum Wartesaal I^{ter} und II^{ter} Classe und der Expedition								
	7	1	43	87	— 2,0335	0,1	0,0	0,2	399,9808
1217.	☐ auf dem offenen Bahndurchlass Nr 42, III^{ter} Deckstein des nordwestl. Widerlagers, bei St 6,5 + 300^m, 0,18^m unter Pl								
	1	21	62	2593	+ 20,0552	0,6	0,4	0,4	420,0360
1218.	☐ auf der offenen Bahndurchfahrt Nr 38 (Blechträger), mittlerer Lagerstein des nördl. Widerlagers, bei St 6,0 + 220^m, 0,88^m unter Pl								
	2	17	57	1937	+ 20,1435	0,6	0,3	0,4	440,1795
1219.	☐ auf der eisernen Fachwerkbrücke Nr 35 über den Ludwigscanal, Lagerstein für den südwestl. Brückenträger des II^{ten} Geleises, nordwestl. Widerlager, bei St 5,8 + 200^m, 0,70^m unter Pl								
	3	7	55	764	+ 7,4527	0,4	0,2	0,4	447,6322
1220.	☐ auf der gewölbten Bahndurchfahrt Nr 26, südwestl. Stirn, VI^{ter} Brüstungsstein, bei St 5,0 + 310^m, 0,31^m über Pl								
	4	25	57	2867	+ 27,5878	0,7	0,5	0,4	475,2200
1221.	☐ auf der gewölbten Bahnbrücke Nr 23, mit 3 Oeffnungen über die Schwarzach, südl. Stirn, südwestl. Stirnflügel, IV^{ter} Brüstungsstein, bei St 4,7 + 45^m, 0,42^m über Pl								
	5	12	58	1381	+ 13,7416	0,5	0,2	0,4	488,9616
1222.	⊙ am Betriebsgebäude der Haltestelle Ochenbruck, zwischen den Eingängen zum Wartesaal III^{ter} Classe und der Expedition								
	6	8	56	900	— 0,8072	0,3	0,1	0,3	488,1544
1223.	☐ auf dem offenen Bahndurchlass Nr 19^a (Schienenträger), nordöstl. Stirn, I^{ter} Deckstein, bei St 4,1 + 285^m, Pl								
	1	10	59	1183	— 0,8706	0,4	0,1	0,3	487,2838
1224.	☐ auf der offenen Bahndurchfahrt Nr 18 (Blechträger), V^{ter} Deckstein des südwestl. Stirnflügels, bei St 3,6 + 45^m, Pl								
	2	17	59	2017	+ 8,7139	0,7	0,5	0,5	495,9977
1225.	☐ auf dem offenen Bahndurchlass Nr 15, nördl. Stirn, 3ter Deckstein, bei St 3,4 + 240^m, Pl								
	3	4	69	548	— 1,6410	0,4	0,2	0,6	494,3567

Regensburg — Neumarkt i./O. — Nürnberg.

Nr	A	J	Z	D	± H	w	w^2	w'	Cote
1226.	⊙ am Betriebsgebäude zu Station Feucht, Nordostseite, zwischen den Eingängen zu den Wartesälen I^{ter} II^{ter} und III^{ter} Classe								
	4	4	57	454	— 2,7016	0,4	0,2	0,7	491,6551
1227.	□ auf dem offenen Bahndurchlass Nr 12 (Schienenträger) östl. Stirn, II^{te} Deckstein, bei St 2,7 + 175^{m}, Pl								
	1	15	74	2211	+ 11,4536	0,6	0,3	0,4	503,1087
1228.	= auf dem gewölbten Bahndurchlass Nr 10, östl. Stirn, I^{ter} Deckstein, bei St 2,2 + 261^{m}, 2,21^{m} unter Pl								
	2	13	68	1764	+ 13,9486	0,6	0,3	0,4	517,0573
1229.	□ auf dem offenen Bahndurchlass Nr 8, nordöstl. Stirn, I^{ter} Deckstein, bei St 1,6 + 195^{m}, Pl								
	3	16	72	2300	+ 11,4438	0,6	0,4	0,4	528,5011
1230.	□ auf dem offenen Bahndurchlass Nr 7, nordöstl. Stirn, I^{ter} Deckstein bei St 1,1 + 245^{m}, Pl								
	4	15	60	1811	+ 11,8754	0,5	0,3	0,4	540,3765
1231.	□ auf dem gedeckten Bahndurchlass Nr 5, nordöstl. Deckstein für den II^{ten} noch nicht hergestellten Zwischenperron in der Station Dutzendteich								
	5	7	57	793	+ 1,4316	0,3	0,1	0,2	540,8081
1232.	⊙ am Betriebsgebäude zu Station Dutzendteich, dicht neben dem Eingange zum Zimmer des Portiers								
	6	1	37	74	— 1,9268	0,2	0,1	0,4	539,8813
1233.	□ auf der offenen Bahndurchfahrt Nr 1 für die Staatsbahn von Nürnberg nach Bayreuth, II^{ter} Deckstein des nordwestl. Stirnflügels								
	1	12	77	1840	+ 6,8872	0,4	0,1	0,3	548,6953
364.	= unter der Höhenmarke zu Station Nürnberg, in die Treppenstufe gehauen								
	2	13	67	1749	+ 3,0998	0,7	0,5	0,5	551,7951
365.	⊙ am Betriebshauptgebäude zu Station Nürnberg, Stadtseite, nach Norden, Mittelbau, westl. neben der westl. Thür								
					— 2,0870				549,7081

BRITISH
NATURAL HISTORY

Inhalt.

Seite

Die Reciprocität zwischen Kreisen, welche dieselbe gemeinschaftliche Secante haben und den confocalen Kegelschnitten. Von *Otto Hesse* 1

Beobachtungen und Untersuchungen über die Eigenschaften und die praktische Verwerthung der Naudet'schen Aneroïdbarometer. Von *Carl Max von Bauernfeind.* Mit 1 Steindrucktafel 25

Ueber ein Verfahren die Gleichungen, auf welche die Methode der kleinsten Quadrate führt, sowie lineäre Gleichungen überhaupt, durch successive Annäherung aufzulösen. Von *Ludwig Seidel* 81

Ueber das Pascal'sche Theorem. Von *G. Bauer* 109

Das Bayerische Präcisions-Nivellement. (Dritte Mittheilung.) Von *Carl Max von Bauernfeind* 141